ELEMENTI DI MATEMATICA

DI

ANDREA CARAFFA

DELLA COMPAGNIA DI GESU'

PROFESSORE DI MATEMATICHE NEL COLLEGIO ROMANO

PARTE TERZA

SEZIONE PRIMA

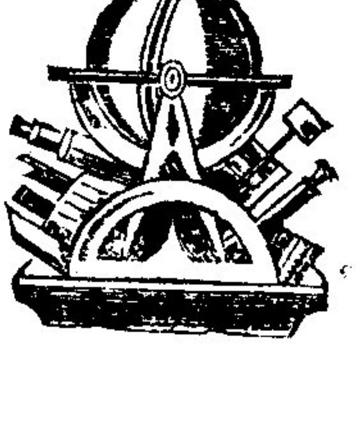
PRINCIPJ DI CALCOLO DIFFERENZIALE

TRADOTTI DALL' IDIOMA LATINO

CON ANNOTAZIONI

DA

PAOLO VOLPICELLI



ROMA

TIPOGRAFIA FERRETTI

1843

ALL'EMINENZA REVERENDISSIMA

DEL SIGNOR CARDINALE

LUIGI LAMBRUSCHINI

VESCOVO DI SABINA

SEGRETARIO DI STATO DI SUA SANTITA'

BIBLIOTECARIO DI SANTA CHIESA

PREFETTO DELLA SACRA CONGREGAZIONE DEGLI STUDII

ECC. ECC. ECC.

Eminentissimo e Reverendissimo Principe

Il mio comento sul calcolo differenziale del P. Andrea Caraffa della Compagnia di Gesù, tutto volto ad appianare l'intelligenza di un testo pregievolissimo, colse il maggior guiderdone che poteva mai, quando, non ha guari, l'Eminenza Vostra Reverendissima ne gradì l'offerta, permettendomi fregiarlo del preclaro suo nome, e pubblicarlo, come ora fo, sotto i valevolissimi auspici suoi.

E già nel condurre a termine siffatto studio non *poco mi confortava la speranza di tanto favore; la quale se pèr un lato doveva reputarsi ardita, non era per l' altro da credere mal fondata del tutto, chè l' EMINENZA VOSTRA sempre accolse benignamente i miei lavori, comecchè tenuissimi, nè questa è la sola volta che mi permise umiliarglieli, qual testimonio di rispetto, di stima, e di gratitudine.*

Mi terrò assai fortunato se a questi sentimenti, che nutro per l' EMINENZA VOSTRA, potrò unire *il possesso della sua benevolenza ; la quale , solo perchè procedente da chi venne in fama e salì sublime per virtù e dottrina , grandemente da me si desidera.*

Fo con questo un altro voto ferventissimo , ed è che la prosperità sua duri lunghi anni , tal che possa l' EMINENZA VOSTRA più e più adoperarsi pel pubblico bene , con quella mente , la quale , cogliendo sempre il meglio , lascia ognuno benedire a quel Saggio , che più alto sedendo , seppe *valersene: mente, cui ben si addice la sentenza del nostro divino Poeta:*

,, Uso e natura sì la privilegia,
,, Che . . . .
,, . . . va dritta, e il mal camin dispregia.

Inchinato al bacio della sacra porpora assai mi onoro in raffermarmi

All' Eminenza Vostra Reverendissima

Umilissimo Devotissimo Obbligatissimo Servidore
PAOLO VOLPICELLI

INDICE

DELLE MATERIE CHE SI CONTENGONO NELLA PRIMA SEZIONE DELLA TERZA PARTE.

PRINCIPJ DI CALCOLO DIFFERENZIALE.

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{\varphi(x_n)-\varphi(x_0)}=\frac{f'[x_0+\varepsilon(x_n-x_0)]}{\varphi'[x_0+\varepsilon(x_n-x_0)]}$$ §. 18.

Da ciò derivano le relazioni fra le funzioni primitive, e le derivate dei vari ordini. §. 19, 20, . . 25.

Metodo per determinare i valori delle funzioni di una sola variabile, che si offrono sotto certe forme indeterminate; cioè

1.° sotto la forma $\frac{0}{0}$; §. 26.

2.° sotto le forme $\frac{\infty}{\infty}$, 0, ∞; §. 27.

3.° sotto le forme 0^0, ∞^0, 1^∞. §. 28.

Se la $f(\beta)$ sia una quantità infinitesima di base $=\beta$, e di ordine $=c$, si cerca la prima delle

$$f(\beta),\ f'(\beta),\ f''(\beta),\ f'''(\beta),\ \ldots$$

che non si annulla con β. §. 29.

Massimi, e minimi valori della funzione continua $f(x)$: i valori x_n, pei quali diviene massima o minima la $f(x_n)$, sono da ricercare fra le radici dell'equazioni

$$f'(x)=0,\quad \frac{1}{f'(x)}=0;$$

criterio per conoscere se al valore x_n, realmente corrisponda un massimo od un minimo nella $f(x_n)$. §. 30.

Altro criterio. §. 31.

Formole di Taylor, e di Mac-Laurin: condizioni da verificarsi affinchè queste formole valgano. §. 32, 33, 34.

Quante volte le funzioni $f(z+\delta)$, $f(z)$ sieno ciascuna la somma di qualsivoglia serie convergente, ordinata per le potenze ascendenti, la prima della quantità δ, la seconda della z, certo di queste due serie una coinciderà, in quella di Taylor, l'altra in quella di Mac-Laurin. §. 35.

Può succedere che la formola di Mac-Laurin somministri lo sviluppo di una funzione in serie convergente, però senza che la somma di siffatta serie ricada nella funzione stessa. §. 36.

Differenziazione delle funzioni di più variabili: cosa debba intendersi per differenza totale, e cosa per differenze parziali della funzione μ di più variabili indipendenti x, y, z. §. 37.

APPLICAZIONE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ALLA GEOMETRIA.

FINE DELL' INDICE DELLA PRIMA SEZIONE
PARTE TERZA.

IMPRIMATUR

Fr. Dominicus Buttaoni O. P. S. P. A. Mag.

IMPRIMATUR

Jos. Canali Archiepiscopus Colossiensis Vicesg.

ERRATA

Pag.	Linee	Errori	Correzioni
9	8	(p. 2.ª §. 192. 2.°)	(p. 2.ª §. 109. 2.°)
53	ivi	$d\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1}$	$d\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1} : dx$
64	14	$[x^{\frac{1-3x}{x}}(1-2x-\mathrm{L}(x))]$	$x^{\frac{1-3x}{x}}(1-2x-\mathrm{L}(x))$
68	17	*di quelle*	*di cui quelle*
73	21	e^{-2z}	e^{-z^2}
84	26	*tutte*	*tutto*
95	1	dall'	dell'
ivi	23	*geometrica*	*aritmetica*
126	15	$\mathrm{f}^{(m-1)}(x_2)$	$\mathrm{f}_2^{(m-1)}(x_2)$
132	20	$\Sigma\frac{(x-x')f(x)}{((x-x_1))}$	$\Sigma\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}$

Altre correzioni per la parte seconda.

Pag.	Linee	Errori	Correzioni
103	11	$\pm$ *sena cosa*	$\mp$ *sena cosa*
ivi	27	$=$ *sena senb*	$-$ *sena senb*
174	35	K	k
ivi	37	hK	hk
188	7	*cos*X	*cos*Y
217	25	$\frac{b^2}{a^2}x^0$	$\frac{b^2}{a^2}x_0$
244	19	*elissoidi*	*ellissoidi*
160	15	$\frac{k^3}{1.2.3}\frac{d^2[\varphi(x)]^3}{dx^3}$	$\frac{k^3}{1.2.3}\frac{d^2[\varphi(x)]^3}{dx^2}$
ivi	20	*e la* (h)	*e il prec. val. di* z_1

ELEMENTI

DI

MATEMATICA

PARTE TERZA SEZIONE PRIMA

PRINCIPJ DI CALCOLO DIFFERENZIALE

PRINCIPJ
DI CALCOLO DIFFERENZIALE
DELLE FUNZIONI, E DELLA CONTINUITA' LORO

1.

Se le variabili x, y, z, v, ... sono talmento connesse per certe relazioni fra loro, che date alcune delle medesime, p. e. z, v, ... possano derivarsene i valori delle altre x, y, ..., le variabili x, y ... si dicono *funzioni* delle z, v, ...; queste poi si dicono *indipendenti*. Le coordinate p. e. x, y della linea retta, considerata nel piano, hanno fra loro una relazione, che (p. 2.^{a} §. 172. I.^{o}) viene rappresentata dalla

$$y = ax + b:$$

e poichè per dati valori della x, si hanno valori determinati per la y, e viceversa; perciò delle due x, y, potrà una riguardarsi come funzione dell' altra indipendente. Contemplando la retta nello spazio, potranno (p. 2.^{a} §. 182.) esprimersi le relazioni fra le coordinate x, y, z, mediante le

$$y = az + b, \quad x = a'z + b';$$

e poichè data la z nascono valori determinati per le x, y, perciò potranno le x, y riguardarsi come funzioni della indipendente z. Similmente le coordinate x, y, z, di una superficie piana, talmente fra loro si corrispondono, che fra le medesime ha luogo (p. 2.^{a} §. 180. I.^{o}) la

$$z = ax + a'y + b;$$

e poichè datene due, si ha determinata la terza, perciò delle tre x, y, z, una qualunque sarà funzione delle altre (1). Manifestasi lo stesso rispetto alle coordinate delle linee, non che delle superficie curve.

Generalmente se rappresenti m il numero delle variabili x, y, z, v, ..., ed n quello delle relazioni, è facile inten-

(1) *Queste si diranno anch' esse indipendenti.*

dere che sarà $m - n$ il numero delle variabili indipendenti, ed n quello delle funzioni (2).

2.

Se le relazioni fra le variabili si esprimano da equazioni non risolute riguardo alle funzioni (3), considerate come incognite, queste si dicono *implicite*. Che se i valori delle funzioni sieno immediatamente dati per mezzo delle variabili indipendenti, o così ottengansi dalla risoluzione dell' equazioni, le funzioni diconsi *esplicite*. Nella

$$y^2 - 2xy + m^2 = 0,$$

y è funzione implicita della quantità variabile x; ma fatta la risoluzione, diverrà y funzione esplicita della stessa x, ed avrà un doppio valore, cioè

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - m^2}.$$

Similmente (p. 1.ª §. 205 : 208 : 240. 6.°) nella $L(y) = x$, è la y funzione implicita della x: però se facciasi

$$L(y) = xL(e) = L(e^x),$$

nascerà la funzione esplicita $y = e^x$. Le funzioni esplicite di una o più variabili, sogliono rappresentarsi come appresso

$$F(x),\ f(x),\ \varphi(x),\ \chi(x),\ \text{ecc.}\ldots,$$

$$F(x, y, z, \ldots),\ f(x, y, z, \ldots),\ \varphi(x, y, z, \ldots),\ \text{ecc.}\ldots \quad (4)$$

---

(2) *Ogni relazione, come si vide, offre una variabile, che diremo* dipendente: *ma le variabili tutte sono m, le relazioni fra le medesime n, dunque sarà $m - n$ il numero delle indipendenti.*

(3) *Per funzioni s' intendono le variabili dipendenti* (2).

(4) *Queste notazioni non determinano la natura della funzione esplicita cui riguardano; ed affinchè una funzione di solo una variabile sia completamente determinata, necessita, e basta, che per ciascun valore particolare attribuito alla variabile, possa dedursi quello corrispondente della funzione. Qualche volta per ciascun valore della variabile può la funzione riceverne più, l' uno dall' altro differenti. Quì ha luogo riflettere, che se due funzioni vengano rappresentate dalla medesima caratteristica, o meglio dalla medesima iniziale f, φ, F, ecc., come le $f(x)$, $f(y)$, ovvero le $\varphi(x)$, $\varphi(y)$,*

3.

Le funzioni esplicite diconsi algebriche (p. 2.ª §. 172. II.º) se le variabili indipendenti vengano assoggettate soltanto alle prime operazioni dell' algebra, cioè alla somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, ed all' innalzamento a potenza costante, sia intera, o fratta. Quindi le funzioni

$$a\sqrt{x}+bx+cx^2,\ a+\sqrt[5]{x^2},\ \sqrt{a+mx+nx^2},\ \frac{x\sqrt{a+cx^2}}{a+x},$$

sono tutte algebriche: la prima e la seconda, nelle quali la variabile x rimane affetta da irrazionalità, si dicono *irrazionali*: la terza e la quarta poi diconsi per opposito *razionali*: inoltre la terza stessa dicesi (p. 1.ª §. 156.) intera, perchè nel suo denominatore non trovasi la variabile x; pel contrario la quarta dicesi fratta.

4.

Le funzioni che non sono algebriche diconsi *trasendenti*: sono tali quelle che hanno le variabili, o affette dal segno logaritmico, o le hanno per esponenti, o per linee trigonometriche, o pei relativi archi; le quali funzioni vengono anche particolarmente nominate, o logaritmiche, o esponenziali, o trigonometriche.

5.

Abbiasi ora la funzione

$$y=f(x).$$

Aumentata, o diminuita la x, varierà la y; denotino Δy, Δx i loro incrementi (5) (si appellano *differenze*, una della funzione y, l' altra della quantità x): sarà

---

significa essere le medesime per ugual modo formate dalla variabile, che racchiudono entro parentesi, e dalle costanti, le quali debbono essere le stesse in ambedue le funzioni; tal che, le variabili uguagliandosi fra loro, divengano identiche le funzioni che ad esse appartengono: dicasi altrettanto delle funzioni di più variabili. Essendo poi diverse quelle iniziali, diversa pure sarà la maniera, con la quale ciascuna funzione verrà formata dalla sua variabile.

(5) *I cambiamenti Δx, Δy ponno essere positivi, o negativi; ciò non ostante si dicono sempre incrementi.*

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

donde

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

in cui Δx può assumersi finita, o infinitesima (p. 1.ª §. 250.). Pongasi Δx infinitesima, ed il valore di $f(x)$ rimanga finito da $x = x_n$ ad $x = x_m$: la funzione y dicesi *continua* fra i limiti x_n, x_m, quante volte ai singoli valori della x, compresi fra que' limiti, corrisponda una tal differenza

$$f(x + \Delta x) - f(x),$$

da essere (p. 1.ª §. 131. 1.°) infinitesima fra i medesimi (6).

S' immagini descritta la curva dell' equazione

$$y = f(x).$$

---

(6) *Due sono adunque le condizioni per la continuità della* $f(x)$: *la prima è che questa per ciascun valore della sua variabile, compreso fra i limiti* x_n, x_m, *ne riceva sempre uno finito; la seconda che un incremento infinitamente piccolo* Δx, *dato al valore della variabile indipendente* x, *produca nella funzione stessa una differenza* Δy, *anch' essa infinitamente piccola fra quei limiti. Se le due condizioni ora espresse non vengano soddisfatte, la funzione dicesi* discontinua.

Per venire ai particolari, osserveremo che le funzioni

$$b\text{sen.v.}x, \quad \text{sen}x, \quad \cos x, \quad A^x,$$

ammettono costantemente, per ciascun valore particolare della variabile x, *compreso fra i limiti*

$$x = -\infty, \quad x = \infty,$$

un valore finito; intendendo per A *una costante positiva. Inoltre gli accrescimenti* Δy *di queste funzioni sono* (p. 2.ª §. 127. 2.°)

$$b\cos x - b\cos(x + \Delta x) = 2b\,\text{sen}\frac{\Delta x}{2}\ \text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}x = 2\,\text{sen}\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\,\text{sen}\frac{\Delta x}{2}\ \text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

Se $f(x)$ sia continua fra certi limiti, sarà tale pure la curva; e pel contrario, aumentata, o diminuita l'ascissa x della

---

$$A^{x+\Delta x} - A^{x} = A^{x}(A^{\Delta x} - 1);$$

e poichè i valori numerici dei fattori sen $\frac{\Delta x}{2}$, $A^{\Delta x} - 1$, *convergono con Δx verso lo zero, saranno gli accrescimenti stessi quantità infinitesime, ossia tutti si annulleranno coll'annullarsi di Δx, per qualunque valore della x compreso fra quei limiti; perciò le proposte funzioni saranno continue fra i limiti assegnati.*

Avendosi poi la funzione $\frac{a}{x}$, si vedrà che questa non può esser continua fra gli stessi limiti; giacchè per un valore compreso fra i medesimi, cioè per $x = 0$, diviene infinita, e per conseguenza discontinua. Ma per valori della x compresi fra i limiti $x = -\infty$, $x = 0$, e fra gli altri $x = 0$, $x = +\infty$, ammette costantemente un valore finito. Inoltre il suo incremento

$$\Delta y = \frac{a}{x + \Delta x} - \frac{a}{x} = -\frac{a\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

che diviene infinito per $x = 0$, diviene infinitesimo per qualunque valore, dato alla x, compreso fra i limiti assegnati; dunque la funzione $\frac{a}{x}$ sarà continua fra questi limiti.

Da ultimo abbiansi le funzioni

$$\text{arc.sen.}x, \quad \text{arc.cos.}x:$$

queste, per valori della variabile, compresi fra i limiti

$$x = -1, \quad x = +1,$$

ammettono costantemente un valore finito. Inoltre l'incremento Δy relativo alle medesime, si ottiene come segue.

Posto in primo luogo

$$y = \text{arc.sen}x,$$

avremo

$$\Delta y = \text{arc.sen}(x + \Delta x) - \text{arc.sen}x,$$

e fatto

quantità infinitesima Δx, varierà fra i medesimi limiti l'ordinata y di una quantità pure infinitesima Δy, cosicchè alle due ascisse x, $x + \Delta x$ corrispondano fra quei limiti due punti della curva, fra i quali sarà la distanza $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (7), pur essa in-

---

$$\text{arc.sen}(x + \Delta x) = \varphi\,, \quad \text{arc.sen}x = \omega\,,$$

sarà

$$x + \Delta x = \text{sen}\varphi\,, \quad x = \text{sen}\omega\,,$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}\,, \quad \cos\omega = \sqrt{1 - x^2}\,;$$

quindi

$$\text{sen}(\varphi - \omega) = (x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}\,;$$

donde

$$\Delta y = \varphi - \omega = \text{arc.sen}\,[\,(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}\,]\,;$$

quantità che si annulla con Δx, *e che perciò deve riguardarsi come infinitamente piccola, per qualunque valore della* x *compreso fra* $+1$, *e* -1.

Posto in secondo luogo

$$y = \text{arc.cos}x\,,$$

sarà

$$\Delta y = \text{arc.cos}(x + \Delta x) - \text{arc.cos}x\,;$$

quindi fatto

$$\text{arc.cos}(x + \Delta x) = \varphi\,, \quad \text{arc.cos}x = \omega\,,$$

avremo, con un calcolo simile al precedente,

$$\Delta y = \varphi - \omega = \text{arc.cos}[(x + \Delta x)x + \sqrt{(1 - (x + \Delta x)^2)(1 - x^2)}]\,,$$

quantità che si annulla con Δx, *e che, per valori della* x *fra i limiti assegnati, sarà infinitesima. Dunque le funzioni*

$$\text{arc.sen}x\,, \quad \text{arc.cos}x$$

sono continue fra i limiti stessi.

(7) *Le coordinate suppongonsi rettangolari; ma se fossero invece obliquangole, si avrebbe la stessa conseguenza; giacchè in tal caso quella distanza sarebbe* (p. 2.ª §. 132.)

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y\cos a}\,,$$

quantità similmente infinitesima.

finitesima, convergente cioè indefinitamente con Δx, Δy nel limite $= 0$ (8).

Inoltre, quando $f(x)$ dicasi essere continua nelle prossimità di qualche valore particolare attribuito alla variabile x, deve

---

(8) *Esprimendo A una costante positiva, ed m un numero intero, facilmente si verificherà tutto ciò nelle seguenti funzioni*

$$y = x^m, \quad y = \frac{1}{x^m}, \quad y = A^x, \quad y = \mathrm{L}(x),$$

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y = b\operatorname{sen.v.}v = b(1 - \cos x), \text{ ecc.}$$

che rappresentano curve di rami continui fra certi limiti, non sempre gli stessi, delle ascisse; appunto perchè fra i medesimi è pur continua la funzione che li rappresenta.

Così all' equazione

$$y = b(1 - \cos x)$$

corrisponde una curva continua, cioè che si protende indefinitamente, tanto dalla parte delle ascisse positive, quanto dall' altra delle negative; perchè la stessa funzione

$$b\operatorname{sen.v.}x = b(1 - \cos x),$$

rimane continua fra i limiti

$$x = -\infty, \quad x = +\infty.$$

Dicasi altrettanto riguardo alla curva

$$y = A^x,$$

similmente continua fra gli stessi limiti. Si consideri ora l'iperbola riferita agli assintoti, la quale ha per equazione (p. 2.^{a} §. 121.)

$$x\,y = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{m^2}{2},$$

in cui l' origine delle coordinate sta nel centro della curva. Trasportando questa origine in guisa, che le nuove ascisse uguaglino le prime, aumentate della quantità $\frac{c + d}{2}$, *l' equazione medesima si trasformerà nella*

$$y = \frac{m^2}{2x - c - d}.$$

intendersi che la stessa funzione rimanga continua fra due limiti, comprendenti quel particolare valore, comunque poi siano i medesimi poco fra loro distanti (9).

DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI DI UNA SOLA VARIABILE

6.

Espressa con β la base arbitraria delle quantità infinitesime (p. 1.ª §. 250), e presa Δx infinitamente piccola, pongasi

---

Questa funzione pertanto, e quindi la curva da essa rappresentata, non può dirsi continua fra i limiti

$$x_n = c\,, \quad x_m = d\,;$$

giacchè pel valore

$$x = \frac{c+d}{2}\,,$$

compreso fra i medesimi, essa diviene infinita, e perciò discontinua; laonde al valore medesimo corrisponderà una ordinata infinita, e quindi una interruzione di continuità nella curva.

(9) *Similmente quando una funzione cessa di esser continua nelle prossimità di un particolar valore attribuito alla sua variabile, dicesi che la medesima diviene allora discontinua, e per quel valore particolare avvi cessazione di continuità. Così p. e. avvi discontinuità nelle funzioni*

$$\text{tang}.x\,, \quad \text{sec}.x\,,$$

pel valore

$$x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}\,,$$

ricevendo k uno qualunque dei valori

$$0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ \infty.$$

Accade lo stesso nelle funzioni

$$\frac{a}{1-m^x}\,, \quad \frac{1}{x^m}\,,$$

pel valore $x = 0$, essendo $m > 0$; eccetera.

$$\Delta x = i\beta, \text{ donde } \lim. \frac{\Delta x}{\beta} = \lim. i \quad (10):$$

inoltre suppongasi essere la funzione

$$y = f(x)$$

continua (§. 5.) fra certi limiti assegnati alla variabile x. Sebbene Δy fra quei limiti converga nel lim. $= 0$, tuttavia il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\beta}$$

potrà (p. 2.ª §. 192. 2.º) convergere in un altro limite $>$, ovvero < 0 (11): i limiti dei rapporti

$$\frac{\Delta x}{\beta}, \frac{\Delta y}{\beta}$$

---

(10) *Egli è chiaro che un infinitesimo Δx, riferito ad un altro arbitrario β come base, deve potersi, generalmente parlando, esprimere con questo, moltiplicato per una variabile i; cioè deve poter sussistere l' equazione*

$$\Delta x = \beta i.$$

(11) *Dalla definizione degl' infinitesimi (p. 1.ª §. 250.) discende chiaro, che fatto successivamente*

$$\mu = \beta, \beta^2, \beta^3, ecc. \ldots,$$
$$\beta^c \quad c = 1, 2, 3, ecc. \ldots,$$

sarà β infinitesimo di prim' ordine, β^2 di secondo, β^3 di terzo, ecc. .... Quindi se k, k' esprimano due costanti finite, maggiori di zero; γ, γ' due numeri variabili, convergenti con β verso il limite zero; se inoltre c, c' esprimano gli ordini di due infinitesimi, questi potranno esprimersi rispettivamente con

$$k\beta^c(1 \pm \gamma), \quad k'\beta^{c'}(1 \pm \gamma');$$

ed il rapporto loro sarà

$$\frac{k'\beta^{c'}(1 \pm \gamma')}{k\beta^c(1 \pm \gamma)} = \frac{k'}{k} \times \frac{1 \pm \gamma'}{1 \pm \gamma} \times \beta^{c'-c} = \frac{k'}{k} \times \frac{1 \pm \gamma'}{1 \pm \gamma} \times \frac{1}{\beta^{c-c'}},$$

il quale, secondo che suppongasi

diconsi *differenziali*, uno della variabile indipendente x, l' altro della funzione y, e vengono espressi con dx, dy, cosicchè si hanno le

$$dx = \lim. \frac{\Delta x}{\beta} = \lim. i,$$

$$dy = \lim. \frac{\Delta y}{\beta} = \lim. \frac{f(x+i\beta)-f(x)}{\beta}:$$

quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lim. \frac{\Delta y}{\beta}}{\lim. i} = \lim. \frac{\Delta y}{i\beta} = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (12).$$

Il *calcolo differenziale* verge nel determinare i differenziali delle funzioni (13).

Abbiansi a determinare i differenziali delle funzioni

$$c' = c, \quad c' > c, \quad c' < c,$$

avrà per limite

$$\frac{k'}{k}, \quad 0, \quad \pm\infty.$$

Dunque il singolar valore che, per $\beta = 0$, riceverà una frazione, i termini della quale sono infinitamente piccoli, cioè quantità indefinitamente decrescenti con la variabile di cui sono funzione, potrà essere finito, nullo, ed infinito; e perciò $>$, ovvero $<$ 0. Questo singolar valore, ossia limite verso il quale converge la frazione, mentre i suoi termini si accostano di più in più allo zero, dicesi ultima ragione *dei medesimi.*

(12) *Dunque potremo ancora dire, che i differenziali dx, dy, della variabile indipendente x, e della funzione y, sono tali quantità, che il rapporto delle medesime, coincide coll' ultima ragione delle quantità infinitesime Δx, Δy.*

(13) *Per conseguenza l' oggetto del calcolo medesimo è la determinazione dei rapporti fra i differenziali delle variabili, quando conoscansi le relazioni fra le medesime; ovvero la determinazione delle ultime ragioni delle differenze infinitesime, cioè degli accrescimenti infinitamente piccoli e simultanei delle variabili stesse.*

$$a \pm x\,,\quad ax\,,\quad \frac{a}{x}\,,\quad x^a\,,\quad a^x\,,\quad \mathrm{L}(x)\,,\quad \mathrm{sen}x\,,\quad \cos x.$$

1.°

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \frac{(a \pm x \pm i\beta) - (a \pm x)}{\beta} = \pm \frac{i\beta}{\beta} = \pm i\,;$$

$$dy = d(a \pm x) = \lim.\frac{\Delta y}{\beta} = \pm \lim.i = \pm dx.$$

2.°

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \frac{a(x + i\beta) - ax}{\beta} = \frac{ai\beta}{\beta} = ai\,;$$

$$dy = dax = \lim.\frac{\Delta y}{\beta} = \lim.ai = adx.$$

3.°

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \frac{\frac{a}{x+i\beta} - \frac{a}{x}}{\beta} = -\frac{ai\beta}{x\beta(x+i\beta)} = -\frac{ai}{x(x+i\beta)}\,;$$

$$dy = d\frac{a}{x} = \lim.\frac{\Delta y}{\beta} = -\frac{adx}{x^2}.$$

4.°

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \frac{(x+i\beta)^a - x^a}{\beta} = \frac{x^a[\,(1+\frac{i\beta}{x})^a - 1\,]}{\beta}\,,$$

ovvero (p. 1.^{a} §. 244.)

$$\frac{\Delta y}{\beta} = x^{a-1}[ai + \frac{\beta}{x}(\frac{a(a-1)i^2}{2} +$$

$$\frac{a(a-1)(a-2)i^3\beta}{2.3.x} + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)i^4\beta^2}{2.3.4x^2} + \ldots)]\,;$$

perciò (p. 1.^{a} §. 236.)

$$dy = dx^a = \lim.\frac{\Delta y}{\beta} = ax^{a-1}dx.$$

5.°

$$\frac{\Delta y}{\beta}=\frac{a^{x+i\beta}-a^x}{\beta}=a^x\,\frac{a^{i\beta}-1}{\beta},$$

ovvero (p. 1.ª §. 241.)

$$\frac{\Delta y}{\beta}=a^x[i\mathrm{L}(a)+\beta\left(\frac{i^2\mathrm{L}^2(a)}{2}+\right.$$

$$\left.\frac{i^3\beta\mathrm{L}^3(a)}{2.3}+\frac{i^4\beta^2\mathrm{L}^4(a)}{2.3.4}+\ldots\right)]\quad(14);$$

---

(14) *Il simbolo* L (p. 1.ª §. 240. 6.°) *riferisce ai logaritmi neperiani, così detti da Gio. Néper, o piuttosto Napier, barone scozzese, il quale nel* 1614 *fu il primo a trattare siffatto argomento. Questi logaritmi, che* (p. 1.ª §. 240. 3.° 4.°) *hanno per base il numero* 2,718281828 . . . = *e*, *diconsi pure* naturali, *ed anche* iperbolici, *perchè servono a misurare le diverse parti dell' area compresa fra l' iperbola equilatera, ed i suoi assintoti. Enrico Briggs, contemporaneo di Napier, e poscia Adriano Ulacq, calcolarono i logaritmi nel sistema di cui la base* = 10, *che vengano indicati* (p. 1.ª §. 210.) *col simbolo* l, *e che furono detti* tabulari, ordinari, briggiani, *ed anche* (p. 1.ª §. 209.) volgari. *E poichè nel calcolo e nella meccanica si fa sempre uso dei logaritmi iperbolici, mentre nella pratica dobbiamo valerci degli ordinari, perciò sarà utile quì porre in evidenza le formole necessarie, onde ne' due nominati sistemi di logaritmi, passare da uno cognito all' altro incognito. Possiamo stabilire pertanto* (p. 1.ª §. 210, e nota 184.) *le sequenti equazioni*

$$\mathrm{L}(\nu)=\frac{1}{\mathrm{l}(e)}\,\mathrm{l}(\nu),\quad \mathrm{l}(\nu)=\mathrm{l}(e)\,\mathrm{L}(\nu);$$

ma dalle tavole si ha

$$\mathrm{l}(e)=\mathrm{l}(2,7182\ldots)=0,4342945,$$

quindi

$$\frac{1}{\mathrm{l}(e)}=2,3025851;$$

dunque sostituendo avremo

perciò (p. 1.^{a} §. 236.)

$$dy = da^x = \lim. \frac{\Delta y}{\beta} = a^x L(a)\, dx.$$

6.° (p. 1.^{a} §. 207.)

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \frac{L(x+i\beta) - L(x)}{\beta} = \frac{L(1+\frac{i\beta}{x})}{\beta},$$

ovvero (p. 1.^{a} §. 242.)

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \frac{i}{x} - \beta\left(\frac{i^2}{2x^2} - \frac{i^3\beta}{3x^3} + \frac{i^4\beta^2}{4x^4} - \ldots\right);$$

laonde (p. 1.^{a} §. 236.)

$$dy = dL(x) = \lim. \frac{\Delta y}{\beta} = \frac{dx}{x}.$$

7.° (p. 2.^{a} §. 127. 2.°)

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \frac{\text{sen}(x+i\beta) - \text{sen}x}{\beta} = \frac{2\cos(x+\frac{1}{2}i\beta)\text{sen}\frac{1}{2}i\beta}{\beta};$$

ovvero (p. 2.^{a} §. 163.)

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \cos(x+\tfrac{1}{2}i\beta)[i - \beta^2\left(\frac{i^3}{2^3.3} - \frac{i^5\beta^2}{2^5.3.4.5} + \ldots\right)];$$

e perciò (p. 1.^{a} §. 236.)

$$dy = d\,\text{sen}x = \lim. \frac{\Delta y}{\beta} = \cos x\, dx.$$

8.° (p. 2.^{a} §. 127. 1.°)

$$L(\nu) = 2,3025851\, l(\nu), \quad l(\nu) = 0,4342945\, L(\nu).$$

Cioè per avere il logaritmo iperbolico di un dato numero, se ne moltiplicherà l' ordinario per 2,3025 . . . ; e per averne l' ordinario, se ne moltiplicherà l' iperbolico per 0,4342. . . . Se poi si volesse il numero corrispondente ad un dato logaritmo iperbolico, converrebbe prima ridurlo ad ordinario, e questo cercato nelle tavole, darebbe il richiesto numero.

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \frac{\cos(x + i\beta) - \cos x}{\beta} = - \frac{2\mathrm{sen}(x + \frac{1}{2}i\beta)\mathrm{sen}\frac{1}{2}i\beta}{\beta},$$

ovvero (p. 2.^{a} §. 163.)

$$\frac{\Delta y}{\beta} = - \mathrm{sen}(x + \tfrac{1}{2}i\beta)[i - \beta^2(\frac{i^3}{2^3.3} - \frac{i^5\beta^2}{2^5.3.4.5} = \ldots)],$$

laonde

$$dy = d\cos x = \lim. \frac{\Delta y}{\beta} = - \mathrm{sen}x\, dx.$$

Oltre a ciò:

$$\text{nel } 1.^o \ \frac{dy}{dx} = \pm 1 \ ; \quad \text{nel } 2.^o \ \frac{dy}{dx} = a \ ;$$

$$\text{nel } 3.^o \ \frac{dy}{dx} = - \frac{a}{x^2}; \quad \text{nel } 4.^o \ \frac{dy}{dx} = ax^{a-1} \ ;$$

$$\text{nel } 5.^o \ \frac{dy}{dx} = a^x\mathrm{L}(a) \ ; \quad \text{nel } 6.^o \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \ ;$$

$$\text{nel } 7.^o \ \frac{dy}{dx} = \cos x; \quad \text{nell' } 8.^o \ \frac{dy}{dx} = - \mathrm{sen}x \quad (15).$$

Ciascun vede che $\frac{dy}{dx}$, ovvero lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, è generalmente una nuova funzione della variabile x : e, se venga notata con $f'(x)$, sarà

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad dy = f'(x)\, dx :$$

la funzione $f'(x)$ suole chiamarsi *derivata della primitiva* $f(x)$ (16). Del resto come β, così lim. $\frac{\Delta x}{\beta}$, cioè il differenziale della

---

(15) *Le formole ottenute in questi casi riguardano solamente quei reali valori della* x , *ai quali corrispondono anche valori simili della funzione seguita dalla lettera* d ; *perciò dobbiamo supporre la* x *positiva nelle formole che si riferiscono alla funzione* $\mathrm{L}(x)$, *ed alla* x^a , *quando* a *rappresenti una frazione di denominatore pari, od un numero irrazionale.*

(16) *Avremo per conseguenza le seguenti relazioni*

variabile indipendente x, deve ritenersi per una quantità costante, ed arbitraria.

7.

Abbiasi la *funzione di funzione*

$$z = F[f(x)] = F(y) \ . \ . \ . \ (h).$$

Avendosi

$$\frac{\Delta z}{\beta} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\beta},$$

sarà (§. 6.)

$$dz = \lim. \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim. \frac{\Delta y}{\beta} = F'(y)dy = F'(y)f'(x)dx \quad (17).$$

Così p. e. data la

$$z = L(\text{sen}x),$$

si avranno le

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad df(x) = f'(x)\,dx,$$

dalle quali deduciamo che il differenziale dy si trova completamente determinato, quando abbiasi la forma della $f'(x)$, e il valore della quantità dx. Risulta pure dalle cose precedenti che la derivata $f'(x)$ di una funzione qualunque $f(x)$, è precisamente uguale a $\frac{dy}{dx}$, vale a dire al rapporto fra il differenziale della funzione e quello della variabile; ovvero al coefficiente pel quale fa d' uopo moltiplicare il secondo differenziale, per ottenere il primo: perciò alcune volte si dà il nome di coefficiente differenziale *alla funzione derivata.*

(17) *Dividendo per dx i due membri di questa equazione, avremo*

$$\frac{dz}{dx} = F'(y)f'(x).$$

Dunque la derivata di una funzione di funzione uguaglia il prodotto di due altre, l' una di z presa rapporto ad y, come se questa variabile fosse indipendente, l' altra d' y presa rapporto ad x.

$$y = f(x) = \text{sen}x\,, \quad F(y) = L(y)$$

laonde (§. 6. 6.° 7.°)

$$F'(y) = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen}x},\ f'(x) = \cos x\,,$$

e perciò

$$dz = dL(\text{sen}x) = \frac{\cos x}{\text{sen}x}\,dx = \cot x\,dx.$$

8.

Pongasi

$$f(x) = \varphi(x) + \chi(x) + \ldots;$$

si avrà

$$f(x + i\beta) = \varphi(x + i\beta) + \chi(x + i\beta) + \ldots,$$

donde

$$\frac{\Delta y}{\beta} = \frac{f(x + i\beta) - f(x)}{\beta} = \frac{\varphi(x + i\beta) - \varphi(x)}{\beta} +$$
$$\frac{\chi(x + i\beta) - \chi(x)}{\beta} + \ldots;$$

e passando ai limiti (§. 6.) sarà

$$dy = df(x) = d\varphi(x) + d\chi(x) + \ldots,$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \varphi'(x) + \chi'(x) + \ldots.$$

Cioè il differenziale di una quantità risultante dalla somma di più funzioni, si ottiene differenziando separatamente le funzioni stesse, e riunendo in somma i differenziali che se ne ottengono: lo stesso vale per le funzioni derivate (18). Quindi p. e.

$$d(a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \ldots) =$$
$$(a' + 2a''x + 3a'''x^2 + \ldots)\,dx:$$

---

(18) *Diremo adunque che il differenziale, o la derivata della somma di più funzioni, eguaglia la somma dei differenziali, o delle derivate di esse.*

il termine costante a non si ritrova nel differenziale, e si ottiene lo stesso tanto differenziando

$$a + a'x + a''x^2 + \ldots,$$

quanto

$$a'x + a''x^2 + \ldots \quad (19)$$

9.

Denotando con s, t, u, ... tante funzioni della variabile x, sia

$$z = s\,t\,u \ldots, \text{ e perciò } z^2 = s^2t^2u^2 \ldots;$$

avremo (p. 1.ª §. 207.)

$$L(z^2) = L(s^2) + L(t^2) + L(u^2) + \ldots;$$

tanto essendo le s, t, u, ... > 0, quanto essendo le medesime < 0 (20); e differenziando (§. 7 : 6. 6.°) sarà

$$\frac{d(z^2)}{z^2} = \frac{d(s^2)}{s^2} + \frac{d(t^2)}{t^2} + \frac{d(u^2)}{u^2} + \ldots,$$

ovvero (§. 6. 4.°)

$$\frac{dz}{z} = \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \ldots.$$

Abbiamo poi

$$\frac{dz}{z} = \frac{d(s\,t\,u \ldots)}{s\,t\,u \ldots};$$

dunque

$$d(s\,t\,u \ldots) = s\,t\,u \ldots \left(\frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \ldots\right).$$

---

(19) *Dunque una costante aggiunta ad una funzione non cangia punto il suo differenziale, o la sua derivata; e per conseguenza due funzioni, che non differiscano fra loro per altro, fuorchè per una costante, hanno il medesimo differenziale, e la medesima derivata.*

(20) *Furono innalzati al quadrato i due membri della* $z = s\,t\,u \ldots$, *per evitare i logaritmi immaginari, nel caso in cui si avessero le* s, t, u ... < 0.

Quindi

$$d(st) = tds + sdt,\ d(stu) = tuds + sudt + stdu,\ \text{ecc.} \ldots (21)$$

10.

Abbiasi ora

$$z = \frac{st\ldots}{uv\ldots},\ \text{e quindi}\ z^2 = \frac{s^2t^2\ldots}{u^2v^2\ldots};$$

sarà (p. 1.ª §. 207.)

$$L(z^2) = L(s^2) + L(t^2) + \ldots - (Lu^2) - (Lv^2) - \ldots;$$

e differenziando (§. 7 : 6. 6.º 4.º) avremo

$$\frac{dz}{z} = \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \ldots - \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} - \ldots$$

Perciò

$$d\left(\frac{st\ldots}{uv\ldots}\right) = \frac{st\ldots}{uv\ldots}\left(\frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \ldots - \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} - \ldots\right);$$

quindi

$$d\,\frac{s}{u} = \frac{ds}{u} - \frac{sdu}{u^2} = \frac{uds - sdu}{u^2},\ \text{ecc.} \ldots \quad (22).$$

Così p. e. (§. 6. 7.º 8º. 6º : 7.)

---

(21) *Dividendo per dx i due membri di tali equazioni, potremo concludere che per avere il differenziale, o la derivata di un prodotto di più funzioni della medesima variabile, fa d' uopo sostituire nel prodotto stesso a ciascun fattore, uno alla volta, il suo differenziale, o la sua derivata; e sommare insieme i prodotti così ottenuti.*

(22) *Il differenziale adunque di una frazione uguaglia il denominatore, moltiplicato pel differenziale del denominatore, meno il numeratore moltiplicato pel differenziale del denominatore, divisa questa differenza pel quadrato del denominatore.*

Dal fin quì esposto deduciamo che per ottenere il differenziale di qualunque funzione composta, bisogna differenziare successivamente rapporto ciascuna delle funzioni di cui la composta è formata, considerando le altre come costanti, e sommare le quantità così ottenute.

$$d\tan g x = d\,\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{\cos x\, d\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}x\, d\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x},\quad d\cot x = d\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} = -\,\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x},$$

$$d\sec x = d\,\frac{1}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}x\, dx}{\cos^2 x} = \frac{\tan g x\, dx}{\cos x},$$

$$d\operatorname{cosec}x = d\,\frac{1}{\operatorname{sen}x} = -\,\frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\,\frac{\cot x\, dx}{\operatorname{sen}x},$$

$$d\mathrm{L}(\tan g x) = d\mathrm{L}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right) = \frac{d\,\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}} = \frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x},$$

eccetera.

11.

Abbiamo (§. 6, 7.° 8.° : 10.)

$$dx = \frac{d\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{d\operatorname{sen}x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}},$$

$$dx = -\,\frac{d\cos x}{\operatorname{sen}x} = -\,\frac{d\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}},$$

$$dx = \cos^2 x\, d\tan g x = \frac{d\tan g x}{\sec^2 x} = \frac{d\tan g x}{1+\tan g^2 x},$$

$$dx = -\operatorname{sen}^2 x\, d\cot x = -\,\frac{d\cot x}{\operatorname{cosec}^2 x} = -\,\frac{d\cot x}{1+\cot^2 x},$$

$$dx = \frac{\cos x\, d\sec x}{\tan g x} = \frac{d\sec x}{\sec x\sqrt{\sec^2 x - 1}},$$

$$dx = -\,\frac{\operatorname{sen}x\, d\operatorname{cosec}x}{\cot x} = -\,\frac{d\operatorname{cosec}x}{\operatorname{cosec}x\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}.$$

Queste uguaglianze possono scriversi nel modo seguente

$$d\,\operatorname{arc}(\operatorname{sen} = z) = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},\quad d\,\operatorname{arc}(\cos = z) = -\,\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$d\text{arc}(\text{tang} = z) = \frac{dz}{1+z^2}, \quad d\text{arc}(\cot = z) = -\frac{dz}{1+z^2},$$

$$d\text{arc}(\sec = z) = \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}},$$

$$d\text{arc}(\text{cosec} = z) = -\frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} \qquad (23).$$

---

(23) *Tanto i differenziali, quanto le derivate delle funzioni del cerchio inverse, quali appunto sono gli archi dati pei loro* seni, coseni, *ecc. possono determinarsi ancora mediante lo sviluppo in serie delle funzioni medesime, come si è praticato per le altre funzioni nei casi precedenti. Abbiasi* $z = \text{sen}x$, *avremo, come già è noto,*

$$(1) \ldots x = \text{arc}(\text{sen} = z) = \text{sen}x + \frac{\text{sen}^3 x}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5}\text{sen}^5 x \ldots,$$

ovvero

$$x = \text{arc}(\text{sen} = z) = z + \frac{z^3}{2.3} + \frac{1.3z^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5z^7}{2.4.6.7} + \ldots,$$

e quindi

$$\Delta x = z + i\beta + \frac{1}{2.3}(z+i\beta)^3 + \frac{1.3}{2.4.5}(z+i\beta)^5 + \ldots$$

$$-z - \frac{z^3}{2.3} - \frac{1.3z^5}{2.4.5} - \frac{1.3.5z^7}{2.4.6.7} - \ldots$$

Sviluppando, e riducendo questo secondo membro, avremo

$$\Delta x = i\beta\left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{1.3z^4}{2.4} + \frac{1.3.5z^6}{2.4.6} + \ldots\right) + i^2\beta^2\text{H} ;$$

esprime H *tutto l' insieme dei termini affetti da* $i^2\beta^2$.

Passando ai limiti sarà

$$\lim.\frac{\Delta x}{\beta} = \left(1 + \tfrac{1}{2}z^2 + \frac{1.3}{2.4}z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^6 + \ldots\right)\lim.i$$

$$= \frac{\lim.i}{\sqrt{1-z^2}},$$

12.

Abbiansi pure a differenziare le funzioni

$$z = y^u, \quad z = y^{\frac{1}{u}}, \quad z = y^{u^v}, \ldots$$

---

e perciò

$$\lim. \frac{\Delta x}{\beta} = dx = d\mathrm{arc}(\mathrm{sen} = z) = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Sostituendo $\frac{1}{2}\pi - x$ *in vece della* x, *avremo*

$$z = \mathrm{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos x,$$

quindi

$$x = \mathrm{arc}(\cos = z);$$

e fatta la medesima sostituzione nella (1) *sarà*

$$x = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\cos x + \frac{\cos^3 x}{2.3} + \frac{1.3\cos^5 x}{2.4.5} + \frac{1.3.5\cos^7 x}{2.4.6.7} + \ldots\right),$$

ossia

$$x = \tfrac{1}{2}\pi - \left(z + \frac{z^3}{2.3} + \frac{1.3.z^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5z^7}{2.4.6.7} + \ldots\right).$$

Quindi con un calcolo tutto simile al precedente si troverà

$$\lim. \frac{\Delta x}{\beta} = dx = d\mathrm{arc}(\cos = z) = -\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Si potranno similmente ottenere i differenziali tutti delle altre funzioni

$$\mathrm{arc}(\mathrm{tang} = z), \quad \mathrm{arc}(\mathrm{cotang} = z), \quad ecc\ldots$$

Osserveremo intanto che sommando fra loro i due differenziali trovati, si ha zero; appunto perchè la somma degli archi

$$\mathrm{arc}(\mathrm{sen} = z), \quad \mathrm{arc}(\cos = z),$$

essendo quantità costante, il suo differenziale deve (§. 8.) *esser nullo. Inoltre poichè,* z *essendo il seno di un an-*

1.º

$$\mathrm{L}(z^2) = u\mathrm{L}(y^2)\,,\ \frac{dz}{z} = u\frac{dy}{y} + \mathrm{L}(y)du\,,$$

$$dz = dy^u = y^{u-1}[udy + y\mathrm{L}(y)du].$$

2.º

$$\mathrm{L}(z^2) = \frac{1}{u}\mathrm{L}(y^2)\,,\ \frac{dz}{z} = \frac{u\dfrac{dy}{y} - \mathrm{L}(y)du}{u^2}\,,$$

$$dz = dy^{\frac{1}{u}} = \frac{y^{\frac{1-u}{u}}[udy - y\mathrm{L}(y)du]}{u^2}.$$

3.º

$$\mathrm{L}(z^2) = u^v\mathrm{L}(y^2)\,,\ \frac{dz}{z} = u^v\frac{dy}{y} + \mathrm{L}(y)u^{v-1}[vdu + u\mathrm{L}(u)dv]\,,$$

$$dz = dy^{u^v} = y^{u^v}u^v\left[\frac{dy}{y} + \frac{v\mathrm{L}(y)}{u}du + \mathrm{L}(y)\mathrm{L}(u)dv\right].$$

eccetera.

13.

Come dalla $y = f(x)$ ottenemmo (§. 6.)

$$dy = f'(x)dx\,,$$

così da questa otterremo

$$ddy = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2\,,$$

dalla quale di nuovo

$$dddy = f'''(x)dx\,dx^2 = f''''(x)dx^3\,,$$

---

golo, $\sqrt{1-z^2}$ n'è il coseno, ed essendone z il coseno, $\sqrt{1-z^2}$ n' è il seno, perciò da quanto abbiamo stabilito risulta, che la funzione derivata di un angolo espresso pel suo seno, eguaglia l' unità divisa pel coseno; e che la funzione derivata di un angolo espresso pel suo coseno, eguaglia l' unità divisa pel seno, e presa negativamente.

e così appresso; le f'', f''', ... denotano tante nuove funzioni della variabile indipendente x, il cui differenziale rappresenta una quantità costante ed arbitraria.

Pertanto se invece di

$$ddy\,,\quad dddy\,,\ \ldots\ .$$

scriveremo, ad oggetto di brevità,

$$d^2y\,,\quad d^3y\,,\ \ldots$$

si avranno le

$$dy=f'(x)dx\,,\quad d^2y=f''(x)dx^2\,,\ \ldots\ d^ny=f^{(n)}(x)dx^n\,;$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\,,\ \frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)\,,\ \frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)\,,\ \ldots\ \frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x).$$

I differenziali

$$dy\,,\ d^2y\,,\ d^3y\,,\ \ldots\ d^ny\,,$$

come ancora le funzioni derivate

$$f'(x)\,,\ f''(x)\,,\ f'''(x)\,,\ \ldots\ f^{(n)}(x)\,,$$

diconsi di ordine primo, secondo, terzo, . . , n.^{mo}, rispetto alla funzione primitiva $y=f(x)$. Le stesse $f'(x)$, $f''(x)$, . . . sogliono pure chiamarsi *coefficienti differenziali* (24).

Esempi

I.°

$$y=a^x\,,\quad dy=\mathrm{L}(a)a^xdx\,,\quad d^2y=\mathrm{L}^2(a)a^xdx^2\,,\ \ldots$$

---

(24) *Dall' equazione*

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}\,(x)$$

risulta

$$d^ny=f^{(n)}\,(x)dx^n\,,$$

cioè la derivata dell' ordine n.^{mo} *eguaglia il coefficiente, pel quale deve moltiplicarsi l'*n.^{ma} *potenza della costante arbitraria* dx, *per ottenere il differenziale dell' ordine* n.^{mo}; *e reciprocamente il differenziale dell' ordine* n.^{mo} *eguaglia la derivata dell' ordine stesso, moltiplicata per la potenza* dx^n. *Per questa ragione le derivate dei diversi ordini, furono ancora dette coefficienti differenziali degli ordini medesimi.*

$$d^n y = L^n(a) a^x dx^n.$$

Se fosse data la

$$y = e^x \text{, sarebbe } d^n y = e^x dx^n \ldots \text{ (25)}$$

II.°

$$y = ax^n, \quad dy = nax^{n-1}dx, \quad d^2y = n(n-1)ax^{n-2}dx^2;$$

$$d^3y = n(n-1)(n-2)ax^{n-3}dx^3 \ldots,$$

$$d^n y = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1.adx^n, \quad d^{n+1}y = 0 \text{ (26)}.$$

III.°

$$y = L(x), \; dy = \frac{dx}{x}, \; d^2y = -\frac{1.dx^2}{x^2}, \quad d^3y = \frac{1.2dx^3}{x^3},$$

$$d^4y = -\frac{1.2.3dx^4}{x^4}, \ldots d^n y = \pm \frac{1.2.3.4\ldots(n-1)dx^n}{x^n};$$

vale il segno superiore, o l'inferiore, secondo che sia n impari, o pari.

IV.°

$$y = \text{sen}x, \; dy = \cos x dx = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx,$$

$$d^2y = -\text{sen}x dx^2 = \text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)dx^2,$$

$$d^3y = -\cos x dx^3 = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)dx^3,$$

$$d^4y = \text{sen}x dx^4 = \text{sen}\left(x + \frac{4\pi}{2}\right)dx^4, \ldots.$$

$$d^n y = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)dx^n.$$

V.°

$$y = \cos x, \; dy = -\text{sen}x dx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx,$$

---

(25) *Dunque le derivate successive di e^x sono tutte eguali ad e^x.*

(26) *Perciò la derivata dell'ordine n.*^{mo} *di ax^n, si riduce alla quantità costante* $1.\ 2.\ 3.\ldots(n-1)n.a.$

$$d^2y = -\cos x dx^2 = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)dx^2,$$

$$d^3y - \operatorname{sen} x dx^3 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)dx^3,$$

$$d^4y = \cos x dx^4 = \cos\left(x + \frac{4\pi}{2}\right)dx^n, \ldots$$

$$d^ny = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)dx^n \quad (27).$$

---

(27) *Dalla divisione del numero n per 4, si otterrà uno dei seguenti resti*

$$0, \ 1, \ 2, \ 3;$$

e dovrà il numero stesso ricevere l' una o l' altra delle seguenti forme

$$4m, \quad 4m+1, \quad 4m+2, \quad 4m+3,$$

essendo m un intero qualunque.
Nel primo caso avremo

$$\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x + 2m\pi) = \operatorname{sen} x,$$

nel secondo

$$\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$

nel terzo

$$\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2m\pi + \pi\right) = -\operatorname{sen} x,$$

nel quarto

$$\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

Ragionando similmente sopra

$$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

14.

Dalla (h) (§. 7.) abbiamo pure

$$dz = \mathrm{F}'(y)\,dy\,,$$

similmente che riguardo alla $y = f(x$; e non potendo dy (perchè $= f'(x)\,dx$) riguardarsi come quantità costante, perciò nel calcolare gli altri differenziali della funzione z, dovrà pure aversi riguardo ai differenziali dello stesso dy. Si avrà perciò (§. 9.)

$$d^2z = \mathrm{F}''(y)dy^2 + \mathrm{F}'(y)d^2y\,, \quad d^3z = \mathrm{F}'''(y)dy^3 + 3\mathrm{F}''(y)dy\,d^2y + \mathrm{F}'(y)d^3y\,, \quad d^4z = \mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(y)dy^4 + 6\mathrm{F}'''(y)dy^2d^2y + 4\mathrm{F}''(y)dyd^3y + 3\mathrm{F}''(y)\overline{d^2y}^2 + \mathrm{F}'(y)d^4y\,, \text{ ecc.} \ldots$$

Quindi

$$\mathrm{F}'(y) = \frac{dz}{dy}\,, \quad \mathrm{F}''(y) = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{dy^3} = \frac{1}{dy}\,d\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$\mathrm{F}'''(y) = \frac{dy(dyd^3z - dzd^3y) - 3d^2y(dyd^2z - dzd^2y)}{dy^5} = \frac{1}{dy}\,d\left(\frac{dyd^2z - dzd^2y}{dy^3}\right),$$

---

potremo concludere che le derivate di sen$x$, *e di* cos$x$, *ovvero che le due espressioni*

$$\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

ammettono solo quattro valori distinti, che si riproducono periodicamente, sempre collo stess' ordine. Questi quattro valori, dei quali si ottiene il primo, il secondo, il terzo, ed il quarto, quando il numero intero n, diviso per 4, dia uno dopo l' altro i resti sopra indicati, sono rispettivamente

$$\operatorname{sen}x\,, \quad \cos x\,, \quad -\operatorname{sen}x\,, \quad -\cos x$$

per le derivate del seno, *e*

$$\cos x\,, \quad -\operatorname{sen}x\,, \quad -\cos x\,, \quad \operatorname{sen}x$$

per le derivate del coseno.

$$F^{IV}(y) = dy^3 d^4 z - 6dy^2 d^2 y d^3 z - 4dy^2 d^2 z d^3 y$$

$$+ 15dy\overline{d^2 y}^2 d^2 z + 10dydzd^2yd^3y - \frac{15dzd^2y^3 - dy^2dzd^4y}{dy^7} =$$

$$\frac{1}{dy} d\left(\frac{dy(dyd^3z - dzd^3y) - 3d^2y(dyd^2z - dzd^2y)}{dy^5}\right),$$

eccetera.

15.

Se la variabile y divenisse indipendente, sarebbe

$$d^2y = 0, \quad d^3y = 0, \quad d^4y = 0, \ldots;$$

donde

$$F'(y) = \frac{dz}{dy}, \; F''(y) = \frac{d^2z}{dy^2}, \; F'''(y) = \frac{d^3z}{dy^3}, \; F^{IV}(y) = \frac{d^4z}{dy^4}, \ldots$$

formole del tutto simili a quelle che trovammo (§. 13.) riguardo alla variabile indipendente x. Da ciò poi deduciamo che, se abbiansi le funzioni derivate F', F'', F''', ..., espresse pei differenziali, tanto della funzione primitiva $z = F(y)$, quanto della variabile y, sarà F' la stessa, tanto se y sia posta indipendente, quanto se non lo sia; le altre poi nel primo caso saranno diverse che nel secondo: però da quello si potrà passare a questo sostituendo

$$\frac{dyd^2z - dzd^2y}{dy^3},$$

$$\frac{dy(dyd^3z - dzd^3y) - 3d^2y(dyd^2z - dzd^2y)}{dy^5}, \ldots$$

in luogo di

$$\frac{d^2z}{dy^2}, \; \frac{d^3z}{dy^3}, \ldots$$

16.

Data l' espressione immaginaria variabile $p + q\sqrt{-1}$, se in vece delle quantità reali p, q si pongano i respettivi limiti, diciamo (p. 1.^{a} §. 245.) la nuova espressione immaginaria che ne risulta, essere limite della data. Quindi applicando alla espressione immaginaria

$$s = u + v\sqrt{-1}$$

le nozioni esposte (§. 6.) sui differenziali, e sulle derivate, avremo

$$ds = du + dv\sqrt{-1}\,,\quad d^2s = d^2u + d^2v\sqrt{-1}\,,\ \text{ecc.}\ \ldots$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1}\,,\quad \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}\sqrt{-1}\,,$$

eccetera (28).

Poste le quali cose otterremo (§. 6. 7.° 8.° 6.° 5° : 11 : 7.)

$$d[\cos(x\mathrm{L}(a)) + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(x\mathrm{L}(a))] =$$

$$[\cos(x\mathrm{L}(a)) + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(x\mathrm{L}(a))]\sqrt{-1}\,\mathrm{L}(a)dx\,,$$

$$d[\mathrm{L}(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{-1}\,\mathrm{arc}(\mathrm{tang} = \frac{x}{a})] =$$

---

(28) *Dietro la definizione data sarà*

$$\lim.(p + q\sqrt{-1}) = \lim.p + \sqrt{-1}\,\lim.q\,;$$

perciò fatto

$$u = f(x)\,,\quad v = \varphi(x)\,,$$

avremo (§. 6.)

$$\lim.\frac{\Delta s}{\beta} = \lim.\left(\frac{f(x+i\beta) - f(x)}{\beta} + \frac{\varphi(x+i\beta) - \varphi(x)}{\beta}\sqrt{-1}\right)$$

$$= \lim.\frac{f(x+i\beta) - f(x)}{\beta} + \sqrt{-1}\,\lim.\frac{\varphi(x+i\beta) - \varphi(x)}{\beta}$$

$$= \lim.\frac{\Delta u}{\beta} + \sqrt{-1}\,\lim.\frac{\Delta v}{\beta}\,;$$

dunque

$$ds = du + dv\sqrt{-1}\,,\ \text{ovvero}\ \frac{ds}{dx} = f'(x) + \varphi'(x)\sqrt{-1}\,,$$

Laonde per differenziare una funzione immaginaria, bisogna operare come se la funzione fosse reale, riguardando $\sqrt{-1}$ *qual coefficiente costante; ciò si estende ai differenziali ed alle derivate successive della funzione immaginaria stessa.*

$$\frac{x+a\sqrt{-1}}{x^2+a^2}dx = \frac{x+a\sqrt{-1}}{(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})}dx =$$

$$\frac{dx}{x-a\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}\,dx}{a+x\sqrt{-1}},$$

$$d\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos a + \frac{e^{-x}-e^x}{2}\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a\right) =$$

$$-\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,\mathrm{sen}\,a + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\sqrt{-1}\cos a\right)\sqrt{-1}\,dx,$$

$$d\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,\mathrm{sen}\,a + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\sqrt{-1}\cos a\right) =$$

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos a + \frac{e^{-x}-e^x}{2}\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a\right)\sqrt{-1}\,dx\text{, ecc... ;}$$

perciò (p. 1.^{a} §. 248. g^{IV} ; e p. 2.^{a} §. 162. 1.° 5.° : 168. 1.°)

$$da^{x\sqrt{-1}} = a^{x\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\,\mathrm{L}(a)dx,$$

$$d\mathrm{L}(a+x\sqrt{-1}) = \frac{d(a+x\sqrt{-1})}{a+x\sqrt{-1}},$$

$$d\cos(a+x\sqrt{-1}) = -\mathrm{sen}(a+x\sqrt{-1})d(a+x\sqrt{-1}),$$

$$d\,\mathrm{sen}(a+x\sqrt{-1}) = \cos(a+x\sqrt{-1})d(a+x\sqrt{-1}),\text{ ecc.}$$

del tutto conforme alle reali espressioni che a queste somigliano. Abbiamo inoltre (p. 2.^{a} §. 162. 6.°)

$$d\mathrm{L}(-x) = d[\mathrm{L}(x) \pm (2m+1)\pi\sqrt{-1}] = d\mathrm{L}(x) = \frac{dx}{x};$$

dunque sia la $x >$, sia < 0 , il differenziale del suo logaritmo è sempre lo stesso.

RELAZIONE FRA LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE E LE RISPETTIVE DERIVATE.

17.

Se cresca o decresca x per modo che divenga maggiore o minore di un particolar valore x_n, si cerca se nelle prossimità d' x_n cresca o decresca insieme alla x la funzione $y = f(x)$, che nelle prossimità stesse vien supposta continua.

Poichè (§. 6.)

$$\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x);$$

perciò 1.° se abbiasi $f'(x_n) > 0$, certo saranno del medesimo segno Δy e Δx, quando la x sia vicinissima ad x_n, ed ivi quindi aumentata o diminuita la x, crescerà o diminuirà pure la y: 2.° se abbiasi $f'(x_n) < 0$, saranno di segno contrario Δy e Δx, quando x sia vicinissima ad x_n; ed ivi perciò aumentata x diminuirà y, diminuita x crescerà y (29).

18.

Se le due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, e le $f'(x)$, $\varphi'(x)$ che dalle prime si ottengono, sieno continue fra i limiti x_0, x_n, e quindi se $\varphi(x)$ costantemente cresca o decresca da x_0 ad x_n, esisterà sempre un qualche numero $\varepsilon < 1$, e > 0 soddisfacente all' equazione

---

(29) *Due conseguenze da ciò derivano.* 1.° *Se y rimanga continua fra due limiti dati, facendo crescere insensibilmente la x dal primo al secondo, la y non potrà cessare dal crescere per diminuire o viceversa, salvo che la derivata $f'(x)$ non passi dal positivo al negativo, o viceversa. In questi passaggi $f'(x)$ diverrà nulla, purchè rimanga continua.* 2.° *Se y svanisca per $x = x_0$, rimanendo continua nelle prossimità di questo valore, e se il corrispondente di $f'(x)$ sia positivo e finito, avremo*

$$y > 0, \text{ per } x > x_0; \text{ ed } y < 0, \text{ per } x < x_0:$$

che se il corrispondente di $f'(x)$ sia finito e negativo, avremo

$$y < 0, \text{ per } x > x_0; \text{ ed } y > 0, \text{ per } x < x_0.$$

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{\varphi(x_n)-\varphi(x_0)}=\frac{f'(x_0+\varepsilon(x_n-x_0))}{\varphi'(x_0+\varepsilon(x_n-x_0))} \dots (q).$$

Rappresenti M il massimo, ed m il minimo dei valori che per tutto l' intervallo $x_n - x_0$ può ricevere la frazione $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (30): ciascun vede (p. 1.[a] §. 83.) che le differenze

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-m\,,\quad M-\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

saranno ambedue positive: dunque (§. 17.) le

$$\varphi'(x)\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-m\right),\quad \varphi'(x)\left(M-\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right),$$

ovvero le

$$f'(x)-m\varphi'(x)\,,\quad M\varphi'(x)-f'(x)$$

avranno lo stesso segno da x_0 ad x_n (31). Ma queste quantità non altro sono fuorchè derivate di prim' ordine delle funzioni

$$f(x)-m\varphi(x)\,,\quad M\varphi(x)-f(x)\,;$$

dunque siffatte primitive funzioni cresceranno insieme o decresceranno da x_0 ad x_n; e perciò le

$$f(x_n)-m\varphi(x_n)-(f(x_0)-m\varphi(x_0))\,,$$
$$M\varphi(x_n)-f(x_n)-(M\varphi(x_0)-f(x_0))\,,$$

ovvero le

$$f(x_n)-f(x_0)-m(\varphi(x_n)-\varphi(x_0))\,,$$
$$M(\varphi(x_n)-\varphi(x_0))-(f(x_n)-f(x_0))$$

saranno insieme positive o negative. Quindi poi facilmente s' intende che le due quantità

---

(30) *Gioverà osservare fin da ora che il secondo membro della (q) rappresenterà tutti questi valori, quante volte suppongasi la ε variare fra zero e l' unità.*

(31) *Avendosi per ipotesi che $\varphi(x)$ costantemente cresce, o decresce fra i limiti x_0, x_n, discende* (§. 17.) *che $\varphi'(x)$ fra gli stessi limiti rimarrà costantemente positiva o negativa, cioè non cangerà mai di segno; dal che deriva la conseguenza sopra esposta.*

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{\varphi(x_n) - \varphi(x_0)} - m, \quad \frac{f(x_n) - f(x_0)}{\varphi(x_n) - \varphi(x_0)} - \mathrm{M}$$

debbono essere affette da segno contrario; donde siegue che la frazione

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{\varphi(x_n) - \varphi(x_0)}$$

trovasi fra M ed m. Però i valori tutti che si trovano compresi fra questi limiti, sono rappresentati dal secondo membro della (q), preso ε fra o ed 1; dunque vi sarà qualche numero $\varepsilon < 1$, e > 0, soddisfacente alla stessa (q).

19.

Nell' equazione (q) sostituiscasi x ad x_0, ed $x + \Delta x$ ad x_n: essa diverrà

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)} = \frac{f'(x+\varepsilon.\Delta x)}{\varphi'(x+\varepsilon.\Delta x)} \ldots (q');$$

la qual formola vale quando le $f(x)$, $\varphi(x)$, $f'(x)$, $\varphi'(x)$ sieno continue fra x ed $x + \Delta x$, e $\varphi(x)$ costantemente cresca o decresca da x_0 ad x_n.

20.

Suppongasi che le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ si annullino quando in vece d' x pongasi un qualche valore particolare x_n, sarà (§. 19.)

$$\frac{f(x_n+\Delta x)}{\varphi(x_n+\Delta x)} = \frac{f'(x_n+\varepsilon.\Delta x)}{\varphi'(x_n+\varepsilon.\Delta x)} \ldots (q'').$$

Ora se le

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(m-1)}(x),\ f^{(m)}(x),$$
$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \ldots\ \varphi^{(m-1)}(x),\ \varphi^{(m)}(x)$$

rimangano continue da $x = x_n$ ad $x = x_n + \Delta x$, e tranne le $f^{(m)}(x)$, $\varphi^{(m)}(x)$, le altre svaniscano col fare $x = x_n$, ed inoltre le

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \ldots\ \varphi^{(m-1)}(x)$$

costantemente crescano o decrescano fra gli assegnati limiti x_n, $x_n + \Delta x$, potrà l' equazione (q'') continuarsi a questo modo

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{f(x_n+\Delta x)}{\varphi(x_n+\Delta x)}=\dfrac{f'(x_n+\varepsilon.\Delta x)}{\varphi'(x_n+\varepsilon.\Delta x)}=\\ \dfrac{f''(x_n+\varepsilon_1.\Delta x)}{\varphi''(x_n+\varepsilon_1.\Delta x)}=\ldots=\dfrac{f^{(m)}(x_n+\varepsilon_{m-1}\Delta x)}{\varphi^{(m)}(x_n+\varepsilon_{m-1}\Delta x)}.\end{array}\right\}\ (q''')$$

I numeri

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots\ \varepsilon_{m-1}$$

sono tali, che

$\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$, ed ognuno < 1, e > 0 (32).

Ritenuto pertanto ε a rappresentare genericamente qualunque di questi numeri, ed omesse nella (q''') le intermedie frazioni, sarà

$$\frac{f(x_n+\Delta x)}{\varphi(x_n+\Delta x)}=\frac{f^{(m)}(x_n+\varepsilon.\Delta x)}{\varphi^{(m)}(x_n+\varepsilon.\Delta x)}\ \ldots\ (q^{\text{IV}}).$$

21.

Preso

$$\varphi(x)=(x-x_n)^m,$$

sarà

$$\varphi^{(m)}(x)=1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ m,\quad \varphi(x_n+\Delta x)=\Delta x^m,$$
$$\varphi^{(m)}(x_n+\varepsilon.\Delta x)=1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ m;$$

e perciò la (q^{IV}) si cangerà nella

$$\frac{f(x_n+\Delta x)}{\Delta x^m}=\frac{f^{(m)}(x_n+\varepsilon.\Delta x)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ m}\ \ldots\ (q^{\text{V}})\quad (33).$$

---

(32) *Applicando alle derivate quanto fu detto delle primitive, per ottenerne la (q''), che si estende a tutte le funzioni soddisfacenti alle condizioni enunciate, si otterranno le (q'''); e s' intenderà facilmente quanto concerne i numeri ε, ε_1, ε_2, ...*

(33) *Le condizioni di $\varphi(x)$, volute dalla (q^{IV}), sono tutte soddisfatte col prendere*

$$\varphi(x)=(x-x_n)^m,$$

dalla quale abbiamo le

Ma se insieme alle $f^{(m)}(x)$, $\varphi^{(m)}(x)$ pure $f(x)$ non isvanisca facendo $x = x_n$, si avrebbe

$$\frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n)}{\Delta x^m} = \frac{f^{(m)}(x_n + \varepsilon.\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m};$$

donde

$$f(x_n + \Delta x) - f(x_n) =$$

$$\frac{\Delta x^m}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m} f^{(m)}(x_n + \varepsilon\,.\,\Delta x) \ldots (q^{\text{VI}}) \quad (34).$$

22.

Nella formola (q^{V}) fatto $x_n = 0$, sostituito δ invece di Δx; e adoperata la lettera F in vece della f, nascerà

$$F(\delta) = \frac{\delta^m}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m} F^{(m)}(\varepsilon\delta) \ldots . (q^{\text{VII}}),$$

la quale sussisterà quante volte le funzioni

$$F(\delta),\ F'(\delta),\ F''(\delta),\ \ldots\ F^{(m)}(\delta)$$

$$\varphi'(x) = m(x - x_n)^{m-1},\ \varphi''(x) = m(m-1)(x - x_n)^{m-2}, \ldots ;$$

$$\varphi^{(m-1)}(x) = m(m-2)\ldots 3.2(x - x_n),$$

$$\varphi^{(m)}(x) = 1.2.3\ldots(m-1)m = \varphi^{(m)}(x_n + \varepsilon.\Delta x):$$

queste funzioni rimangono tutte continue fra

$$x = x_n,\ ed\ x = x_n + \Delta x,$$

e tranne l'ultima, le altre si annullano tutte pel valor particolare $x = x_n$. Le condizioni poi, alle quali (§. 20.) deve soddisfare $f(x)$, supponsi nel caso attuale verificate.

(34) *In tal caso è supposto che la funzione primitiva $f(x)$, non si annulli pel valore particolare $x = x_n$, restando le altre condizioni, come furono (§. 20.) stabilite. Quindi per questa nuova circostanza la (q^{IV}) si cangerà, come facilmente si vede, nella*

$$\frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n)}{\varphi(x_n + \Delta x)} = \frac{f^{(m)}(x_n + \varepsilon.\Delta x)}{\varphi^{(m)}(x_n + \varepsilon.\Delta x)},$$

che, dopo le opportune sostituzioni, darà la (q^{VI}).

sieno continue, incominciando da $\delta = 0$, e tranne $F^{(m)}(\delta)$, le altre svaniscano con δ (35).

23.

Si abbia il polinomio

$$f(z+\delta)-f(z)-\frac{\delta}{1}f'(z)-\frac{\delta^2}{1.2}f''(z)-\frac{\delta^3}{1.2.3}f'''(z)-\\ \ldots-\frac{\delta^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(z),$$

da riguardare come una funzione della quantità δ (36): le sue funzioni derivate, che supponiamo col polinomio stesso continue, saranno, com'è chiaro, le seguenti, sino a quella di ordine $m.^{mo}$

$$f'(z+\delta)-f'(z)-\frac{\delta}{1}f''(z)-\frac{\delta^2}{1.2}f'''(z)-\ldots\\ -\frac{\delta^{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)}f^{(m-1)}(z),\quad f''(z+\delta)-$$

---

(35) *Supponendo* $x_n = 0$ *anche nella* (q^{iv}), *e ponendo* δ *in vece di* Δx, *avremo la*

$$\frac{f(\delta)}{\varphi(\delta)}=\frac{f^{(m)}(\varepsilon\delta)}{\varphi^{(m)}(\varepsilon\delta)},$$

la quale racchiude il teorema seguente: se due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, *continue insieme alle derivate loro da* $x = 0$ *ad* $x = \delta$, *svaniscano pel valore particolare* $x_n = 0$ *con le stesse derivate, sino a quelle inclusivamente dell' ordine* $m-1$; *ed inoltre se la seconda funzione con le prime* $m-1$ *sue derivate, costantemente crescano o decrescano fra gli stessi limiti* 0, *e* δ, *il valore del rapporto delle funzioni primitive, sarà uno intermediario del rapporto delle derivate loro* m^{me}. *Del resto la* (q^{vii}) *ne fornisce un principio semplicissimo per isvolgere le funzioni reali di una sola variabile, secondo le potenze ascendenti ed intere di essa, come si dimostra nel seguente paragrafo.*

(36) *Perciò in questo polinomio tanto la* $f(z)$, *quanto le sue derivate, si dovranno riguardare indipendenti dalla* δ, *e quindi si avranno per costanti nel prendere le successive derivate del polinomio stesso.*

$$f'(z)-\frac{\delta}{1}f''(z)-\ldots-\frac{\delta^{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-3)}f^{(m-1)}(z),$$

ecc. . . .

$$f^{(m-1)}(z+\delta)-f^{(m-1)}(z),\quad f^{(m)}(z+\delta).$$

Ora, fatto $\delta=0$, tutte le derivate tranne la $m.^{ma}$, svaniranno insieme alla funzione primitiva; dunque (§. 22: q^{VII}.) sarà

$$f(z+\delta)=f(z)+\frac{\delta}{1}f'(z)+\frac{\delta^2}{1.2}f''(z)+\frac{\delta^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(z)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\delta^{m-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(z)+$$

$$+\frac{\delta^m}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}f^{(m)}(z+\varepsilon\delta)\ldots(q^{\text{VIII}})\quad(37).$$

Mutata poi z in zero, e δ in z, sarà

$$f(z)=f(0)+\frac{z}{1}f'(0)+\frac{z^2}{1.2}f''(0)+\frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(0)+\ldots$$

$$+\frac{z^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(0)+\frac{z^m}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(\varepsilon z)\ldots(q^{\text{IX}})\quad(38).$$

---

(37) *Il polinomio dato per la funzione primitiva di δ, soddisfacendo alle condizioni volute dalla (q^{VII}), potrà sostituirsi al primo membro della medesima: al fattore poi $F^{(m)}(\varepsilon\delta)$ del suo secondo membro, verrà sostituito $f^{(m)}(z+\varepsilon\delta)$; e così nascerà la (q^{VIII}).*

(38) *Il polinomio posto in principio, essendo per ipotesi continuo con le sue derivate fino alla $m.^{ma}$, incominciando da $\delta=0$, ne discende che le*

$$f(z),\ f'(z),\ f''(z),\ \ldots,\ f^{(m)}(z)$$

debbono anch' esse riguardarsi continue, incominciando da $z=0$; e perciò concluderemo che questa condizione si rende necessaria per la (q^{IX}): laonde qualunque $f(z)$ continua con le sue derivate sopra espresse, può essere considerata composta dalla funzione intera

$$f(0)+\frac{z}{1}f'(0)+\frac{z^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{z^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(0),$$

Esempi

I.° Pongasi

$$f(z) = e^z;$$

sarà (§. 13.)

$$f'(z) = e^z, \; f''(z) = e^z, \; \ldots\ldots, \; f^{(m)}(z) = e^z:$$

---

e dal residuo

$$\frac{z^m}{1.2.3\ldots m} f^{(m)}(\varepsilon z).$$

Solo a maggior esercizio degli studiosi daremo quì un' altra dimostrazione della (q^{IX}), *questa essendo una formola di molto interesse nell' analisi. Pongasi* z *nella* (q^{VII}) *in luogo di* δ, *sarà*

$$(1)\ldots \mathrm{F}(z) = \frac{z^m}{1.2.3\ldots m} \mathrm{F}^{(m)}(\varepsilon z),$$

che sussisterà quante volte le

$$\mathrm{F}(z), \; \mathrm{F}'(z), \; \mathrm{F}''(z), \ldots \mathrm{F}^{(m)}(z),$$

sieno continue, incominciando da $z = 0$, *e svaniscano, tranne la* $\mathrm{F}^{(m)}(z)$, *allo svanire di* z. *Inoltre sia* $f(z)$ *una funzione della* z, *che insieme alle sue derivate, sino a quella di ordine* $m.^{mo}$, *rimanga reale, finita, e continua, incominciando da* $z = 0$. *Pongasi ora*

$$\mathrm{F}(z) = f(z) - f(0), \quad ed \quad m = 1,$$

si avrà dalla (1)

$$f(z) - f(0) = z\, f'(\varepsilon z):$$

si faccia inoltre

$$f'(\varepsilon z) = f'(0) + \mathrm{Q}_1,$$

sarà

$$z\mathrm{Q}_1, = f(z) - f(0) - zf'(0).$$

E poichè $z\mathrm{Q}_1$ *evidentemente svanisce con la* z, *insieme alla sua prima derivata* $f'(z) - f'(0)$, *ed essendo* $f''(z)$ *la sua seconda, si avrà dalla* (1), *fatto in essa* $m = 2$, *la*

quindi

$$f(0)=1\,,\ f'(0)=1\,,\ f''(0)=1\,,\ \ldots\ f^{(m)}(\varepsilon z)=e^{\varepsilon z}\,;$$

e perciò

$$e^{z}=1+\frac{z}{1}+\frac{z^{2}}{1.2}+\frac{z^{3}}{1.2.3}+\ldots$$

$$f(z)-f(0)-zf'(0)=\frac{z^{2}}{1.2}f''(\varepsilon z).$$

Pongasi ora

$$f''(\varepsilon z)=f''(0)+Q_{2}\,,$$

sarà

$$\frac{z^{2}}{1.2}Q_{2}=f(z)-f(0)-zf'(0)-\frac{z^{2}}{1.2}f''(0)\,,$$

quindi evidentemente la $\frac{z^{2}}{1\,.\,2}Q_{2}$ *pur essa una funzione di* z, *che svanisce con* z, *insieme alle sue derivate prima e seconda*

$$f'(z)-f'(0)-zf''(0)\,,\quad f''(z)-f''(0)\,,$$

di cui sarà la terza $f'''(z)$; *laonde fatto* $m=3$ *nella* (1) *avremo*

$$f(z)-f(0)-zf'(0)-\frac{z^{2}}{1.2}f''(0)=\frac{z^{3}}{1.2.3}f'''(\varepsilon z).$$

Così procedendo, con osservare che le funzioni

$$\frac{z^{3}}{1.2.3}Q_{3}\,,\quad \frac{z^{4}}{1.2.3.4}Q_{4}\,,\quad ecc.\ldots$$

svaniscono con la z, *non altrimenti che le derivate loro, sino a quelle di terzo, quarto, ...* $(m-1)^{mo}$ *ordine inclusivamente, si avrà da ultimo l' equazione*

$$f(z)-f(0)-\frac{z}{1}f'(0)-\frac{z^{2}}{1.2}f''(0)\ldots-\frac{z^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(0)$$

$$=\frac{z^{m}}{1.2\ldots m}f^{(m)}(\varepsilon z)\,,$$

dalla quale tosto si ottiene la (q^{IX}).

$$\ldots + \frac{z^{m-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)} + \frac{z^m e^{\varepsilon z}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}.$$

II.° Sia

$$f(z) = \mathrm{L}(1+z);$$

sarà (§. 13.)

$$f'(z) = \frac{1}{1+z},\quad f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2},\quad f'''(z) = \frac{1.2}{(1+z)^3},$$

$$f^{\mathrm{IV}}(z) = -\frac{1.2.3}{(1+z)^4},\ \ldots\ f^{(m)}(z) = \pm\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)}{(1+z)^m},$$

onde

$$f(0) = 0,\quad f'(0) = 1,\quad f''(0) = -1,\quad f'''(0) = 1.2,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(0) = -1\,.\,2\,.\,3,\ \ldots,\ f^{(m-1)}(0) = \mp 1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-2),$$

$$f^{(m)}(\varepsilon z) = \pm\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)}{(1+\varepsilon z)^m};$$

e conseguentemente

$$\mathrm{L}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$$

$$\ldots \mp \frac{z^{m-1}}{m-1} \pm \frac{z^m}{m(1+\varepsilon z)^m}:$$

valerà il segno superiore ove sia m impari, l' inferiore ove sia pari.

III.° Si abbia

$$f(z+\delta) = \mathrm{L}(z+\delta);$$

sarà

$$f(z) = \mathrm{L}(z),\quad f'(z) = \frac{1}{z},\quad f''(z) = -\frac{1}{z^2},\quad f'''(z) = \frac{1.2}{z^3},$$

$$f^{\mathrm{IV}}(z) = -\frac{1.2.3}{z^4},\ \ldots,\ f^{(m-1)}(z) = \mp\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-2)}{z^{m-1}},$$

$$f^{(m)}(z+\varepsilon\delta) = \pm\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)}{(z+\varepsilon\delta)^m};$$

e perciò

$$L(z+\delta)=L(z)+\frac{\delta}{z}-\frac{\delta^2}{2z^2}+\frac{\delta^3}{3z^3}-\dots$$

$$\dots\mp\frac{\delta^{m-1}}{(m-1)z^{m-1}}\pm\frac{\delta^m}{m(z+\varepsilon\delta)^m}.$$

24.

Denotando δ_1 un valore particolare della quantità δ, sostituiscasi $\delta-\delta_1$ per δ, e $z+\delta_1$ per z nella (q^{VIII}. §. 23.), si avrà

$$\left.\begin{array}{l} f(z+\delta)=f(z+\delta_1)+\dfrac{\delta-\delta_1}{1}f'(z+\delta_1)+ \\ \dfrac{(\delta-\delta_1)^2}{1.2}f''(z+\delta_1)+\dots+\dfrac{(\delta-\delta_1)^{m-1}}{1.2\dots(m-1)}f^{(m-1)}(z+\delta_1)+ \\ \dfrac{(\delta-\delta_1)^m}{1.2\dots m}f^{(m)}[z+\delta_1+\varepsilon(\delta-\delta_1)]. \end{array}\right\}(q^{\text{X}})$$

Cangiata z in zero, δ in z, e δ_1 in z_1, otterremo

$$\left.\begin{array}{l} f(z)=f(z_1)+\dfrac{z-z_1}{1}f'(z_1)+\dfrac{(z-z_1)^2}{1.2}f''(z_1)+\dots \\ +\dfrac{(z-z_1)^{m-1}}{1.2\dots(m-1)}f^{(m-1)}(z_1)+\dfrac{(z-z_1)^m}{1.2\dots m}f^{(m)}[z_1+\varepsilon(z-z_1)]\ (39). \end{array}\right\}(q^{\text{XI}})$$

---

(39) *In virtù della* (q^{XI}) *potremo considerare la funzione reale* $f(z)$, *sviluppata secondo le potenze ascendenti ed intere della differenza* $z-z_1$, *in cui* z_1 *rappresenta un valore particolare della variabile* z. *La stessa* (q^{XI}) *poi risulta evidentemente composta dalla funzione intera*

$$f(z_1)+\frac{z-z_1}{1}f'(z_1)+\dots+\frac{(z-z_1)^{m-1}}{1.2\dots(m-1)}f^{(m-1)}(z_1),$$

ordinata secondo le potenze ascendenti di $z-z_1$; *e da un resto, rappresentato dal prodotto*

$$\frac{(z-z_1)^m}{1.2\dots m}f^{(m)}[z_1+\varepsilon(z-z_1)].$$

Esempio

Sia

$$f(z) = z^a ;$$

sarà (§. 13.)

$$f'(z) = az^{a-1},\ f''(z) = a(a-1)z^{a-2},\ \ldots,$$

$$f^{(m)}(z) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-m+1)z^{a-m} :$$

e perciò

$$z^a = z_1{}^a + \frac{z-z_1}{1} az_1{}^{a-1} + \frac{(z-z_1)^2}{1.2} a(a-1)z_1{}^{a-2} + \ldots$$

$$+ \frac{(z-z_1)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} a(a-1)\ldots(a-m+2)z_1{}^{a-m+1} +$$

$$+ \frac{(z-z_1)^m}{1.2\ldots m} a(a-1)\ldots(a-m+1)[z_1+\varepsilon(z-z_1)]^{a-m}.$$

25.

Pongasi

$$\left.\begin{aligned} &f(z+\delta)-f(z+\delta_1)-\frac{\delta-\delta_1}{1}f'(z+\delta_1)-\frac{(\delta-\delta_1)^2}{1.2}f''(z+\delta_1) \\ &\quad -\ldots-\frac{(\delta-\delta_1)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(z+\delta_1) = \mathrm{f}(\delta_1), \end{aligned}\right\} (q^{\mathrm{XII}})$$

e si prendano i differenziali rispetto δ_1: si otterrà la

$$\mathrm{f}'(\delta_1) = -\frac{(\delta-\delta_1)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} f^{(m)}(z+\delta_1) \quad (40);$$

donde

$$\mathrm{f}'(\delta_1+\varepsilon'\delta) = -\frac{(\delta-\delta_1-\varepsilon'\delta)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} f^{(m)}(z+\delta_1+\varepsilon'\delta) :$$

---

(40) *Si giunge a questo risultamento, differenziando la* (q^{XII}) *rapporto alla* δ_1, *sopprimendo i termini eguali e di segno contrario, che in questa operazione produconsi, e riguardando per zero il differenziale di quelli, che nell' attuale ipotesi debbono considerarsi costanti.*

esprimendo ε' un qualche numero > 0, e < 1.

Ma (§. 21. q^{VI})

$$\mathrm{f}(\delta_1 + \delta) - \mathrm{f}(\delta_1) = \delta \cdot \mathrm{f}'(\delta_1 + \varepsilon'\delta);$$

dunque

$$\mathrm{f}(\delta_1 + \delta) - \mathrm{f}(\delta_1) = -\frac{\delta(\delta - \delta_1 - \varepsilon'\delta)^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} f^{(m)}(z + \delta_1 + \varepsilon'\delta):$$

e conseguentemente

$$\mathrm{f}(\delta) - \mathrm{f}(0) = -\frac{\delta(\delta - \varepsilon'\delta)^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} f^{(m)}(z + \varepsilon'\delta).$$

Ora poi fatto $\delta_1 = \delta$, abbiamo dalla (q^{XII})

$$\mathrm{f}(\delta) = 0 \quad (41),$$

e fatto $\delta_1 = 0$,

$$\mathrm{f}(0) = f(z + \delta) - f(z) - \frac{\delta}{1} f'(z) - \frac{\delta^2}{1.2} f''(z) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\delta^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} f^{(m-1)}(z);$$

dunque (§. 23. q^{VIII})

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{f}(0) = \frac{\delta^m}{1 \cdot 2 \ldots m} f^{(m)}(z + \varepsilon\delta) = \\ \frac{\delta^m(1 - \varepsilon')^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} f^{(m)}(z + \varepsilon'\delta). \end{aligned}\right\} (q^{\text{XIII}})$$

Cangiata z in zero, e δ in z, si avrà

$$\frac{z^m}{1 \cdot 2 \ldots m} f^{(m)}(\varepsilon z) = \frac{z^m(1 - \varepsilon')^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} f^{(m)}(\varepsilon' z) \ldots (q^{\text{XIV}}).$$

---

(41) *Ponendo zero invece di* $\mathrm{f}(\delta)$ *nell' ultima equazione, avremo il primo valore di*

$$\mathrm{f}(0) = \frac{\delta^m(1 - \varepsilon')^{m-1}}{1.2 \ldots (m-1)} f^{(m)}(z + \varepsilon'\delta),$$

da paragonarsi col secondo, che si deduce appresso.

DETERMINAZIONE DEI VALORI SPETTANTI ALLE FUNZIONI DI UNA SOLA VARIABILE, CHE SI PRESENTANO SOTTO CERTE FORME INDETERMINATE.

26.

Convergendo Δx nel lim. $= 0$, la formola (q^{III} : §. 20) nello stesso limite diviene

$$\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{f'(x_n)}{\varphi'(x_n)} = \frac{f''(x_n)}{\varphi''(x_n)} = \ldots = \frac{f^{(m)}(x_n)}{\varphi^{(m)}(x_n)} \ldots \quad (g)$$

per mezzo della quale si determinano i valori di quelle frazioni, che ricevono la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, quante volte in esse pongasi per x il singolar valore x_n (42).

---

(42) *In forza della* (*g*) *potremo concludere, che se due funzioni reali della stessa variabile* x, *come* $f(x)$, $\varphi(x)$, *svaniscano per un valore particolare* x_n, *insieme alle derivate loro successive, sino a quelle di ordine* m.^{mo} *esclusivamente, prime a non divenir per* x_n *contemporaneamente nulle, il valore della funzione fratta*

$$\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

che si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, *sarà fissato dal rapporto dei valori che ricevono per* x_n, *le due derivate* m.^{me}, *prime a non isvanire insieme. Se una sola di queste due derivate si annullasse, il vero valore della funzione fratta sarebbe* 0, *ovvero* ∞. *Se poi niuna delle derivate medesime fosse zero, il valore di quella frazione sarebbe una quantità finita.*

Perciò dalla stessa (*g*) *risulta la seguente regola: quando si voglia il valore di una frazione* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *che diviene* $= \frac{0}{0}$, *per uno particolar* x_n, *dato alla variabile* x, *bisogna differenziare separatamente i due termini della frazione medesima, e quindi esaminare se le prime loro derivate*

Esempi

I.° Sieno

$$f(x) = L(1 + x)\ ,\quad \varphi(x) = x\ ;$$

le quali, fatto $x = x_n = 0$, danno

$$\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{L(1)}{0} = \frac{0}{0}\ .$$

$$\frac{df(x)}{dx}\ ,\quad \frac{d\varphi(x)}{dx}\ ,$$

ambedue si riducano pure a zero, pel medesimo valore della variabile: se ciò avvenga si prenderanno le seconde derivate

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}\ ,\quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\ ,$$

e si vedrà se nella ipotesi $x = x_n$ *medesima, ciascuna si annulli. Continuando a questo modo, le due derivate che saranno le prime a non essere contemporaneamente zero per* $x = x_n$, *formeranno i termini della frazione che deve assumersi pel cercato valore di* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *nella stessa ipotesi, e che potrà essere nullo, finito, od infinito, come di per se apparisce.*

Non è però da riguardare questa regola come bastevole ad ogni caso; potrebbe in fatto avvenire che il fattore $x - x_n$, *comune tanto a* $f(x)$ *quanto a* $\varphi(x)$, *e pel quale si annullano queste funzioni contemporaneamente, si trovi elevato ad una potenza frazionaria. In questo caso non si potrebbe mai colle successive differenziazioni, ossia col processo dimostrato, spogliare una volta i termini della frazione* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *dal fattore medesimo, perchè i differenziali della funzione* $P(x - x_n)^m$ *sono nulli o infiniti, quando m non è un numero intero. Perciò a dimostrare come togliere anche in tale ipotesi la indeterminazione del valore di* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *pongasi (p. 1.ª §. 145.) per generalità maggiore*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P(x - x_n)^{\alpha} + Q(x - x_n)^{\beta} + R(x - x_n)^{\gamma} + \ldots}{P'(x - x_n)^{\alpha'} + Q'(x - x_n)^{\beta'} + R'(x - x_n)^{\gamma'} + \ldots}\ ,$$

Abbiamo le

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,; \quad \varphi'(x) = 1\,,$$

donde

$$f'(x_n) = 1\,, \quad \varphi'(x_n) = 1\,;$$

---

essendo

$$\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma\,,\ \ldots\,; \qquad \alpha'\,,\ \beta'\,,\ \gamma'\,,\ \ldots$$

due serie, ognuna di numeri positivi e crescenti. Questa espressione riducesi alla forma $\frac{0}{0}$ *per* $x = x_n$*: se in essa pongasi non* x_n*, ma* $x_n + \omega$ *invece della* x*, riservandosi a fare* $\omega = 0$ *dopo seguite le riduzioni, per ottenere il risultamento corrispondente alla immediata sostituzione del valore* x_n *in luogo d'* x*, si avrà*

$$(a)\ldots\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P\omega^{\alpha} + Q\omega^{\beta} + R\omega^{\gamma} + \ldots}{P'\omega^{\alpha'} + Q'\omega^{\beta'} + R'\omega^{\gamma'} + \ldots}\,;$$

e poichè α, α' *sono, in ciascuna delle indicate serie, i più piccoli esponenti, così potranno darsi tre casi, cioè*

$$1.^{\circ}\ \alpha > \alpha'\,; \quad 2.^{\circ}\ \alpha = \alpha'\,; \quad 3.^{\circ}\ \alpha < \alpha'.$$

Nel primo caso, dividendo (a) *per* $\omega^{a'}$*, si avrà la*

$$(b)\ldots\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P\omega^{\alpha-\alpha'} + Q\omega^{\beta-\alpha'} + R\omega^{\gamma-\alpha'} + \ldots}{P' + Q'\omega^{\beta'-\alpha'} + R'\omega^{\gamma'-\alpha'} + \ldots}\,,$$

ove $\alpha - \alpha'$ *essendo positivo, lo saranno* $\beta - \alpha'$, $\gamma - \alpha'$, ... *e così* $\beta' - \alpha'$, $\gamma' - \alpha'$, ... *Ciò posto, e fatto* $\omega = 0$*, si avrà*

$$(1)\ldots\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{P'} = 0\,,$$

per $x = x_n$.

Nel secondo caso il termine $P\omega^{\alpha-\alpha'}$ *della* (b) *riducendosi a* P*, ne discende che fatto in essa* $\omega = 0$*, sarà*

$$(2)\ldots\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P}{P'}\,,$$

e conseguentemente

$$\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{\mathrm{L}(1)}{0} = \frac{0}{0} = 1.$$

II.° Prendasi

$$f(x) = x + (ax - a - 1)\,x^{a+1}, \quad \varphi(x) = (x-1)^2,$$

le quali, fatto $x = x_n = 1$, danno

$$\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{0}{0}:$$

---

per $x = x_n$.

Nel terzo caso finalmente dividasi la (1) *per* ω^{α}, *ne avremo*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{Q}\omega^{\beta-\alpha} + \mathrm{R}\omega^{\gamma-\alpha} + \ldots}{\mathrm{P}'\omega^{\alpha'-\alpha} + \mathrm{Q}'\omega^{\beta'-\alpha} + \mathrm{R}'\omega^{\gamma'-\alpha} + \ldots},$$

da cui, fatto $\omega = 0$, *nascerà*

$$(3) \ldots \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\mathrm{P}}{0} = \infty,$$

per $x = x_n$.

Dunque nel caso in cui non possa il particolar valore dovuto per $x = x_n$ *alla* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *determinarsi mediante la* (g), *si ponga* $x = x_n + \omega$, *si sviluppino* $f(x)$, *e* $\varphi(x)$, *secondo le potenze ascendenti di* ω, *si divida uno sviluppo per l'altro, si riduca, e quindi si faccia* $\omega = 0$; *il nuovo quoziente darà il valore che si cerca. Però è da osservare che questa regola vale anche nel caso in cui può aver luogo l'applicazione della* (g), *ed è molte volte, per maggior semplicità, preferibile.*

Esempio

Abbiasi la frazione

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x^2 - 3ax + 2a^2)^{\frac{2}{3}}}{(x^3 - a^3)^{\frac{1}{2}}}$$

similmente essendo

$$f'(x)=1+(a+1)(ax-a-1)x^a+ax^{a+1},\ \varphi'(x)=2(x-1),$$

sarà pure

$$\frac{f'(x_n)}{\varphi'(x_n)}=\frac{0}{0};$$

ma poichè

$$f''(x)=a(a+1)(ax-a-1)x^{a-1}+2a(a+1)x^a,\ \varphi''(x)=2,$$

perciò

$$\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}=\frac{f'(x_n)}{\varphi'(x_n)}=\frac{0}{0}=\frac{f''(x_n)}{\varphi''(x_n)}=\frac{a(a+1)}{2}.$$

27.

Se abbiasi

$$f(x_n)=\infty,\quad \varphi(x_n)=\infty,$$

cosicchè la frazione si offra sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, avendosi

---

la quale ridursi a $\frac{0}{0}$ *per* $x=x_n=a$. *Se in questa frazione si ponga* $x_n+\omega=a+\omega$ *in luogo della* x, *essa diviene*

$$\frac{(\omega^2-a\omega)^{\frac{2}{3}}}{(3a^2\omega+3a\omega^2+\omega^3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(\omega-a)^{\frac{2}{3}}\omega^{\frac{2}{3}}}{(3a^2+3a\omega+\omega^2)^{\frac{1}{2}}\omega^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(\omega-a)^{\frac{2}{3}}\omega^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}}{(3a^2+3a\omega+\omega^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(\omega-a)^{\frac{2}{3}}\omega^{\frac{1}{6}}}{(3a^2+3a\omega+\omega^2)^{\frac{1}{2}}};$$

e facendo $\omega=0$, *si ottiene*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{0}{(3a^2)^{\frac{1}{2}}}=0.$$

$$\frac{\frac{1}{f(x_n)}}{\frac{1}{\varphi(x_n)}} = \frac{0}{0},$$

ed anche

$$\frac{d\,\frac{1}{f(x)}}{dx} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}, \quad \frac{d\,\frac{1}{\varphi(x)}}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)},$$

perciò sarà (§. 26.)

$$\frac{\frac{1}{f(x_n)}}{\frac{1}{\varphi(x_n)}} = \frac{\frac{f'(x_n)}{f^2(x_n)}}{\frac{\varphi'(x_n)}{\varphi^2(x_n)}}, \quad \text{onde} \quad \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{f'(x_n)}{\varphi'(x_n)}.$$

Se oltre le $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, anche le $f'(x_n)$, $\varphi'(x_n)$ divengano $= \infty$, si dimostrerà nel modo stesso (§. 26.) essere

$$\frac{f'(x_n)}{\varphi'(x_n)} = \frac{f''(x_n)}{\varphi''(x_n)};$$

e così appresso (43). La formola cioè (g : §. 26.) somministra pure i valori delle funzioni che si offrono sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ (44).

Inoltre

---

(43) *Pertanto se le derivate $f'(x)$, $\varphi'(x)$ divengano anch' esse infinite pel valore x_n, e se avvenga lo stesso fino alle derivate di ordine m esclusivamente, si avrà*

$$\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{f'(x_n)}{\varphi'(x_n)} = \frac{f''(x_n)}{\varphi''(x_n)} = \ldots = \frac{f^{(m)}(x_n)}{\varphi^{(m)}(x_n)}.$$

(44) *Perciò il vero valore di un rapporto che si presenta sotto la forma $\frac{\infty}{\infty}$, coincide col valore del rapporto di quelle derivate, che sono le prime a non divenire contemporaneamente infinite per $x = x_n$.*

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}};$$

cioè per la medesima (g) si ottiene il valore del prodotto $f(x_n)\cdot\varphi(x_n)$, quante volte delle due $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, una essendo $=0$, l'altra $=\infty$, lo stesso prodotto $f(x_n)\cdot\varphi(x_n)$ si presenti sotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$ (45).

Esempi

I.° Abbiansi le

$$f(x)=\mathrm{L}\left(\frac{1}{x}\right),\quad \varphi(x)=\cot x;$$

si avrà

$$f'(x)=-\frac{1}{x},\quad \varphi'(x)=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}:$$

e perciò (p. 2.ª §. 129. 2.°) per $x=0$

$$\frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} x=0.$$

II.° Pongasi

$$f(x)=x^c,\quad \varphi(x)=e^x,$$

ed m immediatamente $>c$; si avrà (§. 13.)

$$f^{(m)}(x)=c(c-1)\ldots(c-m+1)x^{c-m},\quad \varphi^{(m)}(x)=e^x:$$

perciò per $x=\infty$ sarà

---

(45) *In fatti l'espressioni*

$$\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}};\quad \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

nel caso attuale si presenteranno, per $x=x_n$, una sotto la forma $\frac{0}{0}$, l'altra sotto la $\frac{\infty}{\infty}$; le quali vengono determinate ambedue dalla (g).

$$\frac{x^c}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{c(c-1)\ldots(c-m+1)}{x^{m-c}e^x} = 0.$$

Quindi fatto $x = \frac{1}{\beta}$, avremo, per $\beta = 0$, la

$$\frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\beta^c} = 0,$$

comunque del resto prendasi grande il numero finito e positivo c: presa cioè β per base, dovrà $e^{-\frac{1}{\beta}}$ riguardarsi (p. 1.ª §. 250.) come una quantità infinitesima di ordine $= \infty$ (46).

III.° Posto

$$f(x) = \mathrm{L}(x), \quad \varphi(x) = x^c,$$

---

(46) *La quantità* $e^{-\frac{\beta}{1}}$ *deve riguardarsi* (p. 1.ª §. 250) *come infinitesima, perchè insieme alla* β *converge nel limite zero. In quanto poi all' ordine della medesima, poichè da quanto si è ora dimostrato abbiamo*

$$\lim. \frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\beta^c} = 0,$$

comunque il numero c sia grande; e poichè dalla definizione (p. 1.ª §. 250.) *dell' ordine di un infinitesimo, discende che l' ordine medesimo, è sempre ad un tempo non minore di qualunque numero che posto in luogo di z renda*

$$\lim. \frac{\mu^{\beta}}{\beta^z} = 0,$$

e non maggiore di qualunque altro, che similmente posto, renda

$$\lim. \frac{\mu^{\beta}}{\beta^z} = \infty,$$

così la quantità infinitesima del II.° *sarà di ordine* $= \infty$.

donde

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{d\frac{1}{\varphi(x)}}{dx} = -\frac{c}{x^{c+1}};$$

sarà, per $x = 0$,

$$L(x) \cdot x^c = -\infty \cdot 0 = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{c}{x^{c+1}}} = -\frac{x^c}{c} = 0;$$

del tutto come nella parte prima (c. §. 241. 3.°).

28.

Abbiamo (p. 1.ª §. 208.)

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \cdot L[f(x)]} \quad (47):$$

quindi se per un particolare valore x_n abbiasi $f(x_n) = 0$ e $\varphi(x_n) = 0$, ovvero $f(x_n) = \infty$ e $\varphi(x_n) = 0$, od anche $f(x_n) = 1$ e $\varphi(x_n) = \infty$, per determinare il valore della funzione che si manifesta sotto la prima, seconda, o terza delle forme indeterminate

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty,$$

basterà determinare (§. 26 : 27.) il valore del rapporto

$$\frac{L[f(x_n)]}{[\varphi(x_n)]^{-1}} \quad (48).$$

---

(47) *In fatti abbiamo* (p. 1.ª §. 208.)

$$L[f(x)]^{\varphi(x)} = \varphi(x) . L[f(x)],$$

donde

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) . L[f(x)]} = e^{\frac{L[f(x)]}{[\varphi(x)]^{-1}}}.$$

(48) *Sostituito* x_n *ad* x, *se abbiasi*

$f(x_n) = 0$, $\varphi(x_n) = 0$, *si avrà* $0^0 = e^{0 \times -\infty};$

Esempi

I.° Sia

$$f(x) = \varphi(x) = x :$$

poichè

$$\frac{d\mathrm{L}(x)}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \text{e} \quad \frac{dx^{-1}}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

---

se abbiasi

$$f(x_n) = \infty, \quad \varphi(x_n) = 0, \text{ si avrà } \infty^0 = e^{0 \times \infty};$$

se finalmente abbiasi

$$f(x_n) = 1, \quad \varphi(x_n) = \infty, \text{ si avrà } 1^\infty = e^{\infty \times 0}:$$

dunque il valore di

$$f[(x)]^{\varphi(x)},$$

quando per x_n *divenga una qualunque delle indeterminate*

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty,$$

dipenderà da quello di

$$\varphi(x) \,.\, \mathrm{L}[f(x)],$$

che per x_n *diviene* $0 \times \pm\infty$, *e che* (§. 27.) *sappiamo definire. In fatti essendo*

$$\varphi(x) \,.\, \mathrm{L}[f(x)] = \frac{\mathrm{L}[f(x)]}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\mathrm{L}[f(x)]}{[\varphi(x)]^{-1}},$$

dal determinare (§. 26.) *il valore di*

$$\frac{\mathrm{L}[f(x)]}{[\varphi(x)]^{-1}},$$

che nei tre casi citati riducesi a $\frac{0}{0}$, *ovvero ad* $\frac{\infty}{\infty}$, *dipenderà la determinazione di*

$$[f(x)]^{\varphi(x)}$$

nei casi medesimi.

perciò (§. 27.), per $x = x_n = 0$, sarà

$$\frac{\mathrm{L}(x)}{x^{-1}} = -x = 0,$$

quindi

$$x^x = 0^0 = e^0 = 1.$$

II.° Poste le

$$f(x) = x\,, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1-x},$$

avendosi

$$\frac{d\mathrm{L}(x)}{dx} = \frac{1}{x}, \quad d\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1} = -1,$$

perciò (§. 26.), per $x = x_n = 1$, si avrà

$$\frac{\mathrm{L}(x)}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1}} = \frac{1}{-1.x} = -1;$$

e conseguentemente

$$x^{\frac{1}{1-x}} = 1^\infty = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad (49),$$

---

(49) *Per un esempio relativo alla indeterminata* ∞^0 *abbiasi*

$$f(x) = x\,, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x};$$

poichè

$$\frac{d\mathrm{L}(x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad e \quad \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}}{dx} = 1,$$

perciò (§. 26.), *per* $x = x_n = \infty$, *sarà*

$$\frac{\mathrm{L}(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}} = \frac{1}{x} = 0,$$

e conseguentemente

29.

Si osservi che se $f(\beta)$ sia una quantità infinitesima, di base $=\beta$, di ordine $=c$, e 1.° se c sia un numero intero, ed anche (p. 1.ª §. 250.) abbiasi

---

$$x^{\frac{1}{x}}=\infty^0=e^0=1.$$

Il metodo seguito (§. 26: 27: 28.) ad assegnare i valori delle funzioni, che per casi particolari assumono le forme indeterminate prese ad esame, ne fa concludere che ognuna delle medesime si determina (§. 26.) col mezzo della (g). Potrebbero però le funzioni di una sola variabile presentare altre forme indeterminate, come le

$$1^{\frac{1}{0}},\quad \sqrt[\infty]{\infty},\quad \infty-\infty,\ ecc.;$$

ma queste facilmente si ridurrebbero tutte alle già contemplate. Non di rado però qualche analitico artificio, come la decomposizione in fattori, conduce più semplicemente a precisare il valore di una indeterminata, ovvero più agevolmente all'applicazione dalla (g) (§. 26.): così, per $x=x_n=a$, *avremo*

$$\frac{\sqrt{3ax-2a^2-x^2}}{\sqrt{x-a}}=\frac{\sqrt{(x-a)(2a-x)}}{\sqrt{x-a}}=\sqrt{2a-x}=\sqrt{a}.$$

Applicando il teorema della (g) (§. 26.) alle funzioni

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2},\quad \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x},$$

che divengono $\frac{0}{0}$ *per* $x=0$; *ed opportunamente decomponendo in fattori, avremo* (p. 2.ª §. 129. 2.°)

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2}=\frac{\operatorname{sen} x}{2x\cos x^2}=\frac{1}{2\cos x^2}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\tfrac{1}{2}\times 1=\tfrac{1}{2},$$

e (p. 2.ª §. 127. 3.°) *sarà*

$$\frac{e^x-e^{x-}-2x}{x-\operatorname{sen} x}=\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=$$

$$\lim. \frac{f(\beta)}{\beta^c} = 0 \quad (50),$$

sarà

$$\frac{f(\beta)}{\beta^{c+1}}$$

il primo termine che nella progressione geometrica

$$f(\beta), \quad \frac{f(\beta)}{\beta}, \quad \frac{f(\beta)}{\beta^2}, \quad \frac{f(\beta)}{\beta^3}, \ldots$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{\text{sen}\ \frac{1}{2}x} \right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{\cos \frac{1}{2}x} \right)^2 = 2.$$

Dal fin quì detto si conclude, che qualunque funzione sotto la forma $\frac{0}{0}$, *ha sempre, generalmente parlando, un valore determinato, sia nullo, sia finito, sia infinito. Però vi sono delle quantità, che riducendosi a* $\frac{0}{0}$, *sono realmente indeterminate. Abbiansi p. e. le*

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c',$$

dalle quali (p. 1.ª §. 128.) *si ottengono i valori*

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

che ricevono ambedue la forma $\frac{0}{0}$, *facendo in essi*

$$a' = am, \quad b' = bm, \quad c' = cm.$$

Questi valori sono in tal caso realmente indeterminati, perchè la seconda delle proposte equazioni, cangiandosi nella

$$max + mby = mc,$$

niente più niente meno significa della prima.

(50) *Potendo* (p. 1.ª §. 250.) *il limite del rapporto* $\frac{f(\beta)}{\beta}$ *esser nullo, finito, od infinito, s'intende* $f(\beta)$ *in questo primo caso scelta per modo, che abbia luogo il primo dei tre citati valori. Per esempio se pongasi*

non isvanisce con β (51): quante volte poi 2.° non abbiasi

$$\lim. \frac{f(\beta)}{\beta^c} = 0 \quad (52),$$

qualunque sia c, espresso per m un intero $= c$, ovvero immediatamente $> c$, sarà

$$\frac{f(\beta)}{\beta^m}$$

il primo dei termini che in quella progressione non isvaniscono con β (53). Ma quei termini equivalgono (§. 22. q^{VII}) rispettivamente agli altri della serie

---

$$f(\beta) = \frac{\beta^c}{\mathrm{L}(\beta)},$$

si avrà un infinitesimo di ordine c, pel quale si verificherà la fatta ipotesi, cioè sarà

$$\lim. \frac{f(\beta)}{\beta^c} = \lim. \frac{\beta^c}{\beta^c \mathrm{L}(\beta)} = \lim. \frac{1}{\mathrm{L}(\beta)} = 0.$$

(51) *I termini di questa progressione geometrica si dovranno tutti annullare con* β, *perchè* (p. 1.^{a} §. 250.) $f(\beta)$ *è un infinitesimo di ordine* $= c$; *per questa medesima ragione* $\frac{f(\beta)}{\beta^{c+1}}$ *non si annullerà con* β, *poichè se ciò accadesse, già* (*vedi nota* 46.) *l' ordine di* $f(\beta)$ *sarebbe, contro l' ipotesi,* $> c$.

(52) *Facendo a cagione di esempio* (p. 1.^{a} §. 250)

$$f(\beta) = \beta^c e^\beta, \quad \textit{ovvero} \quad f(\beta) = \beta^c e^\beta \, \mathrm{L}(\beta),$$

si avranno due infinitesimi di ordine $= c$, *pei quali si verificherà l' ipotesi di questo secondo caso, cioè sarà*

$$\lim. \frac{f(\beta)}{\beta^c} = \lim. \frac{\beta^c e^\beta}{\beta^c} = \lim. e^\beta = 1,$$

$$\lim. \frac{f(\beta)}{\beta^c} = \lim. \frac{\beta^c e^\beta \mathrm{L}(\beta)}{\beta^c} = \lim. e^\beta \, \mathrm{L}(\beta) = -\infty.$$

(53) *Qui si avverta che nel caso di m immediatamente* $> c$, *sebbene si verifichi*

$$f(\beta),\quad f'(\varepsilon\beta),\quad \frac{f''(\varepsilon\beta)}{2},\quad \frac{f'''(\varepsilon\beta)}{2.3},\ \ldots\ (54);$$

dunque $f^{(c+1)}(\beta)$ nel 1.° caso, e $f^{(m)}(\beta)$ nel **2.°**, sarà la prima delle funzioni

$$f(\beta),\quad f'(\beta),\quad f''(\beta),\quad f'''(\beta),\ \ldots$$

che non isvanisce con β.

Quindi poichè rispetto p. e. alla

$$e^{-\frac{1}{\beta}}$$

è (§. 27. II.°) $c = \infty$, così niuno dei termini

$$\lim.\frac{f(\beta)}{\beta^c} = 0\,,$$

tuttavia sarebbe sempre

$$\frac{f(\beta)}{\beta^m}$$

il primo dei termini che in quella progressione non si annullano con β.

(54) *Poichè* $f(\beta)$ *si annulla con* β, *sarà* (§. 22. q^{VII})

$$f(\beta) = \beta f'(\varepsilon\beta),\quad \textit{donde}\quad \frac{f(\beta)}{\beta} = f'(\varepsilon\beta),$$

dunque anche $f'(\beta)$ *si annullerà con* β; *per lo che* (§. 22. q^{VII}) *sarà*

$$f(\beta) = \frac{1}{1.2}\,\beta^2 f''(\varepsilon\beta),\quad \textit{donde}\quad \frac{f(\beta)}{\beta^2} = \tfrac{1}{2}\,f''(\varepsilon\beta),$$

quindi anche $f''(\beta)$ *si annullerà con* β; *perciò* (§. 22. q^{VII}) *sarà*

$$f(\beta) = \frac{1}{2.3}\,\beta^3 f'''(\varepsilon\beta),\quad \textit{donde}\quad \frac{f(\beta)}{\beta^3} = \frac{1}{2.3}\,f'''(\varepsilon\beta):$$

si annullerà pertanto anche $f'''(\beta)$ *con* β; *eccetera.*

$$e^{-\frac{1}{\beta}},\quad \frac{de^{-\frac{1}{\beta}}}{d\beta},\quad \frac{d^2e^{-\frac{1}{\beta}}}{d\beta^2},\quad \frac{d^3e^{-\frac{1}{\beta}}}{d\beta^3},\ \ldots$$

cesserà di esser nullo con β (55).

MASSIMI E MINIMI VALORI DELLA FUNZIONE CONTINUA $f(x)$.

30.

Immaginiamo che la x di alcun poco si aumenti sopra il particolar valore x_n; ovvero si diminuisca sotto al medesimo: se la relativa funzione $f(x)$ continuamente nell' uno e nell' altro caso diminuisca, sarà $f(x_n)$ *massimo* fra i valori appartenenti alla funzione $f(x)$; che se tanto nel primo, quanto nel secondo caso $f(x)$ continuamente cresca, sarà $f(x_n)$ il *minimo* (p. 1.^{a} §. 131. 3.^{o}) fra i valori che riceve $f(x)$. Quindi (§. 17.) subito che

---

(55) *Abbiasi per un esempio del* 2.^{o} *caso, la quantità infinitesima* $\beta^4 e^\beta$: *l' ordine di questa essendo* $=4$, *facilmente si vede, che fra le sue derivate, la quarta contenendo il termine* $1.2.3.4\, e^\beta$, *sarà fra tutte la prima che non si ha nulla con* β. *Dall' esposto in questo paragrafo possiamo conclude, che se* $f(\beta)$ *sia un infinitesimo di ordine* $=c$, *nel sistema di base* $=\beta$, 1.^{o} *essendo* c *un intero, ed inoltre avendosi*

$$\lim.\frac{f(\beta)}{\beta^c}=0,$$

sarà $f^{(c+1)}(\beta)$ *la prima delle funzioni*

$$f(\beta),\quad f'(\beta),\quad f''(\beta),\ \ldots$$

che non si annullerà con β: 2.^{o} *essendo* m *un intero immediatamente* $>c$, *ovvero essendo* $=c$, *e non avendosi*

$$\lim.\frac{f(\beta)}{\beta^c}=0,$$

sarà $f^{(m)}(\beta)$ *la prima di quelle funzioni a non divenir nulla con* β.

la x da $<$ incominci ad essere $> x_n$, ovvero da $>$ incominci ad essere $< x_n$, la derivata $f'(x)$ passerà dalla stato positivo al negativo, e pel contrario dal negativo al positivo, dovendo essere $f(x_n)$ massima o minima fra i vicini valori di $f(x)$ (56). Laonde (p. 1.^{a} §. 131. 1.°) fatto $x = x_n$, svanirà $f'(x)$, se pur essa sia continua come lo è $f(x)$; che se no, diverrà infinita. Ora non altro fa d' uopo a comprendere che i valori d' x_n, ai quali corrisponde un massimo od un minimo $f(x_n)$, debbano trovarsi fra le radici dell' equazioni

$$f'(x) = 0\,, \quad \frac{1}{f'(x)} = 0.$$

Si comprenderà pure facilmente (§. 17.), che la funzione $f(x_n)$ è un massimo, quante volte abbiasi

$f'(x) < 0$ rispetto ad $x > x_n$, e $f'(x) > 0$ rispetto ad $x < x_n$;

è poi un minimo se ottengasi

---

(56) *Da quanto si è detto apparisce che nel caso del massimo, aumentandosi ovvero diminuendosi la x rispetto ad x_n, cioè tosto che la x da $<$ divenga $> x_n$, ovvero da $>$ divenga $< x_n$, subito $f(x)$ cesserà di crescere per diminuire: similmente nel caso del minimo subito $f(x)$ cesserà di diminuire per crescere. Dunque sia che la x cresca, sia che decresca rispetto x_n, sempre nel caso del massimo la $f(x)$ dal crescere diminuirà; e nel caso del minimo dal diminuire crescerà. Ma* (§. 17. 1.°) *crescendo la x con $f(x)$ si ha $f'(x) > 0$, e* (§. 17. 2.°) *crescendo la x col diminuire di $f(x)$ si ha $f'(x) < 0$; ovvero* (§. 17. 2.°) *diminuendo la x col crescere di $f(x)$ si ha $f'(x) < 0$, e* (§. 17. 1.°) *diminuendo la x con $f(x)$ si ha $f'(x) > 0$: tutto ciò riguarda il caso del massimo, e si verifica in esso. Inoltre* (§. 17. 2.°) *crescendo la x col diminuire di $f(x)$ si ha $f'(x) < 0$, e* (§. 17. 1.°) *crescendo la x con $f(x)$ si ha $f'(x) > 0$; ovvero* (§. 17. 1.°) *diminuendo la x con $f(x)$ si ha $f'(x) > 0$, e* (§. 17. 2.°) *diminuendo la x col crescere di $f(x)$, si ha $f'(x) < 0$: tutto ciò riguarda il caso del minimo, e si verifica in esso. Dunque nel caso in cui $f(x_n)$ sia un massimo od un minimo, tosto che la x da $<$ incominci ad essere $> x_n$, ovvero tosto che da $>$ incominci ad essere $< x_n$, subito dall' aversi $f'(x) > 0$ si avrà $f'(x) < 0$, o viceversa.*

$f'(x) > 0$ rispetto ad $x > x_n$, e $f'(x) < 0$ rispetto ad $x < x_n$ (57). Che se $f'(x)$ rimanga costantemente positiva o negativa, per valori della x prossimi ad x_n, certo $f(x_n)$ nè sarà un massimo, nè un minimo.

Esempi

I.° Sia

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 ,$$

sarà

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 ;$$

e l' equazione

$$f'(x) = 0$$

somministra

$$x_n = 0 , \quad x_n = 1 , \quad x_n = 3 .$$

Denotando σ una quantità infinitesima, sia questa positiva sia negativa, sostituiscasi $x_n + \sigma$ ad x nella $f'(x)$: fatto $x_n = 0$, sarà

$$f'(x) = 5\sigma^4 - 20\sigma^3 + 15\sigma^2 ,$$

la quale permanendo (p. 1.ª §. 251 : 252) costantemente positiva nelle vicinanze d' x_n, il primo valore $x_n = 0$ renderà $f(x)$ nè massima nè minima (58); fatto $x_n = 1$, sarà

---

(57) *Abbiamo dalla precedente nota che nel caso del massimo, crescendo la x sopra x_n, lo che importa il simultaneo diminuire di $f(x)$, deve tosto (§. 17. 2.°) aversi $f'(x) < 0$, e che crescendo la x, però sempre mantenendosi al di sotto d' x_n, lo che importa il simultaneo crescere di $f(x)$, deve (§. 17. 1.°) aversi $f'(x) > 0$; da ciò discende chiaramente il criterio sopra stabilito per giudicare sulla esistenza di un massimo. Abbiamo pure dalla stessa nota che nel caso del minimo, crescendo la x sopra x_n, lo che importa il simultaneo crescere di $f(x)$, deve (§. 17. 1.°) aversi $f'(x) > 0$, e che crescendo la x, però mantenendosi sempre al di sotto d' x_n, lo che importa il simultaneo diminuire di $f(x)$, deve (§. 17. 2.°) aversi $f'(x) < 0$; da ciò discende chiaramente il criterio sopra stabilito, per giudicare della esistenza di un minimo.*

(58) *Si vede facilmente che $f'(x)$, come in questo così*

$$f'(x) = (1+\sigma)^2 (5\sigma^2 + 10\sigma),$$

la quale, nelle vicinanze d'x_n, divenendo negativa se σ sia positiva, cioè se $x > x_n$, divenendo poi positiva se σ sia negativa, cioè se $x < x_n$, perciò il secondo valore $x_n = 1$ renderà la funzione $f(x)$ un massimo; fatto da ultimo $x_n = 3$, sarà

$$f'(x) = (3+\sigma)^2 (5\sigma^2 + 10\sigma),$$

la quale nelle vicinanze d'x_n divenendo positiva se $\sigma > 0$, cioè se $x > x_n$, divenendo poi negativa se $\sigma < 0$, cioè se $x < x_n$, perciò il terzo valore $x_n = 3$ renderà la funzione $f(x)$ un minimo.

II.° Sia proposta la funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{L}(x)}{x},$$

donde

$$f'(x) = \frac{1 - \mathrm{L}(x)}{x^2};$$

dalla $f'(x) = 0$ si ottiene $x_n = e$; è poi $\dfrac{1 - \mathrm{L}(e+\sigma)}{(e+\sigma)^2}$ negativa se $\sigma > 0$, positiva se $\sigma < 0$; cioè $f'(x) < 0$ riguardo ad $x > x_n$, $f'(x) > 0$ riguardo ad $x < x_n$: dunque il valore $x_n = e$ rende la funzione $f(x)$ un massimo (59).

---

nei seguenti casi, è sempre ad x_n vicinissima, perchè quanto più σ diminuisce, tanto più si accosta $f'(x)$ ad x_n, cosicchè fatto $\sigma = 0$ si ha $f'(x) = x_n$; e perchè σ è supposta sempre poco differente dallo zero. Distinguendo poi nella $f'(x)$ di questo caso le due quantità infinitesime

$$5\sigma^4 - 20\sigma^3, \quad 15\sigma^2,$$

la prima (p. 1.ª §. 252.) *dell'ordine* 3°, *la seconda* (p. 1.ª §. 250.) *dell'ordine* 2°, *si vede chiaro* (p. 1.ª §. 251.) *che diminuendo sempre più σ, finalmente diverrà, e rimarrà poi sempre in quanto al valor numerico*

$$5\sigma^4 - 20\sigma^3 < 15\sigma^2,$$

sia σ positiva, sia negativa. Da ciò discende che rimanendo la x nelle prossimità d' x_n, ossia di zero, sarà $f'(x)$ costantemente positiva; perciò ecc.

(59) *Abbiasi per III.° esempio*

31.

La formola (q^{VI} : §. 21) ne porge un' altra regola, per conoscere se ad una data radice x_n dell' equazione $f'(x) = 0$, corrisponda un massimo od un minimo nella funzione $f(x_n)$. Imperciocchè il secondo membro di quella formola nelle vicinanze d' x_n, o rimarrà costantemente < 0, ovvero costantemente > 0, comunque Δx si prenda positiva o negativa, o sarà ora $>$, ora < 0, secondo il segno della Δx medesima. Nel caso primo sarà

$$f(x_n) > f(x_n \pm \Delta x) \quad (60),$$

e perciò un massimo; nel secondo sarà

$$f(x_n) < f(x_n \pm \Delta x),$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}},$$

sarà (§. 12. 2.°)

$$f'(x) = x^{\frac{1-2x}{x}} \left(1 - \mathrm{L}(x)\right);$$

e fatto $f'(x) = 0$, *avremo* $x_n = e$. *Facilmente poi s' intende che sostituendo* $x_n + \sigma$ *ad* x *nella* $f'(x)$, *sarà questa negativa, o positiva, secondo che nel fattore*

$$1 - \mathrm{L}(e + \sigma)$$

prendasi $\sigma >$, *ovvero* < 0; *cioè* $f'(x) < 0$, *quando* $x > x_n$; $f'(x) > 0$, *quando* $x < x_n$. *Il valore dunque* $x_n = e$, *rende la* $f(x)$ *un massimo: perciò sarà e il numero di cui la radice di grado eguale al numero stesso è un massimo.*

(60) *Riflettasi che* $f(x_n + \Delta x)$ *nelle vicinanze d'* x_n *avrà lo stesso segno di* $f(x_n)$; *infatti sapendosi che*

$$f(x_n + \Delta x) = f(x_n) + \mathrm{R}.\Delta x,$$

se Δx *sarà piccolissimo, come lo supponiamo, il secondo membro di questa equazione avrà il segno del suo primo termine* $f(x_n)$.

Riflettasi eziandio che fra i valori positivi e negativi di una funzione sarà il minimo, quello il quale avendo il maggior valore numerico abbia il segno negativo.

e perciò un minimo; nel terzo $f(x_n)$ sarà nè **costantemente** maggiore, nè costantemente minore di $f(x_n \pm \Delta x)$, e perciò nè un massimo nè un minimo. Rimarrà poi quel secondo membro costantemente < 0, ovvero costantemente > 0, solo quando l'esponente m della quantità Δx sia pari (61); poichè $f^{(m)}(x_n \pm \varepsilon.\Delta x)$ avrà, nelle vicinanze d' x_n, lo stesso segno di $f^{(m)}(x_n)$ (62). Dunque se delle derivate

$$f''(x_n),\quad f'''(x_n),\quad f^{\mathrm{IV}}(x_n),\ \ldots$$

la prima che non si annulli sia di ordine impari, certamente $f(x_n)$ nè sarà un massimo, nè sarà un minimo; se poi sia di ordine pari, alla derivata $f^{(m)}(x_n) < 0$ corrisponderà un massimo $f(x_n)$, alla derivata $f^{(m)}(x_n) > 0$ corrisponderà un minimo $f(x_n)$ (63).

Così nel 1.° esempio (§. 30.) abbiamo

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x,\quad f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30,$$

ecc. . . .

Ora poi si ottiene

---

(61) *Cioè allora solo il secondo membro della* q^{VI} (§. 21.) *rimarrà costantemente negativo o costantemente positivo, indipendentemente dal segno di* Δx, *quando l' esponente* m *sarà pari.*

(62) *In fatti avendo luogo l' equazione*

$$f^{(m)}(x_n \pm \varepsilon.\Delta x) = f^{(m)}(x_n) \pm \mathrm{R}_{(m)}\Delta x,$$

se Δx *è piccolissimo, come lo supponiamo, cioè standosi nelle vicinanze d'* x_n, *il secondo membro della medesima equazione avrà il segno stesso del suo primo termine; cosicchè si vede chiaro dover essere, nelle vicinanze d'* x_n, *il segno di* $f^{(m)}(x_n \pm \Delta x)$ *coincidente con quello di* $f^{(m)}(x_n)$.

(63) *Potrebbe questa regola esprimersi ancora nel seguente modo: quando un particolar valore* x_n *della* x, *in vicinanza del quale resti continua la funzione* $f(x)$, *faccia svanire le sue derivate sino a quella di ordine* m.*mo* *esclusivamente, il valore corrispondente di* $f(x)$ *nè sarà un massimo, nè minimo, fuorchè nel caso in cui la* m *sia pari, cioè la derivata che per la prima non si annulla sia d'ordine pari. In questo caso la* $f(x_n)$ *sarà un massimo, se il valore di* $f^{(m)}(x_n)$ *sarà negativo, ed un minimo se il valore della* $f^{(m)}(x_n)$ *sarà positivo.*

$$f''(x_n) = 0\,, \text{ e } f'''(x_n) = 30 \text{ per } x_n = 0\,,$$
$$f''(x_n) = -10 < 0 \text{ per } x_n = 1\,,$$
$$f''(x_n) = 90 > 0 \text{ per } x_n = 3:$$

quindi nuovamente, dei valori d'x_n, il primo nè massima nè minima renderà la funzione, il secondo la renderà massima, il terzo minima.

Così pure nel 2.° esempio (§. 30.) otteniamo

$$f''(x) = \frac{2\mathrm{L}(x) - 3}{x^3}\,, \text{ ecc. . . .}$$

onde

$$f''(x_n) = \frac{2\mathrm{L}(e) - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0:$$

cioè il valore $x_n = e$ rende la funzione un massimo (64).

---

(64) *Similmente nel* 3.° *esempio della nota* (59) *si ha* (§. 12. 1.°)

$$f''(x) = [1 - \mathrm{L}(x)]\,[x^{\frac{1-3x}{x}}\,(1 - 2x - \mathrm{L}(x))] - x^{\frac{1-3x}{x}}\,,$$

donde

$$f''(x_n) = -e^{\frac{1-3e}{e}} < 0$$

per $x_n = e$, *dunque per questo valore la* $f(x)$ *diviene un massimo, come già fu trovato.*

Qui osserveremo che oltre i massimi ed i minimi corrispondenti alle radici dell' equazioni (§. 30.)

$$f'(x) = 0\,, \quad \frac{1}{f'(x)} = 0$$

possono avervene degli altri, corrispondenti ai valori della x, *pei quali* $f(x)$ *cessa di essere continua o reale. A ciascuno di questi valori, se ve ne ha, deve corrispondere, uno della funzione stessa, che sarà ordinariamente o un infinito, o un massimo, o un minimo; cosicchè nella ricerca dei massimi e minimi deve generalmente cominciarsi dal determina-*

FORMOLE DI TAYLOR E DI MAC-LAURIN.

32.

Possono le due funzioni

$$f(z+\delta)\,,\quad f(z)$$

considerarsi per modo, che una si formi (§. 23.) della serie

$$f(z)\,,\quad \frac{\delta}{1}f'(z)\,,\quad \frac{\delta^2}{1.2}f''(z)\,,\quad \frac{\delta^3}{1.2.3}f'''(z)\,,\quad \text{ecc.}\ldots(b)\,,$$

---

re i valori della x, pei quali cessa la funzione $f(x)$ di esser continua o reale, e vedere se i valori corrispondenti di questa funzione sorpassano i valori vicini della medesima, o loro sono inferiori. Nel primo caso avremo un massimo, nel secondo un minimo. Così le tre funzioni

$$\sqrt{x}\,,\quad \frac{1}{\mathrm{L}(x)}\,,\quad x\mathrm{L}(x)$$

divengono discontinue, passando dal reale all' immaginario, mentre la variabile x passa dal positivo al negativo; ed ottengono per $x=0$ un valore nullo, che rappresenta un minimo per la prima funzione, un massimo per ciascuna delle altre.

Avendosi (§. 13.)

$$\frac{d^m y}{dx^m}=f^{(m)}(x)\,,$$

e, quando m sia pari, dovendo il segno di $d^m y$ essere sempre uguale a quello di $f^{(m)}(x)$, si potrà nell' applicazione della regola che precede, sostituire i differenziali alle derivate, cosicchè ne verrà il teorema seguente. Per decidere se una radice dell' equazione

$$\frac{dy}{dx}=0$$

produca un massimo o un minimo nella proposta funzione della variabile x

$$y=f(x)\,,$$

e del resto

$$\frac{\delta^m}{1\,.\,2\ldots m}\,f^{(m)}(z+\varepsilon\delta)\ \ldots\ (b')\,;$$

l' altra della serie

$$f(0)\,,\ \frac{z}{1}\,f'(0)\,,\ \frac{z^2}{1.2}\,f''(0)\,,\ \frac{z^3}{1.2.3}\,f'''(0)\,,\ \text{ecc.}\ \ldots\ (b'')\,,$$

e del resto

$$\frac{z^m}{1\,.\,2\ldots m}\,f^{(m)}(\varepsilon z)\ \ldots\ (b''').$$

Ora se crescendo m indefinitamente, i residui (b'), (b''') convergano nel lim. $=0$, certo delle serie (b), (b''), una convergerà nel lim. $=f(z+\delta)$, l'altra nel lim. $=f(z)$: dunque nell'attuale ipotesi valeranno (p. 1.^{a} §. 233.) (65) le due seguenti

$$\left.\begin{aligned} f(z+\delta) &= f(z)+\frac{\delta}{1}\,f'(z)+\frac{\delta^2}{1.2}\,f''(z)+\frac{\delta^3}{1.2.3}\,f'''(z)+\ldots,\\ f(z) &= f(0)+\frac{z}{1}\,f'(0)+\frac{z^2}{1.2}\,f''(0)+\frac{z^3}{1.2.3}\,f'''(0)+\ldots; \end{aligned}\right\}(b^{\text{IV}})$$

la prima delle quali è la *formola di Taylor*, la seconda quella di *Mac-Laurin* (66).

---

basterà ordinariamente calcolare i valori dei differenziali

$$d^2y\,,\quad d^3y\,,\quad d^4y\,,\ \ldots\,.$$

corrispondenti a questa radice. Se il valore di d^2y sia positivo o negativo, il valore della y sarà un minimo nel primo caso, un massimo nel secondo. Se il valore di d^2y sia nullo, dovrà cercarsi fra i differenziali

$$d^3y\,,\quad d^4y\,,\ \ldots\,.$$

il primo che non lo sia. Esprimasi questo per d^my; se m sia un numero impari, sarà (§. 31.) il valore della y nè un massimo, nè un minimo: se al contrario m sia pari, la y sarà un minimo, quante volte il differenziale d^my sia positivo, ed un massimo quante volte sia negativo.

(65) *L' equazione (b') del citato luogo è precisamente ciò che deve in tal caso considerarsi.*

(66) *Infatti quando per valori di z compresi fra certi*

33.

Risulta da quanto si è detto nella p. 1.^{a} §. 236, che se la quantità m cresce indefinitamente, le frazioni

$$\frac{\delta^m}{1\,.\,2\,\ldots\,m}\,,\quad \frac{z^m}{1\,.\,2\,\ldots\,m}$$

indefinitamente si accosteranno al lim. $=0$, qualunque sieno i valori finiti δ, z (67). Per la qual cosa i resti (b'), (b''')

---

limiti, decrescano indefinitamente i due resti

$$\frac{\delta^m}{1\,.\,2\ldots m}\,f^{(m)}(z+\varepsilon\delta)\,,\quad \frac{z^m}{1\,.\,2\ldots m}\,f^{(m)}(\varepsilon z)\,,$$

crescendo sempre più m, allora fatto $m=\infty$ nelle (q^{VIII}), (q^{IX}) (§. 23.), si avranno le (b^{IV}), la prima delle quali dà lo sviluppo in serie di $f(z+\delta)$ secondo le potenze di δ, l' altra quello di $f(z)$ secondo le potenze di z.

(67) *Poichè*

$$\text{lim.}\left[\frac{\delta^{m+1}}{1\,.\,2\ldots m(m+1)}:\frac{\delta^m}{1\,.\,2\ldots m}\right]=\text{lim.}\frac{\delta}{m+1}=0<1\,,$$

perciò la serie che ha per termine l' una o l' altra delle indicate due frazioni, sarà convergente (p. 1.^{a} §. 236.) ; *ed ogni suo termine si troverà fra due corrispondenti di due serie geometriche, anch' esse convergenti; laonde ambedue quelle frazioni si annulleranno per $m=\infty$, qualunque sieno le quantità δ, z.*

Per giungere a questa conseguenza potrebbe anche ragionarsi così: si è dimostrato (p. 1.^{a} §. 236.) *che la serie del I.° esempio è sempre convergente; ma la convergenza delle serie importa che il termine loro generale svanisca per un valore infinito del suo indice; dunque le due frazioni sopra espresse, ognuna delle quali può riguardarsi pel termine generale di una serie simile a quella, e perciò convergente, si annulleranno per $m=\infty$, qualunque sieno le quantità finite δ, z.*

Può dimostrarsi direttamente questo medesimo, riflettendo che il prodotto

$$(k)\ldots\,.\,n(m-n+1)\,,$$

il quale ammette un massimo

convergeranno nel lim. $= 0$, quante volte le funzioni

$$f^{(m)}(z + \varepsilon\delta)\,, \quad f^{(m)}(\varepsilon z)$$

$$\left(\frac{m+1}{2}\right)^2,$$

corrispondente ad

$$n = \frac{m+1}{2}\,,$$

aumenta

$$da\ n = 1\ \ sino\ ad\ \ n = \frac{m+1}{2}\,,$$

e diminuisce

$$da\ \ n = \frac{m+1}{2}\ \ sino\ ad\ \ n = m\,,$$

come viene posto in chiaro dal secondo membro della

$$n(m - n + 1) = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+1}{2} - n\right)^2.$$

Perciò considerando n, m per numeri interi, e sostituendo ad n in (k), uno alla volta i valori

$$1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots\,,\ m - 1\,,\ \ m\,,$$

avremo le seguenti m quantità

$$1.m\,,\ 2(m-1)\,,\ 3(m-2)\,,\ \ldots\,,\ (m-2)3\,,\ (m-1)2\,,\ m.1\,,$$

di cui quelle che dagli estremi equidistano si uguagliano fra loro. Riflettendo poi sulla forma delle quantità medesime, ognuno vedrà che tanto nel caso di m pari, quanto in quello di m impari, sempre il prodotto loro sarà espresso da

$$[1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(m-1)m]^2\,;$$

e poichè la quantità m deve riguardarsi la minore fra esse, così avremo

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)m > m^{\frac{m}{2}}\,,$$

sieno tali da non aumentare indefinitamente con m (68): sebbene poi queste funzioni, aumentato m all'indefinito, aumentino sopra qualunque dato limite, tuttavia può darsi (§. 27. II.°) che quei resti sieno pure infinitesimi (69).

34.

Nel primo esempio (§. 23.) abbiamo

$$f^{(m)}(\varepsilon z) = e^{\varepsilon z};$$

cioè $f^{(m)}(\varepsilon z)$, comunque cresca m, rimarrà sempre finita; perciò lim. $(b''') = 0$, e sarà

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \dots$$

per qualunque valore finito di z (70).

---

ossia

$$\frac{\delta^m}{1.2\dots m} < \left(\frac{\delta}{\sqrt{m}}\right)^m:$$

ma quest' ultima espressione svanisce per $m = \infty$, *dunque altrettanto dovrà essere per le*

$$\frac{\delta^m}{1.2\dots m},\quad \frac{z^m}{1.2\dots m}.$$

(68) *Cioè sieno tali che mentre la* m *aumenta indefinitamente, sempre conservino esse un valore finito.*

(69) *Vale a dire può darsi che quelle funzioni, quantunque divengano infinite col numero* m, *tuttavia i resti* (b'), (b''') *abbiano per limite lo zero: ciò avverrà quando la forma indeterminata* $0 \times \infty = \frac{\infty}{\infty}$, *dovuta in tali casi ai resti medesimi, riducasi (§. 27. II.°) a zero. Pertanto se quei resti convergano in un limite nullo, potremo valerci delle serie di Taylor e di Mac-Laurin a rappresentare lo sviluppo delle funzioni*

$$f(z+\delta),\quad f(z).$$

(70) *Prendendo successivamente per* $f(z)$ *le altre due funzioni*

$$\text{sen}z,\quad \cos z,$$

Nel secondo esempio (§. 23.) abbiamo

$$f^{(m)}(\varepsilon z) = \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}{(1+\varepsilon z)^m};$$

e poichè, aumentato m indefinitamente, cresce all' infinito (p. 1.^{a} §. 236.) il valore della quantità

$$\pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}{(1+\varepsilon z)^m} \quad (71),$$

---

si troveranno per $f^{(m)}(\varepsilon z)$ *i seguenti valori*

$$\operatorname{sen}\left(\varepsilon z + \frac{m\pi}{2}\right), \quad \cos\left(\varepsilon z + \frac{m\pi}{2}\right),$$

che mantengonsi finiti, qualunque sia z, *mentre la* m *aumenta oltre ogni limite. Dunque si potrà concludere che il teorema di Mac-Laurin è sempre applicabile alle funzioni*

$$e^z, \quad \cos z, \quad \operatorname{sen} z.$$

(71) *Essendo*

$$\lim. \left[\frac{1.2.3 \ldots m}{(1+\varepsilon z)^{m+1}} : \frac{1.2.3 \ldots (m-1)}{(1+\varepsilon z)^m}\right] = \lim. \frac{m}{1+\varepsilon z} = \infty > 1,$$

sarà divergente (p. 1.^{a} §. 236.) *la serie che ha per termine generale*

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}{(1+\varepsilon z)^m},$$

ed ogni suo termine si troverà fra due corrispondenti di due serie geometriche, divergenti anch' esse, i termini delle quali cresceranno sopra ogni dato limite: dunque il valor numerico di $f^{(m)}(\varepsilon z)$, *per* $m = \infty$, *sarà infinitamente grande.*

Si giunge direttamente a questa conseguenza riflettendo che, per $m > 3$, *si verifica la seguente diseguaglianza*

$$[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)]^2 > (m-1)^{m-1},$$

da cui si avrà

$$\frac{1.2.3 \ldots (m-1)}{(1+\varepsilon z)^m} > \frac{(m-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(1+\varepsilon z)^m} = \frac{1}{1+\varepsilon z}\left(\frac{\sqrt{m-1}}{1+\varepsilon z}\right)^{m-1};$$

perciò dovremo dire altrettanto di $f^{(m)}(\varepsilon z)$: ma poichè (§. 25: q^{XIV}) abbiamo

$$(b''') = \pm \frac{z^m(1-\varepsilon')^{m-1}}{(1+\varepsilon' z)^m} = \pm \frac{1}{1-\varepsilon'}\left(\frac{z-\varepsilon' z}{1+\varepsilon' z}\right)^m \quad (72),$$

certo, da $z > -1$ a $z = 1$, sarà lim. $(b''') = 0$; e conseguentemente fra questi limiti avremo

$$L(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$$

Rivadasi la p. 1.^{a}, §. 241 : §. 242.

35.

Pongasi 1.°

$$f(z+\delta) = a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 + a_4\delta^4 + \ldots;$$

prese le derivate rapporto δ, si avranno le

$$f'(z+\delta) = a_1 + 2a_2\delta + 3a_3\delta^2 + 4a_4\delta^3 + \ldots,$$

$$f''(z+\delta) = 2a_2 + 2.3a_3\delta + 3.4a_4\delta^2 + \ldots,$$

$$f'''(z+\delta) = 2.3a_3 + 2.3.4a_4\delta + \ldots,$$

ecc. . . ;

e, fatto $\delta = 0$, sarà

$$a_0 = f(z),\quad a_1 = f'(z),\quad a_2 = \tfrac{1}{2}f''(z),\quad a_3 = \frac{1}{2\,.\,3}f'''(z),$$

ecc. . . .

Pongasi 2.°

---

ma quest' ultima espressione cresce indefinitamente con m; dunque indefinitamente con m crescerà pure il valor numerico di $f^{(m)}(\varepsilon z)$.

(72) *Abbiamo*

$$f^{(m)}(\varepsilon' z) = \pm \frac{1\,.\,2\ldots(m-1)}{(1+\varepsilon' z)^m},$$

perciò, sostituendo nella (q^{XIV}) (§. 25.), *avremo*

$$(b''') = \frac{z^m}{1\,.\,2\ldots m} f^{(m)}(\varepsilon z) = \pm \frac{z^m(1-\varepsilon')^{m-1}}{(1+\varepsilon' z)^m} = ecc.$$

$$f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \ldots;$$

nasceranno le

$$f'(z) = b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + 4b_4 z^3 + \ldots,$$

$$f''(z) = 2b_2 + 2.3b_3 z + 3.4b_4 z^2 + \ldots,$$

$$f'''(z) = 2.3b_3 + 2.3.4b_4 z + \ldots,$$

ecc. . . ;

e, fatto $z = 0$, sarà

$$b_0 = f(0), \quad b_1 = f'(0), \quad b_2 = \tfrac{1}{2}f''(0), \quad b_3 = \frac{1}{2.3} f'''(0),$$

ecc. . .

Quindi se $f(z+\delta)$ sia la somma di qualche serie convergente, *ordinata per le potenze ascendenti della quantità* δ, e $f(z)$ sia la somma di qualche serie convergente ordinata per le potenze ascendenti della quantità z, certo di queste serie, una coinciderà con la (b), l' altra con la (b'') (73).

36.

Avendosi la funzione $e^{-\frac{1}{z}}$, svaniscono (§. 29.) i termini tutti corrispondenti della serie (b'') (74). Quindi se pongasi

---

(73) *Dunque in altri termini la funzione* $f(z+\delta)$, *o* $f(z)$, *non può rappresentare la somma di una serie convergente, ordinata secondo le potenze ascendenti ed intere di* δ, *o di* z, *salvo che questa serie non coincida con quella di Taylor, o di Mac-Laurin.*

(74) *Nella proposta funzione supponesi finito e positivo il valore di* z: *i termini poi corrispondenti della serie* (b'') *di Mac-Laurin svaniscono, perchè le funzioni*

$$f(0), \quad f'(0), \quad f''(0), \ldots,$$

che sono i coefficienti dei termini stessi, di per loro annullansi (§. 29.). Dunque in tal caso la serie di Mac-Laurin applicata allo sviluppo della funzione proposta, si annulla non annullandosi la funzione stessa, tranne il caso di $z = 0$. *Dicasi altrettanto se pongasi*

$$f(z) = e^z + e^{-\frac{1}{z}},$$

la corrispondente serie (b'') sarà certo convergente (p. 1.ª §. 236), ma la sua somma consisterà solo nel primo termine e^z, e non in tutto il binomio

$$e^z + e^{-\frac{1}{z}} \quad (75);$$

cioè può darsi che la formola di Mac-Laurin somministri lo sviluppo di una funzione mediante una serie convergente, senza che la somma di questa ricada nella funzione medesima (76).

$$f(z) = e^{-\left(\frac{1}{z}\right)^2};$$

nel qual caso però il valore finito di z può essere tanto positivo, quanto negativo. Perciò non è da credere che se i termini della serie di Mac-Laurin si annullano, debba sempre annullarsi pure la corrispondente funzione.

(75) *S' intenderà facilmente come lo sviluppo della funzione proposta, nella quale supponesi finita e positiva la z, ottenuto mediante la serie di Mac-Laurin, sia convergente, dal riflettere che* (§. 34.) *dallo sviluppo medesimo abbiamo* (p. 1.ª §. 236.)

$$\lim. \left[\frac{z^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} : \frac{z^n}{1 \cdot 2 \ldots n}\right] = \lim. \frac{z}{n+1} = 0 < 1.$$

(76) *Se pongasi*

$$f(z) = e^{-z^2} + e^{-\left(\frac{1}{z}\right)^2},$$

si avrà un' altro esempio per giungere alla medesima conseguenza; nel quale però la z potrà essere tanto positiva, quanto negativa, senza poter esser nulla. Dunque non è da credere che applicando allo sviluppo in serie di una funzione la formola di Mac-Laurin, ed ottenendosi una serie convergente, debba questa sempre avere per somma la funzione stessa.

DIFFERENZIAZIONI DELLE FUNZIONI DI PIU' VARIABILI.

37.

Sia

$$\mu = f(x, y, z, \ldots)$$

una funzione di più variabili indipendenti x, y, z, ... Ora di queste, o una, o due, o più, o tutte ricevano i loro incrementi Δx, Δy, Δz, ... In quest' ultimo caso dicesi

$$\Delta\mu = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

differenza *totale* della funzione μ; negli altri casi le differenze diconsi *parziali*. Se per esempio cresca, o la sola x, o la sola y, si avranno le

$$f(x + \Delta x, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),$$

$$f(x, y + \Delta y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

differenze parziali della funzione μ, la prima rispetto ad x, la seconda rispetto ad y; le quali differenze vengono ancora espresse con

$$\Delta_x\mu, \ \Delta_y\mu, \ \ldots$$

38.

Se la funzione μ sia continua (§. 5.) riguardo a ciascuna delle x, y, z, ..., lo sarà eziandio riguardo a tutte: poichè prese le Δx, Δy, Δz, ... infinitesime, saranno le quantità

$$f(x + \Delta x, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z, \ldots) - f(x + \Delta x, y, z, \ldots),$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots) - f(x + \Delta x, y + \Delta y, z, \ldots),$$

ecc. ...

per ipotesi convergenti ognuna nel limite $= 0$, la prima con Δx, la seconda con Δy, la terza con Δz, ...; dunque nel medesimo limite $= 0$ convergerà la loro somma

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots) - f(x, y, z \ldots),$$

ovvero $\Delta\mu$ con tutte le Δx, Δy, Δz, ...; perciò ecc. ...

39.

Pongasi (§. 6.)

$$\Delta x = i\beta,\ \Delta y = i'\beta,\ \Delta z = i''\beta,\ \ldots,$$

donde

$$\lim.\ \frac{\Delta x}{\beta} = \lim.i,\ \lim.\ \frac{\Delta y}{\beta} = \lim.i',\ \lim.\ \frac{\Delta z}{\beta} = \lim.i'',\ \ldots:$$

e facciasi che la funzione μ sia continua (§. 38.) fra certi limiti assegnati alle variabili x, y, z, ...; sebbene $\Delta\mu$ fra quei limiti converga nello zero, pure il rapporto

$$\frac{\Delta\mu}{\beta}$$

potrà convergere in un'altro limite, sia $>$, sia < 0: i limiti dei rapporti

$$\frac{\Delta x}{\beta},\ \frac{\Delta y}{\beta},\ \frac{\Delta z}{\beta},\ \ldots$$

diconsi differenziali delle variabili indipendenti x, y, z, ...; il limite poi del rapporto

$$\frac{\Delta\mu}{\beta}$$

dicesi differenzial totale di prim' ordine della funzione μ; e sono indicati questi differenziali con dx, dy, dz, ..., $d\mu$, tal che possiamo scrivere

$$dx = \lim.\ \frac{\Delta x}{\beta} = \lim.i,\quad dy = \lim.\ \frac{\Delta y}{\beta} = \lim.i',$$

$$dz = \lim.\ \frac{\Delta z}{\beta} = \lim.i'',\ \ldots,\ d\mu = \lim.\ \frac{\Delta\mu}{\beta}.$$

40.

Se una qualunque delle x, y, z, ... si riguardi qual variabile, considerando le altre quali costanti, potranno i differenziali della funzione μ determinarsi, com' è chiaro, nella stessa guisa che i differenziali delle funzioni di una sola variabile. Siffatti differenziali diconsi parziali, e vengono indicati per modo, che

$$d_x\mu,\ d^2{}_x\mu,\ \ldots,\ d_y\mu,\ d^2{}_y\mu,\ \ldots$$

esprimano i differenziali di primo, secondo, ecc. . . . ordine della funzione μ, presi rispetto x, rispetto y, ecc. . . .

41.

In quanto alle funzioni derivate, queste potranno talmente rappresentarsi, che le

$$\frac{d_x\mu}{dx}, \quad \frac{d^2{}_x\mu}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d_y\mu}{dy}, \quad \frac{d^2{}_y\mu}{dy^2}, \ldots$$

ovvero le

$$f'_x(x, y, z, \ldots), \quad f''_x(x, y, z, \ldots), \ldots$$

$$f'_y(x, y, z, \ldots), \quad f''_y(x, y, z, \ldots), \ldots$$

rappresentino le funzioni di primo, secondo, ecc. . . ordine, derivate dalla

$$\mu = f(x, y, z, \ldots)$$

rispetto ad x, rispetto ad y, ecc. . . . Sovente però nell' esprimere queste funzioni derivate, sopprimiamo per brevità le x, y, z, . . . , presso la d, ed invece delle

$$\frac{d_x\mu}{dx}, \quad \frac{d^2{}_x\mu}{dx^2}, \ldots, \frac{d_y\mu}{dy}, \quad \frac{d^2{}_y\mu}{dy^2}, \ldots$$

ondoperiamo le

$$\frac{d\mu}{dx}, \quad \frac{d^2\mu}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d\mu}{dy}, \quad \frac{d^2\mu}{d^2y}, \ldots$$

Quindi poi sarà

$$d_x\mu = \frac{d_x\mu}{dx}\,dx = f'_x(x, y, z, \ldots)\,dx = \frac{d\mu}{dx}\,dx,$$

$$d^2{}_x\mu = \frac{d^2{}_x\mu}{dx^2}\,dx^2 = f''_x(x, y, z, \ldots)\,dx^2 = \frac{d^2\mu}{dx^2}\,dx^2,$$

ecc. . . .

$$d_y\mu = \frac{d_y\mu}{dy}\,dy = f'_y(x, y, z, \ldots)\,dy = \frac{d\mu}{dy}\,dy,$$

$$d^2{}_y\mu = \frac{d^2{}_y\mu}{dy^2}\,dy^2 = f''_y(x, y, z, \ldots)\,dy^2 = \frac{d^2\mu}{dy^2}\,dy^2,$$

ecc. . . .

42.

Può ancora la funzione μ essere differenziata successivamente rispetto due, tre, ... variabili; per esempio rispetto x, y; rispetto x, y, z; ecc. ... Questa specie di differenziali parziali di secondo, terzo, ecc. .. ordine, vengono espressi con

$$d_y d_x \mu\,,\quad d_z d_y d_x \mu\,,\ \ldots$$

43.

Sia che la funzione μ venga differenziata p. e. prima rapporto ad x, poi rapporto ad y; sia prima rapporto ad y, poi rapporto ad x, si otterrà nell' uno e nell' altro caso lo stesso differenziale. In fatti prendendo (§. 37.) le differenze della funzione μ, prima rispetto x, y, poi rispetto y, x, tosto apparirà essere

$$\frac{\Delta_y\left(\frac{\Delta_x\mu}{\beta}\right)}{\beta}=\frac{\Delta_x\left(\frac{\Delta_y\mu}{\beta}\right)}{\beta};$$

laonde venendo ai limiti avremo

$$d_y d_x \mu = d_x d_y \mu.$$

Similmente si avrà

$$d_y d_z \mu = d_z d_y \mu\,,\quad d_x d_z \mu = d_z d_x \mu\,,\ \ldots \quad (77).$$

---

(77) *Dimostrato questo teorema per le derivate parziali di second' ordine* (§. 42.), *avremo che nella espressione* $d_x d_y d_z \ldots \mu$, *è sempre permesso cangiare fra loro le variabili alle quali si rapportano due differenziazioni consecutive. Ora è chiaro che mediante uno o più cangiamenti di questa specie, si potrà in tutte le maniere possibili variare l' ordine delle differenziazioni. Così per esempio se vogliasi ottenere il differenziale* $d_z d_y d_x \mu$ *dall' altro* $d_x d_y d_z \mu$, *basterà prima condurre, mediante due cangiamenti consecutivi, la lettera* x *al posto della* z, *quindi permutare le lettere* y, z, *per collocare la* y *al secondo posto. Si può dunque affermare che il valore di un differenziale della forma* $d_x d_y d_z \ldots \mu$, *ha un valore indipendente dall' ordine secondo il quale sono effettuate le differenziazioni relative alle sue diverse variabili. Questa proposizione sussiste anche nel caso in cui più differenziazioni si riferiscano ad una delle variabili,*

Quindi manifestamente si otterranno le

$$d_x d_y d_z \ldots \mu = d_x d_z d_y \ldots \mu = d_z d_x d_y \ldots \mu =$$
$$d_z d_y d_x \ldots \mu = \ldots,$$

$$d^2{}_x d_y d_z \ldots \mu = d_x d_y d_x d_z \ldots \mu = d_y d^2{}_x d_z \ldots \mu = \ldots,$$
$$d^2{}_x d^3{}_y d_z \ldots \mu = d_y d^2{}_x d^2{}_y d_z \ldots \mu =$$
$$d_y d_x d^2{}_y d_x d_z \ldots \mu = d^3{}_y d^2{}_x d_z \ldots \mu = \ldots,$$

ecc. . . .

Da ciò concludesi generalmente che questi differenziali si ottengono sempre gli stessi, qualunque in fine sia l'ordine col quale si eseguiscano le successive differenziazioni rapporto alle variabili x, y, z, ...

44.

Poichè i differenziali tutti dx, dy, dz, . . . delle variabili indipendenti x, y, z, . . . sono (§. 6 : 39.) quantità costanti ed arbitrarie, ne segue (§. 13 : 40.) che

$$d^2{}_x d_y d_z \mu,\ d^3{}_x d^2{}_y \mu,\ d^4{}_y d^3{}_z \mu, \ldots$$

non altro sono fuorchè nuove funzioni delle stesse x, y, z, . . ., rispettivamente moltiplicate per

$$dx^2 dy dz,\ dx^3 dy^2,\ dy^4 dz^3, \ldots;$$

cosicchè avremo generalmente

$$d^m{}_x d^n{}_y d^h{}_z \ldots \mu = \varphi(x, y, z, \ldots) dx^m dy^n dz^h \ldots;$$

donde la funzione derivata *parziale dell' ordine*

$$= m + n + h + \ldots,$$

sarà

---

come nei differenziali $d_x d_y d_x \mu$, $d_x d_y d_x d_x \mu$, *ecc. Rappresentando poi con* r *il numero delle variabili rispetto alle quali devesi la funzione* μ *differenziare successivamente, sarà*

$$r(r-1)(r-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

il numero dei modi tutti (p. 1.^{a} §. 111. I.°) *coi quali potranno effettuarsi tali successive differenziazioni ; e da ognuno di questi diversi modi si otterrà sempre lo stesso risultamento.*

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = \frac{d^m{}_x d^n{}_y d^h{}_z \ldots \mu}{dx^m dy^n dz^h},$$

e tolte anche quì (§. 41.) alla d, per brevità, le x, y, z, ..., otterremo

$$\varphi(x, y, z, \ldots.) = \frac{d^{m+n+h+} \ldots \mu}{dx^m dy^n dz^h \ldots}.$$

45.

Il differenziale totale $d\mu$ della funzione μ si ottiene dai differenziali parziali

$$d_x\mu, \quad d_y\mu, \quad d_z\mu, \ldots.$$

Esprimano infatti

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$$

dei valori numerici > 0, e < 1; si avranno (§. 21. q^{VI}: 41.) le

$$f(x+\Delta x, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) =$$
$$\Delta x f'_x(x+\varepsilon_1\Delta x, y, z, \ldots),$$
$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z, \ldots) - f(x+\Delta x, y, z, \ldots) =$$
$$\Delta y f'_y(x+\Delta x, y+\varepsilon_2\Delta y, z, \ldots),$$
$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z, \ldots) =$$
$$\Delta z f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\varepsilon_3\Delta z, \ldots),$$

ecc. ...

la somma delle quali sarà

$$\Delta\mu = \Delta x f'_x(x+\varepsilon_1\Delta x, y, z, \ldots) + \Delta y f'_y(x+\Delta x, y+\varepsilon_2\Delta y,$$
$$z, \ldots) + \Delta z f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\varepsilon_3\Delta z, \ldots) + \ldots (h).$$

Quindi (§. 39.)

$$\frac{\Delta\mu}{\beta} = i f'_x(x+\varepsilon_1 i\beta, y, z, \ldots) + i' f'_y(x+i\beta, y+\varepsilon_2 i'\beta,$$
$$z, \ldots) + i'' f'_z(x+i\beta, y+i'\beta, z+\varepsilon_3 i''\beta, \ldots) + \ldots;$$

e passando ai limiti

$$d\mu = df(x, y, z, \ldots) = f'_x(x, y, z, \ldots) dx +$$
$$f'_y(x, y, z, \ldots) dy + f'_z(x, y, z, \ldots) dz + \ldots (k);$$

lo che potrà esprimersi ancora ne' seguenti tre modi (§. 41.)

$$\left.\begin{aligned} d\mu &= d_x\mu + d_y\mu + d\,\mu + \ldots, \\ d\mu &= \frac{d_x\mu}{dx}dx + \frac{d_y\mu}{dy}dy + \frac{d_z\mu}{dz}dz + \ldots, \\ d\mu &= \frac{d\mu}{dx}dx + \frac{d\mu}{dy}dy + \frac{d\mu}{dz}dz + \ldots \end{aligned}\right\} (h').$$

Cioè il differenziale totale della funzione μ di più variabili x, y, z, ... indipendenti, si otterrà sommando i differenziali parziali $d_x\mu$, $d_y\mu$, $d_z\mu$, ... (78).

Esempi.

I.° Sia

$$\mu = \frac{x^3 - x\mathrm{L}(y)}{\operatorname{sen} z};$$

nasceranno le

$$d_x\mu = \frac{3x^2 - \mathrm{L}(y)}{\operatorname{sen} z}dx, \quad d_y\mu = -\frac{x}{y \operatorname{sen} z}dy,$$

$$d_z\mu = -\frac{x^3 - x\mathrm{L}(y)}{\operatorname{sen}^2 z}\cos z dz;$$

donde

$$d\mu = \frac{3x^2 - \mathrm{L}(y)}{\operatorname{sen} z}dx - \frac{x}{y \operatorname{sen} z}dy - \frac{x^3 - x\mathrm{L}(y)}{\operatorname{sen}^2 z}\cos z dz.$$

II.° Abbiasi

$$\mu = (z - \sqrt{y})^x;$$

---

(78) *Quindi si ricava questa regola per differenziare le funzioni di più variabili: si prenda successivamente il differenziale della funzione rapporto a ciascuna sua variabile, supposte le altre tutte costanti, e la somma di questi parziali differenziali darà il cercato differenziale totale della proposta funzione. La stessa regola può usarsi anche per differenziare le funzioni di una sola variabile, quando sieno molto complicate: si prendano in tal caso i differenziali di ciascuna parte della funzione, supposte le altre tutte costanti, e la somma di questi parziali differenziali sarà il differenziale totale della funzione.*

saranno le

$$d_x\mu = (z - \sqrt{y})^x L(z - \sqrt{y})dx\,,\ d_y\mu = -\frac{x(z-\sqrt{y})^{x-1}}{2\sqrt{y}}dy\,,$$

$$d_z\mu = x(z - \sqrt{y})^{x-1}dz\,;$$

e perciò

$$d\mu = L(z - \sqrt{y})(z - \sqrt{y})^x dx -$$

$$\frac{x}{2\sqrt{y}}(z - \sqrt{y})^{x-1}dy + x(z - \sqrt{y})^{x-1}dz.$$

46.

I differenziali totali di secondo, terzo, ... ordine, cioè $dd\mu$, $ddd\mu$, ..., ovvero $d^2\mu$, $d^3\mu$, ..., si determinano facilmente. Così p. e. (§. 45. h')

$$d^2\mu = dd\mu = d(d_x\mu + d_y\mu + d_z\mu + \ldots) =$$

$$d_x(d_x\mu + d_y\mu + d_z\mu + \ldots) + d_y(d_x\mu + d_y\mu + d_z\mu + \ldots) +$$

$$d_z(d_x\mu + d_y\mu + d_z\mu + \ldots) + \ldots\,;$$

laonde (§. 43.)

$$d^2\mu = d^2{}_x\mu + d^2{}_y\mu + d^2{}_z\mu + \ldots + 2d_xd_y\mu + 2d_xd_z\mu + \ldots$$

$$+ 2d_yd_z\mu + \ldots\,;$$

ovvero (§. 41 : 44.)

$$d^2\mu = \frac{d^2\mu}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2\mu}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2\mu}{dz^2}dz^2 + \ldots$$

$$+ 2\frac{d^2\mu}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2\mu}{dxdz}dxdz + \ldots + 2\frac{d^2\mu}{dydz}dydz + \ldots$$

Di nuovo

$$d^3\mu = dd^2\mu = d(d^2{}_x\mu + d^2{}_y\mu + d^2{}_z\mu + \ldots$$

$$+ 2d_xd_y\mu + 2d_xd_z\mu + \ldots + 2d_yd_z\mu + \ldots)\,;$$

e perciò (§. 45 : 43.)

$$d^3\mu = d^3{}_x\mu + d^3{}_y\mu + d^3{}_z\mu + \ldots$$

$$+ 3d_xd^2{}_y\mu + 3d_xd^2{}_z\mu + \ldots + 3d_yd^2{}_x\mu +$$

$$3d_yd^2{}_z\mu + \ldots + 3d_zd^2{}_x\mu + 3d_zd^2{}_y\mu + \ldots$$

$$+ 6d_xd_yd_z\mu + \ldots,$$

ovvero (§. 41 : 44.)

$$d^3\mu = \frac{d^3\mu}{dx^3}dx^3 + \frac{d^3\mu}{dy^3}dy^3 + \frac{d^3\mu}{dz^3}dz^3 + \ldots$$

$$+ 3\frac{d^3\mu}{dxdy^2}dxdy^2 + 3\frac{d^3\mu}{dxdz^2}dxdz^2 + \ldots$$

$$+ 3\frac{d^3\mu}{dydx^2}dydx^2 + 3\frac{d^3\mu}{dydz^2}dydz^2 + \ldots$$

$$+ 3\frac{d^3\mu}{dzdx^2}dzdx^2 + 3\frac{d^3\mu}{dzdy^2}dzdy^2 + \ldots$$

$$+ 6\frac{d^3\mu}{dxdydz}dxdydz + \ldots.$$

Nella stessa guisa deduconsi $d^4\mu$, $d^5\mu$, ecc. . . . (79).

---

(79) *L' esempio seguente servirà per esercizio degli studiosi. Abbiasi*

$$\mu = f(x, y, z),$$

sarà (§. 45.) (h')

$$d\mu = \frac{d\mu}{dx}dx + \frac{d\mu}{dy}dy + \frac{d\mu}{dz}dz,$$

e per avere il valore di $d^2\mu$, farà d' uopo riunire i differenziali del secondo membro di questa equazione, presi rapporto a ciascuna delle variabili che contiene, riguardando dx, dy, dz per costanti, dovendosi come tali queste riguardare (§. 6.), *per essere le x, y, z indipendenti. Perciò differenziando rapporto alla x avremo*

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2\mu}{dy\,dx}dy\,dx + \frac{d^2\mu}{dz\,dx}dz\,dx,$$

rapporto alla y avremo

$$\frac{d^2\mu}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2\mu}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2\mu}{dz\,dy}dz\,dy,$$

e rapporto alla z si avrà

$$\frac{d^2\mu}{dx\,dz}dx\,dz + \frac{d^2\mu}{dy\,dz}dy\,dz + \frac{d^2\mu}{dz^2}dz^2.$$

47.

Riflettendo sulle regole stabilite per differenziare, apparisce che si otterranno gli stessi valori per

$$d\mu\,,\quad d^2\mu\,,\quad d^3\mu\,,\quad \text{ecc.}\ldots$$

tanto differenziando la funzione μ, riguardate le x, y, z, ... come indipendenti, quanto differenziando

$$f(x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ldots)$$

in guisa che ognuna delle quantità

$$x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ldots$$

abbiasi per un monomio; allora incontrandosi con

$$d(x+\theta dx)\,,\ d(y+\theta dy)\,,\ d(z+\theta dz)\,,\ldots$$

ed eseguiscansi queste differenziazioni rispetto alla sola θ, e dividansi per $d\theta$ i differenziali che se ne otterranno; ciò fatto, pongasi da ultimo per tutto $\theta = 0$. Ma questo peculiar modo equivale a prendere per variabile solo θ, inoltre, posto

$$f(x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ldots)=\varphi(\theta)\ldots(h'')\,,$$

Sommando questi risultamenti si avrà (§. 46.) il differenziale totale di second' ordine

$$d^2\mu=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\mu}{dx^2}dx^2+\dfrac{d^2\mu}{dy^2}dy^2+\dfrac{d^2\mu}{dz^2}dz^2+\\[2ex] \dfrac{2d^2\mu}{dx\,dy}dx\,dy+\dfrac{2d^2\mu}{dx\,dz}dx\,dz+\dfrac{2d^2\mu}{dy\,dz}dy\,dz.\end{array}\right.$$

Se μ fosse una funzione delle sole due variabili x, y, si avrebbe

$$d^2\mu=\frac{d^2\mu}{dx^2}dx^2+\frac{d^2\mu}{dy^2}dy^2+\frac{2d^2\mu}{dx\,dy}dx\,dy\,,$$

e continuando a differenziare con lo stesso metodo le medesime equazioni, si troverebbero i differenziali totali di terzo, quarto, ... ordine della funzione μ. Sarà facile intanto rimarcare l' analogia che passa fra i termini de' successivi differenziali totali di una funzione, e le potenze di un binomio, trimonio, ecc. ..., secondo che la funzione stessa risulti di due, di tre, o di un maggior numero di variabili.

ed ottenute le funzioni derivate

$$\varphi'(\theta)\,,\quad \varphi''(\theta)\,,\quad \varphi'''(\theta)\,,\ \ldots,$$

a fare da ultimo per tutto $\theta = 0$; posta dunque l' equazione (h''), e conseguentemente

$$\left.\begin{array}{l} \mu = f(x\,,\ y\,,\ z\,,\ \ldots) = \varphi(0)\,, \\ \text{si avranno eziandio le} \\ d\mu = \varphi'(0)\,,\ d^2\mu = \varphi''(0)\,,\ d^3\mu = \varphi'''(0)\,,\ \ldots \ (80). \end{array}\right\}(h''')$$

---

(80) *Sarà facile comprendere il ragionamento di questo paragrafo dal seguente suo sviluppo. Abbiasi al solito*

$$\mu = f(x\,,\ y\,,\ z\,,\ \ldots\ldots)\,,$$

saranno (§. 41.)

$$f'_x(x,\,y,\,z,\,\ldots)\,,\ f'_y(x,\,y,\,z,\,\ldots)\,,\ f'_z(x,\,y,\,z,\,\ldots)\,,\ ecc.\ldots$$

le sue derivate parziali di prim' ordine, relative alla x, *alla* y, *alla* z, *ecc....; e per conseguenza*

$$f'_{(x+\theta dx)}\Big(x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ldots\Big)\,,$$

$$f'_{(y+\theta dy)}\Big(x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ldots\Big)\,,$$

$$f'_{(z+\theta dz)}\Big(x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ldots\Big)\,,$$

ecc. . . .

le derivate parziali di prim' ordine della

$$f(x+\theta dx\,,\quad y+\theta dy\,,\quad z+\theta dz\,,\ \ldots) = \varphi(\theta)\ \ldots\ (h'')\,,$$

relative ad $x+\theta dx$, *ad* $y+\theta dy$, *a* $z+\theta dz$, *ecc. riguardate queste ognuna qual monomio: perciò differenziando i due membri dell'* (h'') *rapporto alla sola variabile* θ, *dovranno le differenziazioni*

$$d(x+\theta dx)\,,\quad d(y+\theta dy)\,,\quad d(z+\theta dz)\,,\ \ldots$$

eseguirsi rispetto alla sola θ; *poscia dividendo tutte per* $d\theta$ *si avrà* (§. 45. (k))

$$\varphi'(\theta) = f'_{(x+\theta dx)}\Big(x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ldots\Big)dx +$$

48.

Si consideri ora la funzione

$$U = F(u\,,\ v\,,\ s\,,\ \ldots)$$

formata da più altre u, v, s, ... funzioni delle indipendenti x, y, z, ... In quella guisa che ottenemmo l' equazione (h) (§. 45.), così otterremo la

---

$$f'_{(y+\theta dy)}\big(x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ldots\big)dy +$$

$$f'_{(z+\theta dz)}\big(x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ldots\big)dz +$$

ecc. . . . . (r).

Se in questa equazione pongasi $\theta = 0$, *si otterrà la*

$$\varphi'(0) = f'_x(x\,,\ y\,,\ z\,,\ldots)dx + f'_y(x\,,\ y\,,\ z\,,\ldots)dy +$$

$$f'_z(x\,,\ y\,,\ z\,,\ldots)dz + \text{ecc.} = d\mu\,,$$

la quale coincide con la (k) (§. 45.). *Inoltre dal paragone della* (h'') *con la* (r) *si vede, che differenziando rapporto a* θ *una funzione delle quantità variabili*

$$(1) \ldots x+\theta dx\,,\ y+\theta dy\,,\ z+\theta dz\,,\ \ldots,$$

si ottiene per derivata un' altra funzione di queste medesime quantità, combinate in modo certo con le costanti dx, dy, dz, ... *Continuando le differenziazioni rapporto la stessa variabile* θ, *si dovranno produrre nuove funzioni della medesima specie, per cui possiamo a buon diritto concludere, che le quantità* (1) *sono le sole variabili contenute tanto nelle* $\varphi(\theta)$, $\varphi'(\theta)$, *quanto nelle*

$$\varphi''(\theta),\ \ \varphi'''(\theta),\ \ldots\ \varphi^{(n)}(\theta)\ ;$$

indicando n qualunque numero intero. Perciò le differenze

$$\varphi(\theta)-\varphi(0)\,,\ \varphi'(\theta)-\varphi'(0)\,,\ \varphi''(\theta)-\varphi''(0)\,,\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(\theta)-\varphi^{(n)}(0)\,,$$

uguaglieranno appunto gl'incrementi che ricevono le funzioni

$$\varphi(0) = \mu\,,\ \ \varphi'(0)\,,\ \ \varphi''(0)\,,\ \ldots.,\ \varphi^{(n)}(0)\,,$$

quando alle variabili loro indipendenti x, y, z, ..., *si attribuiscono gl' incrementi infinitesimi*

$$F(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ s+\Delta s,\ \ldots)-F(u,\ v,\ s,\ \ldots)=$$
$$\Delta U=\Delta u F'_u(u+\varepsilon_1\Delta u,\ v,\ s,\ \ldots)+\Delta v F'_v(u+\Delta u,$$
$$v+\varepsilon_2\Delta v,\ s,\ \ldots)+\Delta s F'_s(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ s+\varepsilon_3\Delta s,\ \ldots)+\ldots;$$

$$\Delta x=\theta dx,\ \Delta y=\theta dy,\ \Delta z=\theta dz,\ \ldots\ldots$$

Ciò posto, se facciasi convergere θ verso il limite zero, avremo (§. 6.) le seguenti uguaglianze

$$\lim.\frac{\varphi(\theta)-\varphi(0)}{\theta}=\lim.\frac{\Delta\varphi(0)}{\theta}=\lim.\frac{\Delta\mu}{\theta}=d\mu=\varphi'(0),$$

$$\lim.\frac{\varphi'(\theta)-\varphi'(0)}{\theta}=\lim.\frac{\Delta\varphi'(0)}{\theta}=\lim.\frac{\Delta d\mu}{\theta}=$$
$$dd\mu=d^2\mu=\varphi''(0),$$

$$\lim.\frac{\varphi''(\theta)-\varphi''(0)}{\theta}=\lim.\frac{\Delta\varphi''(0)}{\theta}=\lim.\frac{\Delta d^2\mu}{\theta}=$$
$$dd^2\mu=d^3\mu=\varphi'''(0),$$

ecc. ....

$$\lim.\frac{\varphi^{(n-1)}(\theta)-\varphi^{(n-1)}(0)}{\theta}=\lim.\frac{\Delta\varphi^{(n-1)}(0)}{\theta}=\lim.\frac{\Delta d^{n-1}\mu}{\theta}=$$
$$dd^{n-1}\mu=d^n\mu=\varphi^{(n)}(0).$$

Perciò si avranno le

$$\varphi'(0)=d\mu,\ \varphi''(0)=d^2\mu,\ \varphi'''(0)=d^3\mu,\ \ldots,$$
$$\varphi^{(n)}(0)=d^n\mu;$$

dunque per ottenere i valori $d\mu$, $d^2\mu$, $d^3\mu$, ..., $d^n\mu$, tanto è differenziare la funzione μ riguardo le x, y, z, ..., considerate indipendenti, quanto differenziare la (h'') secondo l'indicato metodo; laonde i differenziali totali della funzione μ, si avranno dai valori particolari che ricevono le funzioni derivate

$$\varphi'(\theta),\ \varphi''(\theta),\ \varphi'''(\theta),\ \ldots\ \varphi^{(n)}(\theta),$$

nel caso in cui la variabile θ svanisca, lo che rende più semplice la ricerca dei differenziali medesimi delle funzioni di più variabili indipendenti, questa riducendosi alla differenziazione di una sola variabile sempre la stessa.

poi diviso per β, e passato ai limiti, si avrà (§. 39.) il differenzial totale della funzione U così espresso

$$dU = F'_u(u, v, s, \ldots)du + F'_v(u, v, s, \ldots)\,dv + F'_s(u, v, s, \ldots)\,ds + \ldots,$$

che ancora potrà esprimersi nei tre seguenti modi (§. 41.)

$$\left.\begin{aligned} dU &= d_uU + d_vU + d_sU + \ldots, \\ dU &= \frac{d_uU}{du}du + \frac{d_vU}{dv}dv + \frac{d_sU}{ds}ds + \ldots, \\ dU &= \frac{dU}{du}du + \frac{dU}{dv}dv + \frac{dU}{ds}ds + \ldots. \end{aligned}\right\} (h^{\text{IV}})$$

I differenziali

$$du,\ dv,\ ds, \ldots$$

vengono determinati dalla (h') (§. 45.)

Esempi.

I.° Sia

$$U = u + v + s + \ldots;$$

sarà

$$d_uU = du,\ d_vU = dv,\ d_sU = ds, \ldots;$$

e perciò

$$dU = du + dv + ds + \ldots;$$

II.° Sia

$$U = uvs \ldots;$$

sarà

$$d_uU = vs \ldots du,\ d_vU = us \ldots dv,\ d_sU = uv \ldots ds, \ldots;$$

laonde

$$dU = vs \ldots du + us \ldots dv + uv \ldots ds + \ldots$$

III.° Abbiasi

$$U = \frac{u}{v};$$

sarà

$$d_uU = \frac{du}{v},\quad d_vU = -\frac{udv}{v^2};$$

quindi

$$dU = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

IV.° Posto

$$U = u^v;$$

sarà

$$d_u U = vu^{v-1}du, \quad d_v U = L(u)u^v dv;$$

e per conseguenza

$$dU = vu^{v-1}du + L(u)u^v dv.$$

Dunque le regole già date (§. 8 : 9 ...) per differenziare le funzioni di una sola variabile, valgono ancora per le funzioni di più variabili indipendenti.

49.

In quanto ai differenziali della funzione U di ordini più elevati, cioè d^2U, d^3U, ... abbiamo p. e.

$$d^2U = ddU = d\left(\frac{dU}{du}du + \frac{dU}{dv}dv + \frac{dU}{ds}ds + \ldots\right).$$

Ora poichè differenziando $\frac{dU}{du}du$ successivamente rapporto alle u, v, s, ..., ed ugualmente operando sugli altri termini

$$\frac{dU}{dv}dv, \quad \frac{dU}{ds}ds, \ldots,$$

si ottengono le

$$d_u\left(\frac{dU}{du}du\right) = \frac{d^2U}{du^2}du^2 + \frac{dU}{du}d^2u,$$

$$d_v\left(\frac{dU}{du}du\right) = \frac{d^2U}{dudv}dudv, \ldots, d_u\left(\frac{dU}{dv}dv\right) = \frac{d^2U}{dudv}dudv,$$

$$d_v\left(\frac{dU}{dv}dv\right) = \frac{d^2U}{dv^2}dv^2 + \frac{dU}{dv}d^2v, \ldots,$$

così avremo

$$d^2U = \frac{d^2U}{du^2}du^2 + \frac{d^2U}{dv^2}dv^2 + \frac{d^2U}{ds^2}ds^2 + \ldots$$

$$+2\frac{d^2U}{dudv}dudv+2\frac{d^2U}{duds}duds+\ldots+2\frac{d^2U}{dvds}dvds+\ldots$$

$$+\frac{dU}{du}d^2u+\frac{dU}{dv}d^2v+\frac{dU}{ds}d^2s+\ldots\ (h^v).$$

In simil guisa ottengonsi d^3U, d^4U, ecc. . . . (81).

---

(81) *Dunque la regola generale per differenziare una funzione* U *di funzioni, ossia una funzione di variabili tutte dipendenti, consiste nel differenziare la* U *in questa medesima ipotesi* (§. 48 : 49.), *e poi nel dedurre il valore dei differenziali*

$$du,\ dv,\ ds,\ \text{ecc.}\ldots;\ d^2u,\ d^2v,\ d^2s,\ \text{ecc.}\ldots$$

dall' equazioni che legano le funzioni, ovvero le variabili dipendenti u, v, s, *ecc.*, *alle indipendenti* x, y, z, *ecc....*, *seguendo le regole dimostrate* (§. 45 : 46.) *per differenziare le funzioni di più variabili indipendenti. Così avendosi*

$$U=F(u,\ v,\ s,\ ),$$

in cui

$$(g)\quad u=f(x,\ y,\ z),\ v=\varphi(x,\ y,\ z),\ s=\Psi(x,\ y,\ z),$$

sarà

$$dU=\frac{dU}{du}du+\frac{dU}{dv}dv+\frac{dU}{ds}ds,$$

$$d^2U=\begin{cases}\dfrac{d^2U}{du^2}du^2+\dfrac{d^2U}{dv^2}dv^2+\dfrac{d^2U}{ds^2}ds^2+\\[2ex]\dfrac{2d^2U}{du\,dv}du\,dv+\dfrac{2d^2U}{du\,ds}du\,ds+\dfrac{2d^2U}{dv\,ds}dv\,ds\\[2ex]+\dfrac{dU}{du}d^2u+\dfrac{dU}{dv}d^2v+\dfrac{dU}{ds}d^2s,\end{cases}$$

ove si dovranno sostituire i valori di du, dv, ds; d^2u, d^2v, d^2s, *tratti dalle* (g).

50.

Pongasi che la funzione

$$U = F(u, v, s, \ldots)$$

o riceva un valore costante C, o divenga $= 0$, cosicchè abbiasi o

$$U = C, \quad \text{ovvero} \quad U = 0:$$

in ambedue questi casi valeranno le seguenti equazioni differenziali

$$dU = 0, \quad d^2U = 0, \quad d^3U = 0, \ldots \quad (82)$$

Nell' attuale ipotesi poi dovrà una, per es. u, delle quantità $u, v, s, \ldots$, riguardarsi per funzione delle altre $v, s, \ldots$; perciò $du, d^2u, \ldots$, diverranno (§. 48. h^{IV}: §. 49. h^{V})

$$\frac{du}{dv}dv + \frac{du}{ds}ds + \ldots, \qquad \frac{d^2u}{dv^2}dv^2 + \frac{d^2u}{ds^2}ds^2 + \ldots$$

$$+ 2\frac{d^2u}{dvds}dvds + \ldots + \frac{du}{dv}d^2v + \frac{du}{ds}d^2s + \ldots,$$

ecc.

Se le variabili $v, s, \ldots$ divengano indipendenti, si annulleranno quei termini che hanno per fattori $d^2v, d^3v, \ldots, d^2s, d^3s, \ldots$ (83).

51.

Data per es. la

$$\mu = f(x, y, z, \ldots) = 0,$$

per la quale $d\mu = 0$, ovvero (§. 45. h')

$$\frac{d\mu}{dx}dx + \frac{d\mu}{dy}dy + \frac{d\mu}{dz}dz + \ldots = 0 \ldots (i),$$

---

(82) *Verranno tali equazioni giustificate senza più dal riflettere che il differenziale di una costante (§. 8.) è sempre nullo.*

(83) *In questa ipotesi essendo (§. 6.) i differenziali dv, ds, ... quantità costanti, saranno i fattori suddetti (§. 8.) ciascuno eguale a zero.*

se la z si riguardi come funzione implicita delle altre x, y, ... indipendenti, poichè in tal caso abbiamo

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \ldots,$$

perciò, a sostituzione fatta nella (i), essa diverrà

$$\left(\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\mu}{dy} + \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right)dy + \ldots = 0 \ldots (i'):$$

similmente (§. 46.) avremo

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 + \ldots + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \ldots$$

Perciò l'equazione differenziale $d^2\mu = 0$, ovvero (§. 46: 49.) la

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\mu}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2\mu}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2\mu}{dz^2}dz^2 + \ldots\\ &\quad + 2\frac{d^2\mu}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2\mu}{dxdz}dxdz + \ldots\\ &\quad + 2\frac{d^2\mu}{dydz}dydz + \ldots + \frac{d\mu}{dz}d^2z \quad (84)\end{aligned}\right\} = 0$$

si cangerà nella

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d^2\mu}{dx^2} + \frac{d^2\mu}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2\mu}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dx} + \right.\\ &\quad \left.\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2\mu}{dz^2} + \right.\\ &\quad \frac{d^2\mu}{dxdy} + \frac{d^2\mu}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{d^2\mu}{dydz}\cdot\frac{dz}{dx} + \\ &\quad \left.\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy + \left(\frac{d^2\mu}{dy^2} + \right.\\ &\quad \frac{d^2\mu}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 2\frac{d^2\mu}{dydz}\cdot\frac{dz}{dy} + \\ &\quad \left.\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy^2 + \ldots\\ &\quad \text{ecc.} \ldots\end{aligned}\right\} = 0 \ldots (i'')$$

(84) *In questa equazione si trova il d^2z, perchè la z è variabile dipendente, ossia è funzione delle x, y, ...*

52.

Poichè nelle (i' , i'' , ecc. §. 51) si hanno x , y , . . ., e conseguentemente dx , dy , . . ., per quantità fra loro non dipendenti , avremo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mu}{dx}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0\,, \\ &\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0\,, \end{aligned}\right\}(i_1)$$

ecc. . . . ,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\mu}{dx^2}+\frac{d^2\mu}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\,\frac{d^2\mu}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}=0\,, \\ &\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2\mu}{dz^2}+\frac{d^2\mu}{dxdy}+\frac{d^2\mu}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2\mu}{dydz}\cdot\frac{dz}{dx}+ \\ &\qquad\qquad\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dxdy}=0\,, \\ &\frac{d^2\mu}{dy^2}+\frac{d^2\mu}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+2\,\frac{d^2\mu}{dydz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}=0\,, \end{aligned}\right\}(i_2)$$

ecc. . . .

poichè le medesime (i' , i'' , . . .) debbono generalmente sussistere (85). L'equazioni differenziali (i_1 , i_2 , . . .), e quelle

---

(85) *Dunque dall'aversi* $\mu=0$, *non solo abbiamo* (§. 50)

$$d\mu=0\,,\quad d^2\mu=0\,,\quad d^3\mu=0\,,\quad ecc.\ldots;$$

ma di più i coefficienti di ciascuno dei differenziali parziali , che compongono i totali $d\mu$, $d^2\mu$, $d^3\mu$, *ecc. . . . risulterà nullo. A questa importante conseguenza si previene anche riflettendo che il coefficiente differenziale di* dx *nella* (i') *rimane sempre lo stesso , considerando* μ *funzione tanto delle sole due variabili* x , y , *prese le altre per costanti , quanto delle variabili tutte* x , y , z , u , . . . ; *ma nel primo caso quel coefficiente* (§. 50) *è nullo evidentemente , dunque tale sarà pure nel secondo. Inoltre considerando* μ *qual funzione delle tre sole variabili* x , y , z , *tutte le altre prese per costanti , saranno i coefficienti differenziali , uno di* dx , *l'altro di* dy , *quelli che sarebbero con-*

che provengono comunque dalla combinazione loro, diconsi parziali.

53.

Equazioni siffatte possono adoperarsi ad eliminare le quantità costanti, che si trovano in una data equazione, come si vede nel sotto posto esempio.
Abbiasi l' equazione

$$z^2 + ay^2 + b(x+y)^2 + c = 0\,;$$

da cui facilmente si ottengono le

$$b(x+y) + z\frac{dz}{dx} = 0\,,\quad ay + b(x+y) + z\frac{dz}{dy} = 0\,,$$

dalle quali, e dalla data nascerà

$$z^2 - z\left(x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy}\right) + c = 0\,,$$

ove non appariscono affatto le costanti a, b (86).

---

siderando μ funzione di tutte le x, y, z, u, ...; ma nel primo caso ciascuno dei coefficienti medesimi è nullo evidentemente, dunque lo sarà pure nel secondo. Continuando questo ragionamento si terminerà per dimostrare la esistenza tanto delle (i_1), quanto delle (i_2), e di tutte le altre simili equazioni differenziali parziali, che nascerebbero dalle

$$d^3\mu = 0\,,\quad d^4\mu = 0\,,\ \text{ecc.}$$

(86) *Per maggior esercizio addurremo qui un secondo esempio di siffatta eliminazione, la quale con molto vantaggio si adopera nella geometria elevata. Se abbiasi*

$$\mu = (gx - h)^2 + (cy - e)^2 + (az - b)^2 = 0\,,$$

sarà

$$\frac{d\mu}{dx} = 2g(gx - h)\,,\quad \frac{d\mu}{dy} = 2c(cy - e)\,,\quad \frac{d\mu}{dz} = 2a(az - b)\,,$$

ed anche

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = 2g^2\,,\quad \frac{d^2\mu}{dy^2} = 2c^2\,,\quad \frac{d^2\mu}{dz^2} = 2a^2\,,$$

S' intende poi facilmente che supposta una equazione di tre variabili x, y, z, avendosi dalla medesima due equazioni (i_1) di ordine primo; tre (i_2) di ordine secondo; quattro di ordine terzo; ...; $n+1$ di ordine $n.^{mo}$; ed essendo il numero di tutte queste differenziali equazioni espresso (p. 1.ª §. 202.) dalla

$$2+3+4+5+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}-1\,,$$

$$\frac{d^2\mu}{dz\,dx}=2a^2\frac{dz}{dx},\quad \frac{d^2\mu}{dz\,dy}=2a^2\frac{dz}{dy},\quad \frac{d^2\mu}{dx\,dy}=0.$$

Sostituendo questi valori nelle (i_1), (i_2), *si avranno le*

$$g(gx-h)+a(az-b)\frac{dz}{dx}=0\,,$$

$$c(cy-e)+a(az-b)\frac{dz}{dy}=0\,,$$

$$g^2+3a^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+a(az-b)\frac{d^2z}{dx^2}=0\,,$$

$$3a\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}+(az-b)\frac{d^2z}{dx\,dy}=0\,,$$

$$c^2+3a^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+a(az-b)\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Di queste, le prime due, combinate opportunamente con la data, producono la

$$a^2c^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+a^2g^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+g^2c^2=0\,,$$

da cui, mediante le ultime tre, facendo scomparire a^2, c^2, g^2, *si otterrà, dopo tutte le convenienti riduzioni, la*

$$\left(\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\left(2\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{dz}{dx}-\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)+$$
$$\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)=0\,,$$

senza veruna costante.

perciò da esse con la data, potrà ottenersi una equazione dall' ordine $n.^{mo}$, priva di

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-1$$

quantità costanti (87).

Similmente (p. 1.^{a} §. 223 : 224.) data una equazione fra quattro variabili, essa produrrà tre differenziali equazioni (i_1) di ordine primo; sei (i_2) di ordine secondo; dieci di terzo; quindici di quarto; ....;

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

di ordine $n.^{mo}$; e conseguentemente il numero di tutte sarà

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1.$$

Per la qual cosa potrà da esse con la data ottenersi un equazione differenziale parziale dell' ordine $n.^{mo}$, priva di

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1$$

costanti (88).

---

(87) *Poichè una prima differenziazione della data somministra due equazioni differenziali parziali* (i_1) *di prim' ordine; una seconda differenziazione della medesima porge tre simili equazioni* (i_2) *di second' ordine; una terza ne dà quattro di terz' ordine; e così procedendo sino alla* $n.^{ma}$ *differenziazione, dalla quale si otterranno* $n+1$ *equazioni differenziali parziali dell' ordine* $n.^{mo}$; *perciò sommando la progressione geometrica da* 2 *sino ad* $n+1$, *e riducendo, avremo facilmente il numero di tutte queste differenziali equazioni espresso come sopra; mediante le quali si potrà* (p. 1.^{a} §. 128.) *eliminare dalla data un egual numero di costanti.*

(88) *Per avere in questo caso il numero di tutte l' equazioni differenziali parziali, dovrà sommarsi la serie*

$$3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots.$$

che (p. 1.^{a} §. 223.) *ha per termine* $n.^{mo}$

Generalmente data un equazione fra m variabili, potrà da essa, e dalle derivate parziali, dedursi una equazione simile di ordine $n.^{mo}$, senza

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}-1$$

delle costanti comprese nella data.

54.

Mediante le stesse differenziali equazioni, possono eliminarsi dalla proposta le indeterminate funzioni, se la medesima ne contenga.

Esempi.

I.° Sia

$$\mu=f[\varphi(\nu),\ x,\ y,\ z]=0;$$

rappresenta ν una data funzione delle x, y indipendenti; e φ una funzione del tutto arbitraria: fatto

$$\varphi(\nu)=r,$$

poichè abbiamo

$$dr=\frac{dr}{dx}dx+\frac{dr}{dy}dy,\quad dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy,$$

sarà

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{d\mu}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dx}+\dfrac{d\mu}{dx}+\dfrac{d\mu}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}\right)dx+\\ \left(\dfrac{d\mu}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dy}+\dfrac{d\mu}{dy}+\dfrac{d\mu}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dy}\right)dy,\end{array}\right\}=0,$$

onde

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

e per somma

$$\frac{11}{6}n+n^2+\frac{1}{6}n^3=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1;$$

dunque ec.

$$\frac{d\mu}{dr}\cdot\frac{dr}{dx}+\frac{d\mu}{dx}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{d\mu}{dr}\cdot\frac{dr}{dy}+\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0.$$

E' poi

$$\frac{dr}{dx}=\varphi'(\nu)\frac{d\nu}{dx},\quad \frac{dr}{dy}=\varphi'(\nu)\frac{d\nu}{dy}\quad (89);$$

quindi

$$\varphi'(\nu)\frac{d\mu}{dr}\cdot\frac{d\nu}{dx}+\frac{d\mu}{dx}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\varphi'(\nu)\frac{d\mu}{dr}\cdot\frac{d\nu}{dy}+\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0.$$

Ora da queste due equazioni, e dalla primitiva $\mu=0$, eliminando $\varphi(\nu)$, e $\frac{d\mu}{dr}\varphi'(\nu)$, perverremo ad una equazione differenziale parziale di prim' ordine, priva delle funzioni arbitrarie (90).

---

(89) *Il differenziale di una funzione di funzione $\varphi(\nu)$, essendo (§. 7.) $\varphi'(\nu)d\nu$, certo è che qualunque sia la variabile indipendente, rapporto alla quale si voglia eseguita la differenziazione di $\varphi(\nu)$, sempre il coefficiente differenziale, o prima derivata $\varphi'(\nu)$, sarà la stessa; poichè la derivazione si riferisce solo alla forma φ della funzione primitiva, e non alle variabili comprese nella ν, alle quali però si riferisce il differenziale della ν medesima, che dovrà essere preso (§. 41.) rapporto a quella variabile, rispetto cui si vuole differenziata $\varphi(\nu)$. Ciò basta per comprendere chiaramente le due superiori equazioni.*

(90) *A particolarizzare questo primo esempio pongasi*

$$\mu=\varphi(\nu)-z=0,\quad \nu=ax+by,$$

sarà

$$r=z=\varphi(\nu);$$

laonde

$$\frac{d\mu}{dr}=1,\quad \frac{d\mu}{dz}=-1,\quad \frac{d\nu}{dx}=a,\quad \frac{d\mu}{dx}=\varphi'(\nu)\frac{d\nu}{dx}=a\varphi'(\nu),$$

II.° Sia

$$z = x\varphi(v) + \psi(v) ;$$

esprimono φ, ψ due funzioni indeterminate, v una data funzione delle indipendenti x, y.

$$\frac{dv}{dy} = b , \quad \frac{d\mu}{dy} = \varphi'(v)\frac{dv}{dy} = b\varphi'(v) ;$$

e sostituendo questi valori nelle due ultime equazioni, avremo

$$2a\varphi'(v) - \frac{dz}{dx} = 0 , \qquad 2b\varphi'(v) - \frac{dz}{dy} = 0 ,$$

dalle quali, eliminando $\varphi'(v)$, si avrà

$$(1) \ldots b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0 ,$$

equazione libera dalle indeterminate $\varphi(v)$, $\varphi'(v)$, ad eliminare le quali ci valsero i soli differenziali parziali di prim'ordine, senza bisogno della primitiva $\mu = 0$; e ciò in grazia della particolar forma di questa. Qui non tralasceremo di osservare, che la (1) si verifica per qualunque valore di z, nato dalle diverse forme che si potrebbero dare alla funzione φ, come facilmente potrà verificarsi ne' seguenti casi particolari,

$$z = (ax + by)^n , \quad z = e^{ax+by} , \quad z = \text{sen}(ax + by) , \text{ ecc.} \ldots$$

Dunque la (1) racchiude in se il criterio per esser certi, se un dato composto di due variabili x, y, sia o no funzione di $ax + by$, cioè se tale composto si possa o no trasformare in un altro, contenente la sola variabile v, quante volte pongasi $v = ax + by$. Se ignorassimo p. e. l' origine del polinomio

$$z = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 ,$$

determinandone i coefficienti differenziali

$$\frac{dz}{dx} = 2a^2x + 2aby , \quad \frac{dz}{dy} = 2abx + 2b^2y .$$

e ponendone i valori nella (1), essa diverrà una identicità, e saremo certi, che il trinomio proposto è realmente funzione di $ax + by$, lo che per altra parte si manifesta, essendo

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax + by)^2 .$$

Prendendo i differenziali parziali della proposta, si avrà

$$\frac{dz}{dx}=\varphi(\nu)+x\varphi'(\nu)\frac{d\nu}{dx}+\psi'(\nu)\frac{d\nu}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy}=x\varphi'(\nu)\frac{d\nu}{dy}+\psi'(\nu)\frac{d\nu}{dy}.$$

di queste la seconda, moltiplicata per $\frac{d\nu}{dx}$, sottraggasi dalla prima moltiplicata per $\frac{d\nu}{dy}$, nascerà

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\nu}{dy}-\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d\nu}{dx}=\varphi(\nu)\cdot\frac{d\nu}{dy}\ldots(m).$$

Presi di nuovo i differenziali parziali della equazione (m), otterremo

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d\nu}{dy}+\frac{d^2\nu}{dxdy}\cdot\frac{dz}{dx}-\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{d\nu}{dx}-\frac{d^2\nu}{dx^2}\cdot\frac{dz}{dy}=$$
$$\varphi(\nu)\frac{d^2\nu}{dxdy}+\varphi'(\nu)\frac{d\nu}{dx}\cdot\frac{d\nu}{dy},$$

$$\frac{d^2\nu}{dy^2}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{d\nu}{dy}-\frac{d^2\nu}{dxdy}\cdot\frac{dz}{dy}-\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{d\nu}{dx}=$$
$$\varphi(\nu)\frac{d^2\nu}{dy^2}+\varphi'(\nu)\left(\frac{d\nu}{dy}\right)^2:$$

eliminata poi da queste la $\varphi'(\nu)$, nascerà un' equazione con la sola indeterminata $\varphi(\nu)$. Poi dall' equazione così ottenuta, e dalla (m), si potrà eliminare $\varphi(\nu)$, e per tal modo giungere ad una equazione differenziale parziale di second' ordine, scevra delle funzioni arbitrarie (91).

---

(91) *In questo secondo esempio due sole differenziazioni bastarono ad eliminare le funzioni indeterminate, senza neppure il soccorso della equazione primitiva, e ciò per la singolar forma di essa. Volendo poi maggiormente particolarizzare l' esempio medesimo, pongasi*

$$\nu=\frac{y}{x},$$

55.

Poichè ripetendo le differenziazioni s' introducono nell'equazioni nuove arbitrarie funzioni

$$\varphi', \varphi'', \ldots, \psi', \psi'', \ldots;$$

vedesi da ognuno che, per eliminare siffatte indeterminate, richieggonsi più equazioni, di quello sia per eliminare le costan-

---

sarà

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{y}{x^2},$$

e per conseguenza la (m) *si ridurrà nella*

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{y}{x^2} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{1}{x}\,\varphi(v) \ldots (m').$$

Inoltre avremo

$$\frac{d^2v}{dx\,dy} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

per cui le ultime due superiori equazioni si ridurranno così

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{y}{x^2} \cdot \frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{2y}{x^3} \cdot \frac{dz}{dy} = -\frac{1}{x^2}\varphi(v) - \frac{y}{x^3}\varphi'(v),$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{y}{x^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{1}{x^2}\varphi'(v);$$

dalle quali eliminata $\varphi'(v)$, *avremo le*

$$\varphi(v) = \frac{dz}{dx} + \frac{y}{x} \cdot \frac{dz}{dy} - x\frac{d^2z}{dx^2} - 2y\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{y^2}{x} \cdot \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Ora fra questa, e la (m'), *eliminando* $\varphi(v)$, *avremo*

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2xy\frac{d^2z}{dx\,dy} + y^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

equazione differenziale parziale di second' ordine, del tutto priva delle arbitrarie funzioni.

ni (92). Generalmente se l'equazione primitiva fra m variabili x, y, z,..., racchiuda p funzioni arbitrarie

$$\varphi,\ \psi,\ \chi,\ \ldots,$$

da eliminare, l'equazioni parziali di prim'ordine, oltre le

$$\varphi,\ \psi,\ \chi,\ \ldots$$

conterranno ancora le

$$\varphi',\ \psi',\ \chi',\ \ldots;$$

l'equazioni parziali di second'ordine conterranno di più le

$$\varphi'',\ \psi'',\ \chi'',\ \ldots$$

e così appresso, tal che

$$p\,(n+1)$$

esprimerà il numero delle indeterminate funzioni (93), che nella equazione primitiva, e nelle derivate parziali, protratte sino all'ordine $n.^{mo}$, si comprendono. Il numero poi di tutte queste equazioni (§. 53.) sarà

---

(92) *Così poichè una funzione indeterminata* φ, *somministra per ciascun ordine un diverso coefficiente differenziale, anch'esso indeterminato, dovranno pel second' ordine aversi tre indeterminate relative a una sola funzione* φ; *cioè questa, il suo coefficiente differenziale di prim' ordine* φ', *e quello di secondo* φ''; *se ne avranno per conseguenza sei per due funzioni* φ, Ψ; *e siccome* (§. 53.) *quando le variabili sieno tre*, x, y, z, *il total numero dell' equazioni è parimente sei, non si potrà generalmente in tal caso giungere, per via di eliminazione, ad una risultante priva di tutte le indeterminate, salvo che per circostanze particolari non possano eliminarsene più in un tempo.*

(93) *Poichè qualunque delle indeterminate funzioni contenute nella proposta, ne somministra per ogni differenziazione un altra, sempre diversa; è chiaro che differenziando* n *volte, avremo prodotto* np *funzioni arbitrarie, che sommate con le* p *della proposta formeranno in tutto*

$$(n+1)p$$

funzioni arbitrarie da eliminare, per giungere ad un' equazione finale, affatto senza indeterminate.

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)};$$

dunque dalle medesime potrà dedursi una equazione parziale dell' ordine $n.^{mo}$, priva delle funzioni arbitrarie, quante volte abbiasi

$$p(n+1)<\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)},$$

ovvero

$$p<\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)}.$$

Suppongansi p. e. solo tre variabili x, y, z, e perciò $m=3$; si avrà

$$p<\frac{n+2}{2}, \text{ e conseguentemente } n>2p-2.$$

Si dovranno cioè protrarre le differenziazioni sino all' ordine $2p-1$, affinchè le funzioni arbitrarie sieno del tutto eliminate.

Fatto inoltre $p=2$, si offre l' ordine terzo. In fatti (§. 54. II.°) nell' equazione

$$z=x\varphi(\nu)+\psi(\nu)$$

abbiamo $p=2$, quantunque sia bastato continuare le differenziazioni sino all' ordine secondo, senza più: ma dipende ciò dalla particolar disposizione dei termini dell' equazione, da cui nasce in quell'esempio, e negli altri simili, che per certe operazioni dispaiono insieme più funzioni arbitrarie.

MASSIMI E MINIMI VALORI DELLE FUNZIONI DI PIU' VARIABILI.

56.

Riguardo alla funzione $\varphi(\theta)$, già considerata (§. 47.), è chiaro che pel valor particolare $\theta = 0$, nelle cui prossimità supponiamo essere la stessa $\varphi(\theta)$ continua, non può la $\varphi(0)$ riescire massima o minima (94), se non abbiasi vigente (§. 30.) l' equazione

$$\varphi'(0) = 0.$$

Affinchè poi la $\varphi(0)$ sia realmente massima o minima, fa pur d' uopo, che sia costantemente nelle prossimità stesse

$$\varphi(\theta) - \varphi(0) < 0\,, \quad \text{ovvero} \quad \varphi(\theta) - \varphi(0) > 0\,:$$

nel primo caso $\varphi(0)$ riescirà certo massima, nel secondo minima.

Posto ciò s' intende subito (§. 47. h''') che la funzione

$$\mu = f(x\,,\ y\,,\ z\,,\ \ldots)$$

delle variabili indipendenti x, y, z, ..., non diverrà massima o minima, se non per tali valori particolari x_m, y_m, z_m, ..., che sostituiti nelle x, y, z, ..., venga soddisfatta l' equazione

$$d\mu = 0\,;$$

e poichè a questa deve soddisfarsi qualunque sieno dx, dy, dz, ... quantità fra loro indipendenti, perciò dalla $d\mu = 0$ nasceranno (§. 45. h') l' equazioni

---

(94) *Quando una funzione di più variabili indipendenti x, y, z, ..., riceve un valor particolare, ma reale, che supera tutti gli altri a lui prossimi, ottenuti facendo variare le x, y, z, ... di pochissimo, in più, ed in meno, quel particolar valore della funzione dicesi un* massimo: *dicesi pel contrario un* minimo *quante volte il medesimo sia tale, che rimanga inferiore a tutti gli altri ad esso vicinissimi, ed ottenuti nella stessa guisa. E' poi facile rilevare da quanto siegue, che la ricerca dei massimi e minimi delle funzioni di più variabili, si riduce alla ricerca dei massimi e minimi delle funzioni di una variabile sola.*

$$\frac{d\mu}{dx}=0\,,\quad \frac{d\mu}{dy}=0\,,\quad \frac{d\mu}{dz}=0\,,\ \text{ecc.}\ \ldots\ (g)\,.$$

dalle quali si avranno i valori x_m, y_m, z_m, ..., che potranno render massima o minima la funzione μ.

Affinchè poi la μ divenga realmente massima o minima, fa d' uopo inoltre che, nelle prossimità di $\theta=0$, sia costantemente

$$\left.\begin{array}{l} f(x_m+\theta dx\,,\ y_m+\theta dy\,,\ z_m+\theta dz\,,\ \ldots)- \\ \qquad f(x_m,\ y_m,\ z_m,\ \ldots)<0\,, \\ \text{ovvero} \\ f(x_m+\theta dx\,,\ y_m+\theta dy\,,\ z_m+\theta dz\,,\ \ldots)- \\ \qquad f(x_m,\ y_m,\ z_m,\ \ldots)>0\,, \end{array}\right\}(g')$$

qualunque in fine sieno dx, dy, dz, ...; certo nel primo caso la μ sarà massima, nel secondo minima.

Esempio.

Se abbiasi la funzione

$$\mu=xy\,(3a-x-y)\,,$$

si avranno le

$$\frac{d\mu}{dx}=y\,(3a-2x-y)=0\,,$$

$$\frac{d\mu}{dy}=x\,(3a-2y-x)=0\,,$$

donde

$$x_m=a\,,\quad y_m=a.$$

La differenza poi

$$(x_m+\theta dx)\,(y_m+\theta dy)\,(3a-x_m-\theta dx-y_m-\theta dy)$$
$$-\,x_m y_m(3a-x_m-y_m)\,,$$

ovvero la

$$-a\theta^2\,[\,(dx+dy)^2-dxdy\,]-\theta^3 dxdy\,(dx+dy)$$

(comunque sieno dx, dy) rimarrà nelle vicinanze di $\theta=0$, negativa se $a>0$, positiva se $a<0$; i valori pertanto

$$x_m=a\,,\quad y_m=a$$

renderanno μ un massimo nel primo caso, un minimo nel secondo (95).

57.

Se fra le variabili x, y, z, ..., il numero delle quali supponiamo essere k, sussistano l relazioni, espresse per le

$$v = 0\,, \quad u = 0\,, \quad s = 0\,, \ldots,$$

rimarranno $k - l$ variabili indipendenti (§. 1.), e perciò al-

---

(95) *Propongasi per un secondo esempio la funzione*

$$\mu = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + hy + g\,,$$

dalla quale si avranno le

$$\frac{d\mu}{dx} = 2ax + by + k = 0\,,$$

$$\frac{d\mu}{dy} = bx + 2cy + h = 0\,,$$

donde

$$x_m = \frac{2ck - bh}{b^2 - 4ac}\,, \quad y_m = \frac{2ah - bk}{b^2 - 4ac}\,.$$

Inoltre la differenza

$$a(x_m + \theta dx)^2 + b(x_m + \theta dx)(y_m + \theta dy) + c(y_m + \theta dy)^2$$
$$+ k(x_m + \theta dx) + h(y_m + \theta dy) + g - ax^2{}_m - bx_m y_m$$
$$- cy^2{}_m - kx_m - hy_m - g =$$
$$(adx^2 + bdxdy + cdy^2)\theta^2 =$$
$$[\,(dx + \frac{b}{2a}dy\,)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\,dy^2\,]a\theta^2\,,$$

sarà costantemente positiva, se abbiasi

$$4ac - b^2 > 0\,, \quad ed \quad a > 0\,,$$

costantemente negativa, se ottengasi

$$4ac - b^2 > 0\,, \quad ed \quad a < 0.$$

Dunque la μ pei valori x_m, y_m, sarà nel primo caso minima, nel secondo massima.

trettanti differenziali similmente indipendenti, cui dovrà l' esposto metodo applicarsi.

Esempio.

Propongasi la funzione

$$\mu = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots,$$

e fra le variabili x, y, z, ... siavi la relazione

$$ax + by + cz + \ldots = h.$$

Avremo

$$d\mu = 2xdx + 2ydy + 2zdz + \ldots,$$

e così

$$adx + bdy + cdz + \ldots = 0,$$

$$dz = -\frac{adx + bdy + \ldots}{c}.$$

Per lo che

$$d\mu = 2\left(x - \frac{az}{c}\right)dx + 2\left(y - \frac{bz}{c}\right)dy + \ldots,$$

e conseguentemente

$$\frac{d\mu}{dx} = 2\left(x - \frac{az}{c}\right) = 0, \quad \frac{d\mu}{dy} = 2\left(y - \frac{bz}{c}\right) = 0, \ldots$$

donde

$$x = \frac{az}{c}, \quad y = \frac{bz}{c}, \ldots$$

Non altro fa d' uopo ad intendere che si avrà

$$z_m = \frac{ch}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}, \quad x_m = \frac{ah}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots},$$

$$y_m = \frac{bh}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}, \ldots$$

Ma la differenza

$$\left.\begin{array}{c}(x_m + \theta dx)^2 + (y_m + \theta dy)^2 + (z_m + \theta dz)^2 + \ldots \\ - x^2_m - y^2_m - z^2_m - \ldots\end{array}\right\} =$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2h\theta}{a^2+b^2+c^2+\ldots}\left(adx+bdy+\ldots\right.\\ \left.-c\left(\frac{adx+bdy+\ldots}{c}\right)\right)+\theta^2(dx^2+\\ dy^2+\ldots)+\theta^2\left(\frac{adx+bdy+\ldots}{c}\right)^2\end{array}\right\}=$$

$$\theta^2\left(dx^2+dy^2+\ldots+\left(\frac{adx+bdy+\ldots}{c}\right)^2\right)>0 \quad (96);$$

dunque i valori x_m, y_m, ... rendono minima la

$$\mu=x^2_m+y^2_m+z^2_m+\ldots=\frac{h^2}{a^2+b^2+c^2+\ldots} \quad (97).$$

58.

Nel determinare i valori massimi o minimi delle funzioni di più variabili, possiamo valerci dei differenziali di vari ordini.

Riassunta (§. 56.) la funzione $\varphi(\theta)$, corrisponderà un massimo od un minimo $\varphi(0)$, al valore $\theta=0$, quante volte sia $\varphi'(0)=0$, e delle altre derivate (§. 31.)

$$\varphi''(0),\quad \varphi'''(0),\quad \varphi^{\text{IV}}(0),\ \ldots$$

la prima che non si annulla sia di ordine pari. Esprima $\varphi^{(2n)}(0)$ questa derivata; sarà $\varphi(0)$ massima, o minima, secondo che abbiasi

$$\varphi^{(2n)}(0)<,\ \text{ovvero} >0.$$

Ciò esposto vedesi da ognuno (§. 47. h'''), che la funzione

---

(96) *La differenza qui calcolata riducesi a questa forma, con eliminare dalla medesima il dz, mediante la*

$$dz=-\frac{adz+bdy+\ldots}{c}$$

sopra dedotta.

(97) *Se riducansi a tre le variabili x, y, z, ..., e se rappresentino coordinate ortogonali, la radice quadrata di questo valor minimo, rappresenterà evidentemente la più corta distanza, dalla origine delle medesime ad un piano fisso* (p. 2.^{a} §. 182 IV.^{o}, *facendo ivi* $z'=0$, $y'=0$, $z'=0$.)

$$f(x, y, z, \ldots, \tau)$$

delle variabili indipendenti

$$x, y, z, \ldots, \tau,$$

non diverrà massima o minima, se non per tali valori

$$x_m, y_m, z_m, \ldots, \tau_m,$$

che venga soddisfatta l' equazione $d\mu = 0$, cioè l' equazioni (g. §. 56.), e dei differenziali

$$d^2\mu, d^3\mu, d^4\mu, \ldots$$

il primo a non ridursi nullo, sia di ordine pari, comunque del resto sieno

$$dx, dy, dz, \ldots, d\tau.$$

Siffatto differenziale si rappresenti con $d^{2n}\mu$; la funzione μ diverrà massima, o minima, secondo che si avrà costantemente

$$d^{2n}\mu <, \text{ ovvero } > 0 \quad (g'') \quad (98).$$

Abbiamo poi (§. 46.)

$$d^{2n}\mu = \frac{d^{2n}\mu}{dx^{2n}}dx^{2n} + \frac{d^{2n}\mu}{dy^{2n}}dy^{2n} + \frac{d^{2n}\mu}{dz^{2n}}dz^{2n} + \ldots +$$

$$\frac{d^{2n}\mu}{d\tau^{2n}}d\tau^{2n} + 2n\frac{d^{2n}\mu}{d^{x}dy^{2n-1}}dxdy^{2n-1} + \ldots .$$

Inoltre indicate con p, q, r, ... le ragioni

$$dx : d\tau, \quad dy : d\tau, \quad dz : d\tau, \ldots$$

ed eseguita la divisione per $d\tau^{2n}$, il secondo membro di questa equazione diverrà

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^{2n}\mu}{dx^{2n}}p^{2n} + \dfrac{d^{2n}\mu}{dy^{2n}}q^{2n} + \dfrac{d^{2n}\mu}{dz^{2n}}r^{2n} + \ldots + \\ \quad\dfrac{d^{2n}\mu}{d\tau^{2n}} + 2n\dfrac{d^{2n}\mu}{dxdy^{2n-1}}pq^{2n-1} + \ldots\end{array}\right\} \text{(K)}.$$

(98) *S' intende facilmente che queste condizioni* (g'') *debbono verificarsi per valori delle variabili* x, y, z, ..., τ, *ottenuti dall' equazioni* (g) (§. 56.), *e indipendentemente dai valori delle quantità* dx, dy, ..., $d\tau$.

Pertanto il polinomio (K) avendo il segno stesso che ha $d^{2n}\mu$, le condizioni (g'') tornano in questo, che rimanga

$$K <, \text{ ovvero } > 0,$$

qualunque sieno p, q, r, ...

Per altro è chiaro (p. 1.ª §. 141.) essere il segno del polinomio (K) sempre lo stesso, quante volte l'equazione (K) $= 0$, risoluta per es. rispetto p, abbia o tutte le radici immaginarie, o avendone reali, queste sieno ed eguali, e di numero pari, comunque del resto essendo q, r, . . . (99).

Ciò posto, il segno del polinomio (K) sarà (p. 1.ª §. 126.) costantemente lo stesso di quello del coefficiente $\frac{d^{2n}\mu}{dx^{2n}}$ (100).

---

(99) *Giova quì osservare che, il polinomio* (K) *essendo una funzione intera e continua della quantità* p, *non potrà, variando questa, variar di segno, senza che l'equazione* (K) $= 0$, *ammetta in tal caso* (p. 1.ª §. 141.) *per lo meno due radici reali e diseguali. Dunque affinchè il polinomio* (K), *ovvero* $d^{2n}\mu$ *non cangi segno, variando* p, *fa d'uopo che l'equazione* (K) $= 0$, *risoluta per* p, *non ammetta fuorchè radici immaginarie* (p. 1.ª §. 147.); *o ammettendone reali, queste sieno* (p. 1.ª §. 145. $[z^{XII}]$) *di numero pari, ed eguali fra loro, per lo meno due a due: tutto ciò indipendentemente dai valori di* q, r, ... *Questa condizione, che rende certo la funzione* $\mu = \varphi(0)$ *massima, o minima, può facilmente per mezzo dell'analisi venir espressa, quando il polinomio* (K) *sia di secondo grado, e quando si conosca il numero delle variabili* x, y, z, ..., τ, *come vedremo ne' due seguenti paragrafi.*

(100) *Se l'equazione* (K) $= 0$, *ovvero* (p. 1.ª §. 126.),

$$\frac{(K)}{\frac{d^{2n}\mu}{dx^{2n}}} = 0,$$

risoluta rispetto p, *non ammetta fuorchè radici immaginarie, o ammettendone reali, queste sieno di numero pari, e fra loro identiche, almeno due a due, ne discende che, variando* p, *debba essere costantemente positiva la quantità*

$$\frac{(K)}{\frac{d^{2n}\mu}{dx^{2n}}};$$

59.

Sia p. e.

$$\mu = f(x, y).$$

Il differenziale di second' ordine (§. 46.), cioè

$$d^2\mu = \frac{d^2\mu}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2\mu}{dy^2}dy^2 + 2\frac{d^2\mu}{dxdy}dxdy,$$

avrà lo stesso segno del trinomio

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}p^2 + 2\frac{d^2\mu}{dxdy}p + \frac{d^2\mu}{dy^2} \ldots (K).$$

Inoltre se le due radici dell' equazione

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}p^2 + 2\frac{d^2\mu}{dxdy}p + \frac{d^2\mu}{dy^2} = 0,$$

o sieno immaginarie, o reali ed insieme uguali, al certo variata p, non per questo varierà (p. 1.^{a} §. 141.) il segno del trinomio (K), e perciò nè il segno del differenziale $d^2\mu$. Poichè adunque sono immaginarie quelle due radici se (p. 1.^{a} §. 135.) abbiasi

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2} - \left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2 > 0,$$

---

ma per evidenza si ha

$$(K) = \frac{d^{2n}\mu}{dx^{2n}}\cdot\frac{(K)}{\frac{d^{2n}\mu}{dx^{2n}}},$$

dunque il segno del polinomio (K), *eguaglierà costantemente in tal caso quello del coefficiente*

$$\frac{d^{2n}\mu}{dx^{2n}};$$

e perciò la funzione μ *sarà massima o minima, secondo che abbiasi*

$$\frac{d^{2n}\mu}{dx^{2n}} <, \text{ ovvero } > 0.$$

sono poi reali ed insieme uguali, se ottengasi

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2}-\left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2=0 \quad (101),$$

ne siegue che, qualunque abbia luogo di queste due condizioni, sarà costantemente

$$d^2\mu <, \text{ ovvero } > 0,$$

secondo che sia

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} <, \text{ ovvero } > 0,$$

comunque del resto si riguardino dx, dy (102).

60.

Propongasi pure la funzione

$$\mu = f(x, y, z).$$

Il differenziale di second'ordine cioè (§. 46.)

$$d^2\mu = \frac{d^2\mu}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2\mu}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2\mu}{dz^2}dz^2 +$$

$$2\frac{d^2\mu}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2\mu}{dxdz}dxdz + 2\frac{d^2\mu}{dydz}dydz,$$

avrà lo stesso segno del polinomio

---

(101) *Si osservi che in qualunque di queste due condizioni, dovranno sempre*

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}, \quad \frac{d^2\mu}{dy^2}$$

essere affetti dal medesimo segno.

(102) *Se poi si verifichi*

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2}-\left(\frac{d^2\mu}{dx\,dy}\right)^2<0,$$

ne discende che la funzione μ non può essere nè massima, nè minima, perchè in tal caso la (K) $= 0$, *risoluta rispetto p, avrà le due radici reali, ma diseguali; e perciò il trinomio* (K) *cangerà di segno variando p.*

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}p^2 + \frac{d^2\mu}{dy^2}q^2 + \frac{d^2\mu}{dz^2} + 2\frac{d^2\mu}{dxdy}pq +$$
$$2\frac{d^2\mu}{dxdz}p + 2\frac{d^2\mu}{dydz}q \ldots (K).$$

Fatto (K) $= 0$, e risoluta l'equazione rispetto p, le due radici saranno immaginarie se

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dz^2} - \left(\frac{d^2\mu}{dxdz}\right)^2 - \left(\left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2 - \right. \\ \left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2}\right)q^2 - 2\left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\cdot\frac{d^2\mu}{dxdz} - \frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dydz}\right)q\end{array}\right\} > 0;$$

saranno poi reali ed insieme uguali, se la medesima quantità sia $= 0$. Queste condizioni dovendo essere soddisfatte, qualunque sia q, per la prima si avrà (p. 1.^{a} §. 126.)

$$\left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2} < 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2}\right)\left(\left(\frac{d^2\mu}{dxdz}\right)^2 - \right. \\ \left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dz^2}\right) - \left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\cdot\frac{d^2\mu}{dxdz} - \frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dydz}\right)^2\end{array}\right\} \begin{array}{l} >, \text{ ovvero} \\ = 0 \;(103); \end{array}$$

per la seconda poi si otterrà

---

(103) *Onde il polinomio precedente, che diremo* P, *risulti costantemente* > 0, *qualunque sia* q, *fa d' uopo che decomposto* (p. 1.^{a} §. 126.) *ne' due fattori*

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}\,\frac{d^2\mu}{dy^2} - \left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2,$$

$$\frac{\mathrm{P}}{\frac{d^2\mu}{dx^2}\,\frac{d^2\mu}{dy^2} - \left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2},$$

il primo di questi sia costantemente > 0; *il secondo, eguagliato a zero, e risoluto per* q, *somministri le due radici o immaginarie, od eguali: sarà facile da questi criteri dedurre le precedenti espressioni.*

$$\left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^2\mu}{dxdy}\cdot\frac{d^2\mu}{dxdz} - \frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dydz} = 0,$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dz^2} - \left(\frac{d^2\mu}{dxdz}\right)^2 = 0 \quad (104).$$

Adempiute a quelle due, od a queste tre condizioni, rimarrà il segno del polinomio (K) sempre lo stesso, comecchè varino p, q; e perciò altrettanto avverrà del segno di $d^2\mu$, comunque sieno dx, dy, dz; e sarà costantemente

$$d^2\mu <, \text{ ovvero } > 0,$$

secondo che abbiasi

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} <, \text{ ovvero } > 0 \quad (105).$$

---

(104) *Qui pure si osservi che per tutte le precedenti condizioni dovranno sempre le quantità*

$$\frac{d^2\mu}{dx^2},\quad \frac{d^2\mu}{dy^2},\quad \frac{d^2\mu}{dz^2},$$

essere affette ognuna dal medesimo segno.

(105) *I due seguenti esempi serviranno a maggiore illustrazione della teorica precedente.*

I.º Sieno x, y, z i lati di un triangolo, sarà

$$p = \frac{x+y+z}{2}$$

il semiperimetro del medesimo, e poichè abbiamo

$$z = 2p - x - y,$$

perciò (p. 2.ª §. 136.) *la superficie μ del triangolo stesso verrà espressa dalla equazione*

$$\mu = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)};$$

laonde avremo

61.

Se alcune delle variabili x, y, z, ... cessino di essere indipendenti, dovrà qui pure osservarsi quanto dicemmo (§. 57.); cioè dovrà il metodo applicarsi alle altre variabili.

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{p(p-y)(2p-2x-y)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}},$$

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{p(p-x)(2p-2y-x)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}},$$

ed a cagione delle (g) (§. 56.) *avremo le*

$$p(p-y)(2p-2x-y) = 0,$$

$$p(p-x)(2p-2y-x) = 0.$$

Ora non potendo essere

$$\text{nè } p-y=0, \quad \text{nè } p-x=0,$$

poichè nel primo caso avremmo

$$2p = 2y = x+y+z, \quad y = x+z,$$

nel secondo

$$2p = 2x = x+y+z, \quad x = y+z,$$

che sono (p. 2.^{a} §. 9.) *ambedue assurdi, perciò sarà*

$$2p-2x-y=0, \quad 2p-2y-x=0,$$

donde

$$x_m = y_m = \frac{2}{3}p.$$

Inoltre dopo un facile calcolo avremo, per questi valori delle x, y, *le seguenti equazioni*

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -\sqrt{3}, \quad \frac{d^2\mu}{dy^2} = -\sqrt{3}, \quad \frac{d^2\mu}{dx\,dy} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

e per conseguenza (§. 59.) *sarà*

$$\left(\frac{d^2\mu}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2} = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4} < 0.$$

Esempio.

Sia la funzione

$$\mu = ax + by + cz,$$

ed abbia luogo fra le variabili x, y, z, la relazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Dunque poichè pei trovati valori delle variabili x, y abbiamo

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} < 0,$$

perciò sarà (§. 58.) pei valori medesimi la funzione

$$\mu = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

massima; e poichè abbiamo

$$z = 2p - x - y = \frac{2}{3}p,$$

così potremo concludere che fra i triangoli isoperimetri, quello che avrà maggior superficie sarà l'equilaterale.

II.° Sia

$$\mu = x^n + y^n + (1 - x^m - y^m)^{\frac{n}{m}}$$

la funzione di cui si deve cercare il massimo, od il minimo; avremo le

$$\frac{d\mu}{dx} = nx^{n-1} - nx^{m-1}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-m}{m}} = 0,$$

$$\frac{d\mu}{dy} = ny^{n-1} - ny^{m-1}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-m}{m}} = 0,$$

dalle quali si ottiene

$$x_m = y_m = \frac{1}{\sqrt[m]{3}}.$$

Prendendo i differenziali avremo

$$d\mu = adx + bdy + cdz\,, \quad xdx + ydy + zdz = 0\,,$$

$$dz = -\frac{xdx + ydy}{z}.$$

Inoltre abbiamo

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} - n(m-1)x^{m-2}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-m}{m}}$$

$$+ n(n-m)x^{2m-2}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-2m}{m}},$$

$$\frac{d^2\mu}{dy^2} = n(n-1)y^{n-2} - n(m-1)y^{m-2}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-m}{m}}$$

$$+ n(n-m)y^{2m-2}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-2m}{m}},$$

$$\frac{d^2\mu}{dxdy} = n(n-m)x^{m-1}y^{m-1}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-2m}{m}},$$

ovvero, adoperando i valori x_m, y_m, *avremo*

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = \frac{2n(n-m)}{\sqrt[m]{3^{n-2}}}, \quad \frac{d^2\mu}{dy^2} = \frac{2n(n-m)}{\sqrt[m]{3^{n-2}}}, \quad \frac{d^2\mu}{dxdy} = \frac{n(n-m)}{\sqrt[m]{3^{n-2}}};$$

e conseguentemente (§. 59.)

$$\left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2} = -3\left(\frac{n(n-m)}{\sqrt[m]{3^{n-2}}}\right)^2 < 0\,,$$

quindi secondo che avremo

$$n <,\ \text{ovvero}\ > m,$$

sarà, pei trovati valori,

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} <,\ \text{ovvero}\ > 0,$$

e perciò (§. 58.) *la funzione*

Quindi

$$d\mu = \left(a - \frac{cx}{z}\right)dx + \left(b - \frac{cy}{z}\right)dy\,;$$

$$\frac{d\mu}{dx} = a - \frac{cx}{z} = 0\,, \quad \frac{d\mu}{dy} = b - \frac{cy}{z} = 0\,,$$

$$x = \frac{az}{c}\,, \quad y = \frac{bz}{c}\,;$$

e perciò

$$z_m = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,, \quad x_m = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,,$$

$$y_m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

Abbiamo poi

$$d^2\mu = cd^2z = -c\frac{dx^2 + dy^2}{z} - c\frac{(xdx + ydy)^2}{z^3} \ldots (o) \quad (106),$$

onde

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -c\left(\frac{1}{z} + \frac{x^2}{z^3}\right), \quad \frac{d^2\mu}{dy^2} = -c\left(\frac{1}{z} + \frac{y^2}{z^3}\right),$$

$$\frac{d^2\mu}{dxdy} = -c\frac{xy}{z^3}\,,$$

$$\mu = \frac{3}{\sqrt[n]{3^n}}$$

sarà nel primo caso massima, nel secondo minima.

(106) *Essendo*

$$d\mu = adx + bdy + cdz\,,$$

ed essendo z sola variabile dipendente, mentre x, y sono indipendenti, avremo (§. 50) dx, dy costanti, e perciò sarà

$$d^2\mu = cd^2z.$$

ovvero, ad x, y, z sostituito x_m, y_m, z_m, avremo

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = \mp\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$\frac{d^2\mu}{dy^2} = \mp\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$\frac{d^2\mu}{dxdy} = \mp\frac{ab}{c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

e conseguentemente (§. 59.)

$$\left(\frac{d^2\mu}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dy^2} = -\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{c}\right)^2 < 0;$$

inoltre secondo che si prendano i segni superiori, o gl' inferiori delle x_m, y_m, z_m, avremo

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} <, \text{ ovvero } > 0;$$

dunque (§. 58.) dai valori positivi delle x_m, y_m, z_m, diviene massima la

$$\mu = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

e dai valori medesimi negativi diviene minima la

$$\mu = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Del resto poteva ciò immediatamente dedursi dal valore (o) del differenziale $d^2\mu$; questo in fatti, adoperando i valori x_m, y_m, z_m, col doppio segno $\pm$, si cangia in

$$d^2\mu = \mp(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}[dx^2 + dy^2 + \left(\frac{adx + bdy}{c}\right)^2] \text{ (107).}$$

---

(107) *In fatti poichè l'espressione di $d^2\mu$, ottenuta dalla* (o), *pei valori x_m, y_m, z_m, persiste negativa o positiva, secondo che i valori medesimi prendansi col segno superiore, o coll' inferiore, indipendentemente dalle dx, dy; ne discende* (§. 58.) *che, per quei valori, sarà la funzione μ nel primo caso massima, nel secondo minima.*

SI ESTENDONO LE FORMOLE DI TAYLOR, E DI MAC-LAURIN ALLE FUNZIONI DI PIU' VARIABILI: SI DIMOSTRA IL TEOREMA DELLE FUNZIONI OMOGENEE.

62.

Poichè (§. 23. q^{IX}) possiamo stabilire

$$\varphi(\theta) = \varphi(0) + \frac{\theta}{1}\varphi'(0) + \frac{\theta^2}{1.2}\varphi''(0) + \frac{\theta^3}{1.2.3}\varphi'''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{\theta^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\varphi^{(m-1)}(0) + \frac{\theta^m}{1.2\ldots m}\varphi^{(m)}(\varepsilon\theta),$$

perciò (§. 47. h''. h''') sarà

$$f(x+\theta dx,\ y+\theta dy,\ z+\theta dz,\ \ldots) = \mu + \frac{\theta}{1}d\mu +$$

$$\frac{\theta^2}{1.2}d^2\mu + \frac{\theta^3}{1.2.3}d^3\mu + \ldots + \frac{\theta^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}d^{m-1}\mu +$$

$$\frac{\theta^m}{1.2\ldots m}\varphi^{(m)}(\varepsilon\theta)\ \ldots (o);$$

e conseguentemente se, aumentato m all'indefinito, converga

$$\frac{\theta^m}{1.2\ldots m}\varphi^{(m)}(\varepsilon\theta)$$

nel lim. $= 0$, potrà stabilirsi l'equazione

$$f(x+\theta dx,\ y+\theta dy,\ z+\theta dz,\ \ldots) = \mu + \frac{\theta}{1}d\mu +$$

$$\frac{\theta^2}{1.2}d^2\mu + \frac{\theta^3}{1.2.3}d^3\mu + \ldots (o').$$

63.

Nella (o') si pongano i valori di $d\mu$, $d^2\mu$, ... (§. 45: 46.); poste le

$$\theta dx = \partial_1,\quad \theta dy = \partial_2,\quad \theta dz = \partial_3,\ \ldots,$$

si avrà

$$\left.\begin{array}{l} f(x+\delta_1,\ y+\delta_2,\ z+\delta_3,\ \ldots)=\mu+\delta_1\dfrac{d\mu}{dx}+ \\ \delta_2\dfrac{d\mu}{dy}+\delta_3\dfrac{d\mu}{dz}+\ldots+\dfrac{\delta_1{}^2}{2}\dfrac{d^2\mu}{dx^2}+\dfrac{\delta_2{}^2}{2}\dfrac{d^2\mu}{dy^2}+ \\ \dfrac{\delta^2{}_3}{2}\dfrac{d^2\mu}{dz^2}+\ldots+\delta_1\delta_2\dfrac{d^2\mu}{dxdy}+\delta_1\delta_3\dfrac{d^2\mu}{dxdz}+\ldots \\ +\delta_2\delta_3\dfrac{d^2\mu}{dydz}+\ldots+\dfrac{\delta_1{}^3}{2.3}\dfrac{d^3\mu}{dx^3}+\ldots; \end{array}\right\}\ (o'')$$

l'equazione (o'') non è altro fuorchè la formola di Taylor, estesa alle funzioni di più variabili.

Cangiate prima le x, y, z, ... in zero; poi le δ_1, δ_2, δ_3, ... nelle x, y, z, ..., si otterrà la formola di Mac-Laurin, estesa alle medesime funzioni (108).

---

(108) *Praticate nella* (o'') *queste modificazioni, avremo*

$$\begin{array}{l} f(x,\ y,\ z,\ \ldots)=\mu+x\dfrac{d\mu}{dx}+y\dfrac{d\mu}{dy}+z\dfrac{d\mu}{dz}+\ldots. \\ \qquad+\dfrac{x^2}{2}\dfrac{d^2\mu}{dx^2}+\dfrac{y^2}{2}\dfrac{d^2\mu}{dy^2}+\dfrac{z^2}{2}\dfrac{d^2\mu}{dz^2}+\ldots. \\ +xy\dfrac{d^2\mu}{dxdy}+xz\dfrac{d^2\mu}{dxdz}+\ldots+yz\dfrac{d^2\mu}{dydz}+\ldots. \\ \qquad\qquad+\dfrac{x^3}{2.3}\dfrac{d^3\mu}{dx^3}+\ldots.\ (r), \end{array}$$

sviluppo che rappresenterà la formola di Mac-Laurin, estesa alle funzioni di più variabili; purchè tanto nella funzione μ, *quanto nell'espressioni che si otterranno per ciascuno dei coefficienti differenziali dello sviluppo medesimo, pongasi lo zero in vece delle* x, y, z, ... *Queste modificazioni sono del tutto simili a quelle già usate* (§. 23.) *per dedurre dalla* (q^{VIII}) *la* (q^{IX}), *e conseguentemente per dedurre dal teorema di Taylor quello di Mac-Laurin* (§. 32. (b^{IV})), *riguardo alle funzioni di una sola variabile. Avviene di rado che si debba sviluppare in serie una funzione di due o più variabili; giacchè il più delle volte queste funzioni si sviluppano rapporto ad una delle variabili che contengono, supponendo*

64.

La funzione $f(x, y, z, \ldots)$ si dice *omogenea*, quante volte, variate le $x, y, z, \ldots$ nel medesimo rapporto, cosicchè divengano rispettivamente

---

le altre costanti, nel qual caso debbono esse funzioni trattarsi come se fossero di una variabile sola. Tuttavia gioverà per la maggior intelligenza delle (o''), (*r*), *applicare queste medesime allo sviluppo di una funzione di due variabili* x, y. *Adunque innanzi tratto riflettiamo che posto*

$$\mu = f(x, y),$$

avremo dalla (o'') *la*

$$(1) \ldots f(x+\delta_1, y+\delta_2) = \mu + \delta_1 \frac{d\mu}{dx} + \delta_2 \frac{d\mu}{dy}$$
$$+ \frac{\delta_1^2}{2} \frac{d^2\mu}{dx^2} + \frac{\delta_2^2}{2} \frac{d^2\mu}{dy^2} + \delta_1\delta_2 \frac{d^2\mu}{dxdy} + \frac{\delta_1^3}{2.3} \frac{d^3\mu}{dx^3}$$
$$+ \frac{\delta_2^3}{2.3} \frac{d^3\mu}{dy^3} + \frac{\delta_1^2\delta_2}{2} \frac{d^3\mu}{dx^2dy} + \frac{\delta_1\delta_2^2}{2} \frac{d^3\mu}{dxdy^2} + \ldots,$$

e dalla (*r*) *avremo la*

$$(2) \ldots f(x, y) = \mu + x\frac{d\mu}{dx} + y\frac{d\mu}{dy} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2\mu}{dx^2}$$
$$+ \frac{y^2}{2}\frac{d^2\mu}{dy^2} + xy\frac{d^2\mu}{dxdy} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3\mu}{dx^3} + \frac{y^3}{2.3}\frac{d^3\mu}{dy^3}$$
$$+ \frac{x^2y}{2}\frac{d^3\mu}{dx^2dy} + \frac{xy^2}{2}\frac{d^3\mu}{dxdy^2} + \ldots.$$

Abbiasi ora

$$\mu = (x+y)^m,$$

sarà

$$f(x+\delta_1, y+\delta_2) = (x+\delta_1+y+\delta_2)^m,$$

quindi (§. 41.) *avremo*

$$\frac{d\mu}{dx} = m(x+y)^{m-1}, \quad \frac{d^2\mu}{dx^2} = m(m-1)(x+y)^{m-2},$$

$$\nu x\,,\ \nu y\,,\ \nu z\,,\ \ldots,$$

abbiasi

$$f(\nu x\,,\ \nu y\,,\ \nu z\,,\ \ldots) = \nu^k f(x\,,\ y\,,\ z\,,\ \ldots)\ \ldots\ (0''') :$$

$$\frac{d\mu}{dy} = m(x+y)^{m-1}\,,\quad \frac{d^2\mu}{dy^2} = m(m-1)(x+y)^{m-2}\,,$$

$$\frac{d^2\mu}{dx\,dy} = m(m-1)(x+y)^{m-2}\,,$$

$$\frac{d^3\mu}{dx^3} = m(m-1)(m-2)(x+y)^{m-3}\,,$$

ecc. . . ;

laonde sostituendo nella (1) *avremo*

$$(x+\delta_1+y+\delta_2)^m = (x+y)^m + m\delta_1(x+y)^{m-1}x + m\delta_2(+y)^{m-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2}\delta_1^2(x+y)^{m-2} + \frac{m(m-1)}{2}\delta_2^2(x+y)^{m-2}$$
$$+ m(m-1)\delta_1\delta_2(x+y)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\delta_1^3(x+y)^{m-3}$$
$$+ \text{ecc.} \ldots = (x+y)^m + m(x+y)^{m-1}(\delta_1+\delta_2)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2}(x+y)^{m-2}(\delta_1+\delta_2)^2 + \text{ecc.}$$

lo che a puntino coincide con lo sviluppo della potenza $m.^{ma}$ *del binomio*

$$(x+y)+(\delta_1+\delta_2).$$

Inoltre facciasi

$$\mu = f(x\,,\ y) = (x+y)^3 :$$

applicando a questo caso la (2), *troveremo che dopo avere, a forma delle prescrizioni* (§ 63.), *posto lo zero in luogo delle* x, y, *tanto nella* μ, *quanto nelle sue derivate, saranno*

$$\frac{x^3}{2.3}\frac{d^3\mu}{dx^3},\quad \frac{y^3}{2.3}\frac{d^3\mu}{dy^3},\quad \frac{x^2y}{2}\frac{d^3\mu}{dx^2dy},\quad \frac{xy^2}{2}\frac{d^3\mu}{dx\,dy^2},$$

l' esponente k denota il *grado* della funzione omogenea (109).

Ora è facile per simili funzioni dimostrare, che la omogenità della $f(x, y, z, \ldots)$ trae seco (§. 41.) la formola

$$\left.\begin{array}{l} xf'_x(x, y, z, \ldots) + yf'_y(x, y, z, \ldots) + \\ zf'_z(x, y, z, \ldots) + \ldots = kf(x, y, z, \ldots). \end{array}\right\} \quad (o^{IV})$$

Differenziata in fatti la (o''') rapporto alla sola v, nascerà (§. 48.)

$$f'_{vx}(vx, vy, vz, \ldots)xdv + f'_{vy}(vx, vy, vz, \ldots)ydv +$$
$$f'_{vz}(vx, vy, vz, \ldots)zdv + \ldots = kv^{k-1}f(x, y, z, \ldots)dv;$$

la quale rientra nella (o^{IV}), sopprimendo prima il fattor comune dv, e poscia facendo $v = 1$ (110).

---

i soli termini, che nello sviluppo della (2) non si annullano, il quale perciò ne porgerà in tal caso

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

come d' altronde sappiamo dover essere.

Per applicar bene la (2), fa d'uopo esattamente stabilire i termini componenti lo sviluppo della medesima pei casi che si contemplano, e quindi conoscere quali dei termini stessi annullansi, e quali no; ponendo lo zero in luogo delle variabili, secondo che viene prescritto.

(109) *Dicesi adunque omogenea una funzione quando, facendo crescere o decrescere tutte le variabili di essa in un medesimo rapporto, si ottenga il valore primitivo della funzione, moltiplicato pel rapporto medesimo, elevato ad una potenza di grado eguale a quello della funzione omogenea stessa.*

(110) *Per la* (o^{IV}) *siamo abilitati a conchiudere che, moltiplicando ciascuna derivata parziale di una funzione omogenea del grado k, per la variabile cui la derivata medesima si riferisce, la somma di questi prodotti uguaglierà la funzione stessa, moltiplicata per k: ovvero potremo anche dire, che se nel differenziale di una funzione omogenea di grado* $= k$, *si pongano rispettivamente le quantità* x, y, z, ... *in vece delle* dx, dy, dz, ..., *si avrà quella medesima funzione, moltiplicata pel suo grado.*

Abbiasi

$$f(x, y, z) = \tfrac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy),$$

funzione omogenea in cui $k = 2$, *sarà*

Avendôsi $k = 0$, sarà

$$\left.\begin{array}{l} xf'_x(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\ldots) + yf'_y(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\ldots) + \\ zf'_z(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\ldots) + \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{o^V})\,;$$

come può verificarsi nella funzione $\mathrm{L}\left(\frac{x}{y}\right)$ (111).

$$f'_x(x\,,\,y\,,\,z) = ax + ez + fy\,,$$

$$f'_y(x\,,\,y\,,\,z) = by + dz + fx\,,$$

$$f'_z(x\,,\,y\,,\,z) = cz + dy + ex\,,$$

e quindi

$$(ax + ez + fy)x + (by + dz + fx)y + (cz + dy + ex)z =$$
$$= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy).$$

(111) *Dalla* ($\mathrm{o^V}$) *possiamo a buon diritto concludere, che moltiplicando ciascuna derivata parziale di una funzione omogenea di grado zero, per la variabile cui si riferisce la derivata medesima, la somma di questi prodotti sarà nulla. In fatti se abbiasi*

$$f(x\,,\,y) = \frac{x}{y}\,,$$

funzione omogenea in cui $k = 0$; *sarà*

$$f'_x(x\,,\,y) = \frac{1}{y}\,,\quad f'_y(x\,,\,y) = -\frac{x}{y^2}\,,$$

perciò

$$\frac{1}{y}\cdot x - \frac{x}{y^2}\cdot y = \frac{x}{y} - \frac{x}{y} = 0.$$

Abbiasi da ultimo

$$f(x\,,\,y) = \mathrm{L}\left(\frac{x}{y}\right),$$

avremo per questa funzione omogenea di grado zero

$$f'_x(x\,,\,y) = \frac{1}{x}\,,\quad f'_y(x\,,\,y) = -\frac{1}{y}\,;$$

RESIDUI DELLE FUNZIONI, DECOMPOSIZIONI DELLE FRAZIONI RAZIONALI IN ALTRE PIU' SEMPLICI, E SERIE DI LAGRANGE.

65.

Rappresentino x_1, x_2, x_3, ... le radici dell'equazione

$$\frac{1}{f(x)} = 0 \ldots (g);$$

e 1.° sieno ineguali. Sebbene debba essere

$$f(x_1) = \infty, \quad f(x_2) = \infty, \quad f(x_3) = \infty, \text{ ecc.} \ldots;$$

potranno tuttavia (§. 27.) le

$$(x_1 - x_1)f(x_1), \quad (x_2 - x_2)f(x_2), \quad (x_3 - x_3f(x_3), \text{ ecc.} \ldots$$

ricevere un valor determinato. In questa ipotesi poniamo

$$\left.\begin{array}{l} (x - x_1)f(x) = \mathrm{f}(x), \ (x - x_2)f(x) = \mathrm{f}_1(x), \ \text{ecc.} \ldots, \\ \text{donde} \\ f(x) = \dfrac{\mathrm{f}(x)}{x - x_1}, \ f(x) = \dfrac{\mathrm{f}_1(x)}{x - x_2}, \ \text{ecc.} \ldots, \end{array}\right\} (g')$$

e denotando θ una quantità infinitesima, sostituiscasi ad x nella prima $x_1 + \theta$; nella seconda $x_2 + \theta$; ecc. ..., si avranno (§. 23. q^{VIII}) le

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1 + \theta) = \dfrac{\mathrm{f}(x_1 + \theta)}{\theta} = \dfrac{1}{\theta}\,\mathrm{f}(x_1) + \mathrm{f}'(x_1 + \varepsilon\theta), \\ f(x_2 + \theta) = \dfrac{\mathrm{f}_1(x_2 + \theta)}{\theta} = \dfrac{1}{\theta}\,\mathrm{f}_1(x_2) + \mathrm{f}'_1(x_2 + \varepsilon\theta), \end{array}\right\} (g'')$$

ecc. ... (112)

---

perciò

$$\frac{x}{x} - \frac{y}{y} = 0.$$

(112) *Tanto nella* (q^{VIII}) (§. 23.), *quanto nella* (q^{VI}) (§. 21.) *facendo* $m = 1$, *si avranno le* (g'').

2.° abbia l' equazione (g) due, tre, o più, e generalmente n radici, ognuna $= x_1$; ne abbia m ognuna $= x_2$; ecc. . . . ; poste le

$$\left.\begin{array}{l}(x-x_1)^n f(x) = \mathrm{f}(x),\ (x-x_2)^m f(x) = \mathrm{f}_1(x),\ \text{ecc....}\\ \text{donde le}\\ f(x) = \dfrac{\mathrm{f}(x)}{(x-x_1)^n},\ f(x) = \dfrac{\mathrm{f}_1(x)}{(x-x_2)^m},\ \text{ecc.}\ldots;\end{array}\right\}(g''')$$

e sostituite rispettivamente le $x_1 + \theta$, $x_2 + \theta$, ... ad x, nascerà (§. 23. q^{VIII}) la

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1+\theta) = \dfrac{\mathrm{f}(x_1+\theta)}{\theta^n} = \dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{f}(x_1) + \dfrac{1}{\theta^{n-1}}\dfrac{\mathrm{f}'(x_1)}{1} + \\ \dfrac{1}{\theta^{n-2}}\dfrac{\mathrm{f}''(x_1)}{1.2} + \ldots + \dfrac{1}{\theta}\dfrac{\mathrm{f}^{(n-1)}(x_1)}{1.2\ldots(n-1)} + \dfrac{\mathrm{f}^{(n)}(x_1+\varepsilon\theta)}{1.2\ldots n},\end{array}\right\}(g^{\text{IV}})$$

ecc. . . .

I coefficienti

$$\mathrm{f}(x_1),\quad \mathrm{f}_1(x_2),\ \ldots$$

della quantità $\frac{1}{\theta}$ nel primo caso, ed i coefficienti

$$\frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(x_1)}{1.2\ldots(n-1)},\quad \frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(x_2)}{1.2\ldots(m-1)},\ \ldots$$

della stessa $\frac{1}{\theta}$ nel secondo, sono detti dal Sig. Cauchy *residui* della funzione $f(x)$, rispetto, $x = x_1$, $x = x_2$, . . . (113).

---

(113) *Pertanto dopo aver cercato i valori della* x, *che rendono infinita la* $f(x)$, *ossia che soddisfano alla equazione*

$$\frac{1}{f(x)} = 0,$$

se ad uno di questi, espresso per x_1, *si aggiunga l' infinitesimo* θ, *e quindi si sviluppi* $f(x_1+\theta)$ *secondo le potenze di* $\frac{1}{\theta}$, *come trovasi eseguito nelle* (g''), (g^{IV}), *avremo in tale sviluppo un termine, che sarà il prodotto di* $\frac{1}{\theta}$ *per un*

66.

Determinando siffatti coefficienti diciamo di *estrarre* i residui dalla funzione $f(x)$, ovvero, lo che torna allo stesso, dalle

$$\frac{(x - x_1)\, f(x)}{x - x_1}, \quad \frac{(x - x_2)\, f(x)}{x - x_2}, \ldots ;$$

---

coefficiente finito, detto residuo *della funzione $f(x)$, relativo al valor particolare x_1, della variabile x; quindi è facile d' ordinario effettuare la ricerca dei residui di $f(x)$. E quì sarà utile avvertire che siffatta specie di residui, si presentano di per loro in molti rami di analisi, tanto algebrica, quanto infinitesimale; e che la considerazione dei medesimi fornisce de' metodi semplici, e di facile uso, applicabili a moltissime diverse questioni, e somministra delle formole nuove da meritare l' attenzione dei geometri. Così può immediatamente dedursi dal calcolo dei residui: la formola d' interpolazione di Lagrange; la decomposizione delle frazioni razionali nel caso di radici eguali o ineguali; alcune formole generali, proprie a determinare i valori degl' integrali definiti; la somma di moltissime serie, particolarmente di quelle periodiche; la integrazione dell' equazioni lineari a differenze finite, o infinitamente piccole, ed a coefficienti costanti, aventi o no l' ultimo termine variabile, dalla quale integrazione dipende lo scioglimento di molte importanti questioni della fisica matematica; la serie di Lagrange, ed altre del medesimo genere; la soluzione dell' equazioni algebriche o trascendenti; ecc. . . . Però questi coefficienti, chiamati residui, sono generalmente nulli, eccetto per valori particolari della variabile x; a differenza del coefficiente finito dell' incremento infinitesimo della variabile indipendente x in $f(x)$, nomato (§. 13.) coefficiente differenziale, o funzione derivata, il quale sussiste qualunque sia x, e non può annullarsi costantemente, salvo il caso in cui la funzione proposta riducasi (§. 8.) ad una costante.*

Dal precedente ragionamento si scorge quale analogia passi fra i coefficienti detti residui, ed i coefficienti differenziali. Siccome poi l'essenza del calcolo infinitesimale tutta è riposta nella ricerca dei differenziali, e delle proprietà loro; come quella del calcolo dei residui tutta consiste nella estrazione dei medesimi, e nella indagine di quanto essi con-

inoltre la estrazione dei residui viene indicata dalla lettera $\mathcal{E}$, per modo che le seguenti espressioni

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))},\quad \mathcal{E}\frac{(x-x_2)f(x)}{((x-x_2))},\ \ldots$$

esprimono i residui *parziali* della funzione $f(x)$ rispetto $x=x_1$, rispetto $x=x_2$, ...; da ultimo la somma dei residui tutti rispetto $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, ecc. ... viene rappresentata con

$$\mathcal{E}((f(x)))\quad (114).$$

---

cerne; così dal precedente ragionamento deriva una delle molte analogie fra questi due calcoli. Osservando poi, come in appresso verrà dimostrato, che (§. 67. 8.°) *il residuo* integrale *della somma di più funzioni eguaglia la somma dei residui integrali di ognuna delle medesime; che* (§. 67. 2.°) *il residuo integrale di una funzione moltiplicata per una costante, uguaglia la costante nel residuo integrale della funzione; che* (§. 67. 2.°) *il residuo integrale del prodotto di due funzioni eguaglia la somma dei prodotti di ogni funzione nel residuo integrale dell' altra; e paragonando questi risultamenti del calcolo dei residui, con quelli simili del calcolo infinitesimale* (§. 8 : 6. 2.° 9.), *scorgeremo altre analogie fra i calcoli medesimi.*

(114) *La somma dei residui per tutte le radici della* (1) *dicesi* residuo integrale: *osserveremo che per indicare il residuo di* $f(x)$ *rispetto ad alcuni soli valori, come per es. rispetto ad*

$$x=x_1,\quad x=x_2,\quad x=x_3,$$

dovremo valerci della notazione

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f(x)}{(((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)))}.$$

In fine sarà utile conoscere che il chiaro geometra Sig. Cauchy per vie più semplicizzare la notazione di questo suo calcolo, ha sostituito alle doppie parentesi semicircolari le semplici trapeziali, apponendo alla parentesi destra ed in basso la variabile cui si riferisce il segno $\mathcal{E}$, *come trovasi avvertito nei conti resi dell' accademia delle scienze di Parigi T. XIII. p.* 181., *e poscia praticato nel seguito del tomo stesso.*

Laonde se (g) sia priva di radici eguali, saranno le

Pertanto la iniziale $\mathcal{E}$ *dovrà considerarsi come un simbolo nuovo, analogo ai già introdotti* Δ, d, *ed agli altri* $\int$, Σ, *che in seguito s' introdurranno.*

Esempj.

I.º Abbiasi

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)},$$

saranno

$$x = x_1 = 1\,,\quad x = x_2 = -1$$

i due valori da rendere infinita la $f(x)$, *cioè saranno essi le due radici della equazione*

$$\frac{1}{f(x)} = 0\,;$$

perciò avremo (§. 65. g') *le*

$$(x - x_1)f(x) = (x-1)f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} = \mathrm{f}(x)\,,$$

$$(x - x_2)f(x) = (x+1)f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = \mathrm{f}_1(x)\,,$$

donde (§. 66.) *otteniamo*

$$\mathcal{E}\frac{(x-1)f(x)}{((x-1))} = \mathrm{f}(x_1) = 1\,,\quad \mathcal{E}\frac{(x+1)f(x)}{((x+1))} = \mathrm{f}_1(x_2) = -1\,;$$

ed anche (§. 66. g^{v}) *sarà*

$$\mathcal{E}((f(x))) = \mathrm{f}(x_1) + \mathrm{f}_1(x_2) = 0.$$

II.º Sia

$$f(x) = \frac{1}{\cos x},$$

sarà

$$x = x_1 = \frac{\pi}{2}$$

un valore da rendere l' attuale $f(x)$ *infinita, cioè sarà esso una radice della*

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{E}\dfrac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}=\mathrm{f}(x_1)\,,\quad \mathcal{E}\dfrac{(x-x_2)f(x)}{((x-x_2))}=\mathrm{f}_1(x_2),\ \ldots (115)\,,\\ \mathcal{E}((f(x)))=\mathrm{f}(x_1)+\mathrm{f}_1(x_2)+\mathrm{f}_2(x_3)+\ldots\ldots;\end{array}\right\}(g^{\mathrm{v}})$$

$$\frac{1}{f(x)}=0\,,$$

ed avremo (§. 65. (g'))

$$(x-x_1)f(x)=(x-\frac{\pi}{2})f(x)=(x-\frac{\pi}{2})\frac{1}{\cos x}=\mathrm{f}(x)\,;$$

ma il prodotto

$$(x-\frac{\pi}{2})\frac{1}{\cos x}\,,$$

ricevendo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, *per* $x=\frac{\pi}{2}$, *sarà facile* (§. 26. g) *trovare che il medesimo, per questo valore della* x, *diviene* $=-1$; *dunque* (§. 66.) *avremo*

$$\mathcal{E}\frac{(x-\frac{\pi}{2})f(x)}{((x-\frac{\pi}{2}))}=\mathrm{f}(x_1)=-1.$$

III.ª Pongasi

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{x+1}\,,$$

sarà $x=x_1=-1$ *il valore, che verifica l' equazione*

$$\frac{1}{f(x)}=0\,;$$

perciò avremo (§. 65. g') *la eguaglianza*

$$(x-x_1)f(x)=(x+1)f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1=\mathrm{f}(x)\,,$$

e per conseguenza (§. 66.) *sarà*

$$\mathcal{E}\frac{(x+1)f(x)}{((x+1))}=\mathrm{f}(x_1)=-2.$$

(115) ***Paragonando** le prime* (g^{v}) *con le* (g''), *potremo concludere che i residui*

e nella ipotesi di n radici ognuna $= x_1$, sarà

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))} = \mathcal{E}\frac{(x-x_1)^n f(x)}{(([x-x_1]^n))} = \frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(x_1)}{1.2...(n-1)} \quad (116), \\ &\mathcal{E}((f(x))) = \frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(n-1)}{1.2...(n-1)} + \mathrm{f}_1(x_2) + \mathrm{f}_2(x_3) + \ldots \end{aligned}\right\} (g^{\text{VI}})$$

67.

Si noti ciò che siegue: 1.° Dalla (g'') abbiamo

$$\mathrm{f}(x_1) = \lim.\theta[f(x_1+\theta) - \mathrm{f}'(x_1+\varepsilon\theta)] = \lim.\theta f(x_1+\theta) \quad (117),$$

$$\mathrm{f}(x_1), \quad \mathrm{f}(x_2), \ldots$$

della funzione $f(x)$ relativi, ad

$$x = x_1, \quad x = x_2, \text{ ecc.} \ldots,$$

coincidono coi valori delle

$$\theta f(x_1+\theta), \quad \theta f(x_2+\theta), \text{ ecc.} \ldots$$

fatto in essi $\theta = 0$; e che per avere i residui della funzione stessa, rapporto alle radici ineguali reali, od immaginarie, basterà formare altrettanti prodotti simili ai primi membri delle prime (g'), e quindi porre in essi la corrispondente radice in luogo della variabile.

(116) *Per la prima delle (g^{VI}) chiaro apparisce, che potremo valerci della notazione*

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}$$

ad esprimere il residuo di $f(x)$, relativo al valore x_1, tanto se questo sia radice semplice, quanto se ripetuta, della equazione

$$\frac{1}{f(x)} = 0,$$

però avvertendo, che quel residuo dovrà calcolarsi, nel primo caso mediante la prima delle (g^{V}), nel secondo mediante la prima delle (g^{VI}).

(117) *In fatti dalla prima (g'') abbiamo le*

$$\mathrm{f}(x_1) = \theta[f(x_1+\theta) - \mathrm{f}'(x_1+\varepsilon\theta)],$$

$$\mathrm{f}(x_1+\theta) = \theta f(x_1+\theta).$$

ovvero

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}=\lim.\ \theta f(x_1+\theta)\quad (118).$$

2.° Quindi se il particolar valore x_0 non dia

$$f(x)=\infty,$$

sarà

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_0)f(x)}{((x-x_0))}=\lim.\theta f(x_0+\theta)=0\,;$$

cioè il residuo della funzione $f(x)$ rispetto $x=x_0$ diverrà $=0$ (119);

Ora poichè $\mathrm{f}(x_1)$ *e* $\lim.\mathrm{f}(x_1)$ *sono la stessa cosa, otterremo dalla prima*

$$\mathrm{f}(x_1)=\lim.\theta[f(x_1+\theta)-\mathrm{f}'(x_1+\varepsilon\theta)]\,;$$

inoltre dalla seconda si ottiene

$$\mathrm{f}(x_1)=\lim.\theta f(x_1+\theta),$$

dunque da tutto ciò, avremo tosto la sopra indicata eguaglianza.

(118) *Da siffatta equazione apprendiamo come rappresentare, mediante il simbolo* $\mathcal{E}$, *l' espressione*

$$\lim.\theta f(x_1+\theta)\,;$$

e viceversa, come per mezzo del simbolo lim., *l' espressione*

$$\mathcal{E}\frac{(x-x^1)f(x)}{((x-x_1))}\,;$$

però essendo in ogni caso

$$f(x)=\infty \text{ per } x=x_1.$$

(119) *Dalle precedenti espressioni deriva che avendosi*

$$f(x)=\frac{\chi(x)}{\varphi(x)},$$

e volendosi esprimere la somma de' residui di $f(x)$ *rapporto alle radici dell' equazione*

$$\varphi(x)=0,$$

3.° Se pongasi

$$f(x) = \frac{\chi(x)}{\varphi(x)},$$

---

sarà questa somma indicata da

$$\mathcal{E}\frac{\chi(x)}{((\varphi(x)))}.$$

Volendosi poi denotare la somma stessa rapporto alle radici dell' equazione

$$\frac{1}{\chi(x)} = 0,$$

dovremo valerci della espressione

$$\mathcal{E}\frac{((\chi(x)))}{\varphi(x)}.$$

Perciò la somma dei residui di $f(x)$, relativi a tutte le radici della

$$\frac{1}{f(x)} = 0,$$

viene di necessità rappresentata da

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}\right)\right) = \mathcal{E}\frac{\chi(x)}{((\varphi(x)))} + \mathcal{E}\frac{((\chi(x)))}{\varphi(x)}.$$

Inoltre se fosse

$$\varphi(x) = \Phi(x)\,\psi(x),$$

le due seguenti notazioni

$$\mathcal{E}\frac{\chi(x)}{((\Phi(x)))\psi(x)}, \quad \mathcal{E}\frac{\chi(x)}{\Phi(x)((\psi(x)))},$$

esprimono rispettivamente le somme dei residui di $f(x)$, rapporto alle radici dell' equazioni

$$\Phi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0,$$

cosicchè avremo

$$\mathcal{E}\frac{\chi(x)}{((\Phi(x)\psi(x)))} = \mathcal{E}\frac{\chi(x)}{((\Phi(x)))\psi(x)} + \mathcal{E}\frac{\chi(x)}{\Phi(x)((\psi(x)))}.$$

ed inoltre x_1 sia radice dell' equazione

$$\varphi(x) = 0,$$

sarà (1.°)

$$f(x_1) = \lim.\theta \frac{\chi(x_1 + \theta)}{\varphi(x_1 + \theta)};$$

perciò (§. 23. q^{VIII}) avremo

$$f(x_1) = \lim.\theta \frac{\chi(x_1 + \theta)}{\varphi(x_1) + \theta\varphi'(x_1 + \varepsilon\theta)} = \frac{\chi(x_1)}{\varphi'(x_1)} \quad (120),$$

ovvero

Gioverà quindi osservare che, fatto in vece

$$\chi(x) = \Phi(x)\,\psi(x),$$

i due termini del secondo membro della equazione

$$\mathcal{E}\frac{((\Phi(x)\psi(x)))}{\varphi(x)} = \mathcal{E}\frac{((\Phi(x)))\psi(x)}{\varphi(x)} + \mathcal{E}\frac{\Phi(x)((\psi(x)))}{\varphi(x)},$$

esprimono rispettivamente la somma dei residui di $f(x)$ *rapporto alle radici dell' equazioni*

$$\frac{1}{\Phi(x)} = 0, \quad \frac{1}{\psi(x)} = 0.$$

Sarà inoltre facile dedurre dalla precedente equazione, come caso particolare, l' altra

$$\mathcal{E}((\Phi(x)\psi(x))) = \mathcal{E}((\Phi(x)))\psi(x) + \mathcal{E}\Phi(x)((\psi(x))),$$

la quale offre una evidente analogia (§. 9.) coll' equazione differenziale

$$d(st) = tds + sdt;$$

e se $\Phi(x)$ *divenga una costante* $= a$, *potremo facilmente stabilire*

$$\mathcal{E}((a\psi(x))) = a\mathcal{E}((\psi(x))),$$

equazione analoga (§. 6. 2.°) alla

$$d.ax = adx.$$

(120) *Si ottiene questo risultamento avvertendo essere*

$$\varphi(x_1) = 0.$$

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}=\frac{\chi(x_1)}{\varphi'(x_1)} \quad (121).$$

---

(121) *Che se le radici della*

$$\varphi(x)=0$$

sieno x_1, x_2, x_3, ..., *sarà evidentemente*

$$\mathcal{E}\frac{\chi(x)}{((\varphi(x)))}=\frac{\chi(x_1)}{\varphi'(x_1)}+\frac{\chi(x_2)}{\varphi'(x_2)}+\frac{\chi(x_3)}{\varphi'(x_3)}+\dots$$

Da questa equazione si ottiene facilmente la seguente

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(x)+\chi(x)+\psi(x)+\dots}{((\mathrm{F}(x)))}=$$

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((\mathrm{F}(x)))}+\mathcal{E}\frac{\chi(x)}{((\mathrm{F}(x)))}+\mathcal{E}\frac{\psi(x)}{((\mathrm{F}(x)))}+\dots;$$

in fatti, se le radici della

$$\mathrm{F}(x)=0$$

sieno x_1, x_2, x_3, ..., *sarà*

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(x)+\chi(x)+\dots}{((\mathrm{F}(x)))}=\frac{\varphi(x_1)+\chi(x_1)+\psi(x_1)+\dots}{\mathrm{F}'(x_1)}$$

$$+\frac{\varphi(x_2)+\chi(x_2)+\psi(x_2)+\dots}{\mathrm{F}'(x_2)}$$

$$+\frac{\varphi(x_3)+\chi(x_3)+\psi(x_3)+\dots}{\mathrm{F}'(x_3)}$$

+ *ecc.* ...

$$=\frac{\varphi(x_1)}{\mathrm{F}'(x_1)}+\frac{\varphi(x_2)}{\mathrm{F}'(x_2)}+\frac{\varphi(x_3)}{\mathrm{F}'(x_3)}+\dots$$

$$+\frac{\chi(x_1)}{\mathrm{F}'(x_1)}+\frac{\chi(x_2)}{\mathrm{F}'(x_2)}+\frac{\chi(x_3)}{\mathrm{F}'(x_3)}+\dots$$

$$+\frac{\psi(x_1)}{\mathrm{F}'(x_1)}+\frac{\psi(x_2)}{\mathrm{F}'(x_2)}+\frac{\psi(x_3)}{\mathrm{F}'(x_3)}+\dots$$

+ *ecc.* ...

$$=\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((\mathrm{F}(x)))}+\mathcal{E}\frac{\chi(x)}{((\mathrm{F}(x)))}+\mathcal{E}\frac{\psi(x)}{((\mathrm{F}(x)))}+\dots$$

4.° Poichè (§. 65. g^{IV}) si ha

$$\mathrm{f}(x_1+\theta)=\theta^n f(x_1+\theta),$$

perciò

$$\frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(x_1)}{1.2\ldots(n-1)}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^{n-1}[\theta^n f(x_1+\theta)]}{d\theta^{n-1}} \quad (122);$$

purchè a differenziazioni eseguite pongasi $\theta=0$.

---

(122) *Paragonando questa formola con la prima della* (g^{VI}), *potremo dire che* (§. 65.) *i residui*

$$\frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(x_1)}{1.2\ldots(n-1)},\quad \frac{\mathrm{f}_1{}^{(m-1)}(x_2)}{1.2\ldots(m-1)},\ \text{ecc.}\ldots$$

della $f(x)$ *rapporto ad*

$$x=x_1,\quad x=x_2,\ldots,$$

tornano rispettivamente in quello che divengano l' espressioni

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^{n-1}[\theta^n f(x_1+\theta)]}{d\theta^{n-1}},$$

$$\frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\cdot\frac{d^{m-1}[\theta^m f(x_2+\theta)]}{d\theta^{m-1}},$$

ecc. . . . .

purchè, dopo eseguite le differenziazioni, si faccia in esse $\theta=0$. *Quindi per avere il residuo di* $f(x)$ *riguardo alle radici ripetute, reali od immaginarie, della*

$$\frac{1}{f(x)}=0,$$

basterà formare i prodotti già indicati mediante le prime (g'''); *calcolare da ognuno di essi la derivata dell' ordine uguale al numero delle ripetizioni della relativa radice meno uno; dividere pel prodotto dei numeri naturali dall' unità sino al numero suddetto, parimente diminuito di uno; da ultimo porre la rispettiva radice in luogo della variabile: ovvero basterà calcolare da ognuno dei prodotti*

$$\theta^n f(x_1+\theta),\quad \theta^m f(x_2+\theta),\ \ldots$$

la derivata dell' ordine sopra espresso; dividerla pel suindicato prodotto; e finalmente porre $\theta=0$.

5.° La prima delle (g^{v}), e la prima della (g^{vi}) coincidono (§. 65. $g' \cdot g''$) nelle

$$\mathcal{E}\frac{f(x)}{((x-x_1))}=f(x_1),\quad \mathcal{E}\frac{f(x)}{(([x-x_1]^n))}=\frac{f^{(n-1)}(x_1)}{1.2\ldots(n-1)};$$

le quali, posto z ed $n+1$ per x ed n, daranno le

$$\mathcal{E}\frac{f(z)}{((z-x_1))}=f(x_1),\quad \mathcal{E}\frac{f(z)}{(([z-x_1]^{n+1}))}=\frac{f^{(n)}(x_1)}{1.2\ldots n}.$$

6.° Poichè (§. 10.) abbiamo

$$\frac{d\left[\frac{\chi(z)}{z-x}\right]}{dz}=\frac{\chi'(z)}{z-x}-\frac{\chi(z)}{(z-x)^2},$$

$$\frac{d\left[\frac{\chi(z)}{(z-x)^n}\right]}{dz}=\frac{\chi'(z)}{(z-x)^n}-\frac{n\chi(z)}{(z-x)^{n+1}},$$

perciò (5.°) i residui delle funzioni

Inoltre dall' equazione superiore possiamo dedurre

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)^n f(x)}{(([x-x_1]^n))}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\lim.\frac{d\theta^{n-1}[\theta^n f(x_1+\theta)]}{d\theta^{n-1}},$$

da cui si apprende come rappresentare per mezzo del simbolo $\mathcal{E}$ *l' espressione*

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\lim.\frac{d\theta^{n-1}[\theta^n f(x_1+\theta)]}{d\theta^{n-1}},$$

e viceversa, come per mezzo del simbolo lim. *l' espressione*

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)^n f(x)}{(([x-x_1]^n))};$$

ben inteso che in ambedue questi casi l' equazione

$$\frac{1}{f(x)}=0$$

ammetta n radici, ognuna $=x_1$; tutto ciò analogamente a quanto fu osservato (1.°) con la nota 118.

$$\frac{d\left[\frac{\chi(z)}{z-x}\right]}{dz}\,, \quad \frac{d\left[\frac{\chi(z)}{(z-x)^n}\right]}{dz}\,,$$

rispetto $z = x$, saranno

$$\chi'(x) - \chi'(x) = 0\,, \quad \frac{\chi^{(n)}(x)}{1.2\ldots(n-1)} - \frac{\chi^{(n)}(x)}{1.2\ldots(n-1)} = 0.$$

7.° Dunque poichè (§. 9.) si ha

$$f(z)\frac{d\left[\frac{\chi(z)}{z-x}\right]}{dz} = \frac{d\left[\frac{f(z)\chi(z)}{z-x}\right]}{dz} - f'(z)\frac{\chi(z)}{z-x}\,,$$

$$f(z)\frac{d\left[\frac{\chi(z)}{(z-x)^n}\right]}{dz} = \frac{d\left[\frac{f(z)\chi(z)}{(z-x)^n}\right]}{dz} - f'(z)\frac{\chi(z)}{(z-x)^n}\,,$$

perciò i residui delle funzioni

$$f(z)\frac{d\left[\frac{\chi(z)}{z-x}\right]}{dz}\,, \quad f(z)\frac{d\left[\frac{\chi(z)}{(z-x)^n}\right]}{dz}\,,$$

rispetto $z = x$, saranno (6.°) i seguenti

$$-\mathcal{E}\frac{f'(z)\chi(z)}{((z-x))}\,, \quad -\mathcal{E}\frac{f'(z)\chi(z)}{(([z-x]^n))}\,,$$

ovvero (5.°)

$$-f'(x)\chi(x)\,, \quad -\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}[f'(x)\chi(x)]}{dx^{n-1}}.$$

8.° Posto

$$f(z) = \varphi(z) + \chi(z) + \ldots\,,$$

sarà (§. 65 : 66)

$$\mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{E}((\varphi(z))) + \mathcal{E}((\chi(z))) + \ldots \quad (123).$$

---

(123) *In fatti l' equazione*

$$\frac{1}{f(z)} = 0$$

68.

Nella (g^{IV}) sostituiscasi $x - x_1$ in vece di θ ; sarà (124)

$$f(x) = \frac{\mathrm{f}(x_1)}{(x-x_1)^n} +$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{\mathrm{f}'(x_1)}{(x-x_1)^{n-1}} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{\mathrm{f}''(x_1)}{(x-x_1)^{n-2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(x_1)}{x-x_1} +$$

---

sarà verificata dalle radici di tutte le seguenti

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 0\,, \quad \frac{1}{\chi(z)} = 0\,, \quad \frac{1}{\psi(z)} = 0\,;$$

perciò chiamando x_1, x_2, x_3, ... *le radici dell' equazione prima*; y_1, y_2, y_3, ... *quelle della seconda*; z_1, z_2, z_3, ... *quelle della terza*; *ecc.* ...; *sarà evidente che qualunque delle prime, delle seconde, delle terze, ecc.* ... *radici si ponga in luogo di* z *nella funzione*

$$\varphi(z) + \chi(z) + \psi(z) + \ldots,$$

si dovranno i termini della funzione medesima riguardare tutti nulli rispetto $\varphi(z)$ *nel primo caso*; *rispetto* $\chi(z)$ *nel secondo*; *rispetto* $\psi(z)$ *nel terzo*; *ecc.* ...; *laonde* (§. 65: 66) *avremo*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}((\varphi(z)+\chi(z)+\psi(z)+\ldots)) &= (x_1 - x_1)\varphi(x_1) + (x_2 - x_2)\varphi(x_2) + \ldots \\ &+ (y_1 - y_1)\chi(y_1) + (y_2 - y_2)\chi(y_2) + \ldots \\ &+ (z_1 - z_1)\psi(z_1) + (z_2 - z_2)\psi(z_2) + \ldots \\ &+ \ldots\ldots \\ &= \mathcal{E}((\varphi(z))) + \mathcal{E}((\chi(z))) + \mathcal{E}((\psi(z))) + \ldots\end{aligned}$$

Dunque se $f(z)$ *è la somma di più funzioni* $\varphi(z)$, $\chi(z)$, $\psi(z)$, ..., *il residuo integrale di essa, uguaglierà la somma de' residui integrali di ognuna delle medesime.*

(124) *Qui cominciano le applicazioni della teorica de' residui, primieramente a trasformare le funzioni che divengono infinite per certi valori*; *secondariamente a decomporre le frazioni razionali in altre più semplici*; *da ultimo a dimostrare la serie di Lagrange.*

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}\,.\,\mathrm{f}^{(n)}[x_1+\varepsilon(x-x_1)\,].$$

Abbiamo poi (§. 67. 5.° 8.°) la seguente uguaglianza

$$\frac{\mathrm{f}(x_1)}{(x-x_1)^n}+\frac{1}{1}\,.\,\frac{\mathrm{f}'(x_1)}{(x-x_1)^{n-1}}+$$

$$\frac{1}{1.2}\,.\,\frac{\mathrm{f}''(x_1)}{(x-x_1)^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,.\,\frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(x_1)}{x-x_1}=$$

$$\frac{1}{(x-x_1)^n}\,\mathcal{E}\,\frac{\mathrm{f}(z)}{((z-x_1))}+\frac{1}{(x-x_1)^{n-1}}\,\mathcal{E}\,\frac{\mathrm{f}(z)}{(([z-x_1]^2))}+$$

$$\ldots+\frac{1}{x-x_1}\,\mathcal{E}\,\frac{\mathrm{f}(z)}{(([z-x_1]^n))}=$$

$$\mathcal{E}\,\frac{\mathrm{f}(z)}{(x-x_1)^n(([z-x_1]^n))}\,[\,(z-x_1)^{n-1}+(x-x_1)$$

$$(z-x_1)^{n-2}+(x-x_1)^2(z-x_1)^{n-3}+\ldots+(x-x_1)^{n-1}]=$$

$$\mathcal{E}\,\frac{\mathrm{f}(z)}{(x-x_1)^n(([z-x_1]^n))}\,.\,\frac{(x-x_1)^n-(z-x_1)^n}{x-z}=$$

$$\mathcal{E}\,\frac{\mathrm{f}(z)}{(x-z)(([z-x_1]^n))}-\frac{1}{(x-x_1)^n}\,\mathcal{E}\,\frac{(z-x_1)^n\mathrm{f}(z)}{(x-z)(([z-x_1]^n))}\;(125),$$

---

(125) *Abbiamo* (p. 1.ª §. 102. nota 39.) *l' equazione seguente*

$$a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\ldots+b^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b}\;;$$

dalla quale, se pongasi

$$a=z-x_1\,,\quad b=x-x_1\,,$$

si avrà

$$(z-x_1)^{n-1}+(x-x_1)(z-x_1)^{n-2}+(x-x_1)^2(z-x_1)^{n-3}$$
$$+\ldots+(x-x_1)^{n-1}=$$
$$\frac{(z-x_1)^n-(x-x_1)^n}{z-x}=\frac{(x-x_1)^n-(z-x_1)^n}{x-z}\,,$$

lo che serve a dichiarare il penultimo membro della superiore uguaglianza.

in cui

$$\mathcal{E}\frac{(z-x_1)^n f(z)}{(x-z)(([z-x_1]^n)}\ , \ \text{ovvero}\ \mathcal{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)((z-x_1)}$$

ne porge il residuo della funzione

$$\frac{f(z)}{x-z}$$

rapporto a $z=x_1$; il qual residuo (§. 67. 2.°) sappiamo essere $=0$ (126): dunque

$$\frac{f(x_1)}{(x-x_1)^n}+\frac{1}{1}\cdot\frac{f'(x_1)}{(x-x_1)^{n-1}}+$$

$$\frac{1}{1.2}\cdot\frac{f''(x_1)}{(x-x_1)^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{f^{(n-1)}(x_1)}{x-x_1}=$$

$$\mathcal{E}\frac{f(z)}{(x-z)\ (([z-x_1]^n))}.$$

Facciasi

$$\frac{f^{(n)}(x_1+\varepsilon(x-x_1))}{1.2.3\ldots n}=\psi(x)\ \ldots\ (g^{\text{VII}})\ ;$$

otterremo

$$f(x)=\mathcal{E}\frac{f(z)}{(x-z)(([z-x_1]^n))}+\psi(x)\ ;$$

e perciò (§. 65. g''')

$$f(x)-\mathcal{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)((z-x_1))}=\psi(x)\ \ldots\ (g^{\text{VIII}})\ (127).$$

---

(126) *In fatti la funzione*

$$\frac{f(z)}{x-z}$$

conserva, per $z=x_1$, *un valore finito, espresso da*

$$\frac{f(x_1)}{x-x_1}.$$

(127) *Possiamo* (§. 65. g''') *stabilire*

69.

Ora potrà facilmente stabilirsi quanto siegue. 1.° fatto $x = x_1$, sarà (§. 68. g^{VII})

$$\psi(x_1) = \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_1)}{1.2.3\ldots n};$$

cioè la funzione $\psi(x_1)$ riceve un valore finito (128): perciò

$$\mathrm{f}(z) = (z - x_1)^n f(z),$$

perciò in luogo di

$$\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{(x-z)((\left[z-x_1\right]^n))},$$

potrà scriversi

$$\mathcal{E}\frac{(z-x_1)^n f(z)}{(x-z)((\left[z-x_1\right]^n))};$$

ovvero si potrà, lo che (§. 66. g^{VI}) *viene allo stesso, in quella vece porre*

$$\mathcal{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)((z-x_1))},$$

e così avere la (g^{VIII}), *la quale paragonata con la prima equazione di questo paragrafo, ne mostra che l' espressione*

$$\mathcal{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)((z-x_1))},$$

equivale ad una somma di frazioni razionali. Perciò concludiamo che per ottenere dalla funzione $f(x)$, che diviene infinita per $x = x_1$, un' altra funzione $\psi(x)$, di valore finito per la medesima ipotesi, basterà sottrarre da $f(x)$ una somma di frazioni razionali, equivalente al residuo della funzione

$$\frac{f(z)}{x-z},$$

relativo a $z = x_1$.

(128) *Onde abbia vigore la formola* (q^{VIII}) (§. 23.), *il fattore*

(§. 68. g^{VIII}) sebbene $f(x)$ divenga infinita quando $x = x_1$, pure la differenza tra $f(x_1)$ ed il residuo della funzione

$$\frac{f(z)}{x - z},$$

relativamente a $z = x_1$, rimarrà finita per la medesima sostituzione $x = x_1$ (129). 2.° esprimendo adunque

$$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x - z}$$

$$f^{(m)}(z + \varepsilon\delta)$$

dell' ultimo suo termine, dev' esser tale, da rimanere finito, e diverso dallo zero per $\delta = 0$; *ma la* (g^{IV}) (§. 65.) *è un applicazione della* (g^{III}) *medesima, dunque in essa il fattore*

$$f^{(n)}(x_1 + \varepsilon\delta)$$

dovrà pur essere finito, e diverso dallo zero, per $\theta = 0$; *e tale anche dovrà essere, per* $x = x_1$, *il fattore*

$$f^{(n)}[x_1 + \varepsilon(x - x_1)],$$

che trovasi nella prima equazione del §. 68, *la quale dalla indicata* (g^{IV}) *discende: dunque ancora la*

$$\psi(x_1) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{1.2.3\ldots n}$$

dovrà, per ipotesi, riguardarsi come una quantità generalmente finita, e diversa dallo zero.

(129) *Adunque per dedurre dalla* $f(x)$, *che diviene infinita quando si ponga in essa* $x = x_1$, *un altra funzione, la quale per la medesima ipotesi conservi un valore finito, basterà sottrarre da* $f(x)$ *la somma dei termini equivalenti all' espressione*

$$\mathcal{E}\frac{(z - x_1)f(z)}{(x - z)((z - x_1))},$$

cioè al residuo della funzione

$$\frac{f(z)}{x - z},$$

relativo a $z = x_1$.

la somma dei residui della funzione

$$\frac{f(z)}{x-z},$$

rispetto $z=x_1$, $z=x_2$, $z=x_3$, ..., la quantità

$$f(x)-\mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z}$$

non diverrà infinita mai, qualunque delle radici x_1, x_2, x_3, ..., spettanti all'equazione (g), si prenda per x. Laonde se facciasi

$$f(x)-\mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z}=\mathrm{F}(x)\ \ldots\ (g^{\mathrm{IX}}),$$

la funzione $\mathrm{F}(x)$ si manterrà finita rapporto ad $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, ...; e conseguentemente (§. 67. 2.°) rapporto a qualunque valore finito della variabile x (130). 3.° Se $f(x)$ sia frazione razionale, sarà $\mathrm{F}(x)$ tal frazione, similmente razionale, da non ammettere che il suo denominatore

---

(130) *Da ciò si conclude che per avere dalla $f(x)$ un'altra funzione $\mathrm{F}(x)$, la quale non divenga infinita per qualunque delle radici x_1, x_2, x_3, ... dell'equazione*

$$f(x)=\infty,\quad \textit{ovvero}\quad \frac{1}{f(x)}=0,$$

e quindi (§. 67. 2.°) per qualsiasi valore finito della variabile x, basterà sottrarre dalla $f(x)$ la somma de' residui della funzione

$$\frac{f(z)}{x-z},$$

corrispondenti ai valori $z=x_1$, $z=x_2$, ..., cioè il residuo integrale

$$\mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z},$$

che sarà (nota 127.) anch' esso una somma di frazioni razionali. Dunque potremo sempre decomporre una funzione data $f(x)$ in due parti, cioè in una somma di frazioni razionali, ed in una funzione che riescirà sempre finita.

si annulli; avrà cioè la $F(x)$ un denominatore costante, e sarà perciò $F(x)$ una funzione intera della variabile x (131).
4.° Posto ciò, si faccia

$$f(x) = \frac{\chi(x)}{\varphi(x)},$$

in cui $\chi(x)$, $\varphi(x)$ esprimono funzioni intere della variabile x, e sia il grado del denominatore $\varphi(x)$ maggiore di quello del numeratore $\chi(x)$: sarà

$$f(x) = 0, \quad \text{se} \quad x = \infty;$$

e tutto il primo membro dell' equazione (g^{IX}) si annullerà (132),

---

(131) *Se pertanto $f(x)$ sia una frazione razionale, siccome abbiamo che*

$$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$$

è una somma di frazioni anch' esse razionali, perciò dovrà necessariamente $F(x)$ esser pure una frazione razionale: e siccome abbiamo eziandio che $F(x)$ deve rimanere finita, per qualunque valore finito della variabile x, così essa funzione avrà per denominatore una quantità indipendente dalla x, cioè un denominatore che non possa, per qualunque valore di questa variabile, annullarsi; dunque sarà esso una costante; dunque $F(x)$ sarà funzione intera della x.

Qui cade in acconcio riflettere, anche a maggiore schiarimento di quanto fu esposto (§. 3.), che le funzioni dette algebriche, *si dividono in funzioni* razionali, *ed in funzioni* irrazionali: *appartengono alle prime quelle in cui la variabile trovasi elevata solo a potenze intere. In particolare poi dicesi funzione* intera *qualunque polinomio, che solo contenga potenze intere della variabile; dicesi poi* funzione frazionaria, *o* frazione razionale, *il quoto di due polinomi siffatti. Perciò qualunque funzione, sia intera, sia frazionaria, sempre sarà razionale; mentre sarà irrazionale qualunque altra specie di funzione algebrica.*

(132) *Si annulla tutto il primo membro della (g^{IX}), perchè, fatto in esso $x = \infty$, il suo primo termine $f(x)$ si annulla, per essere il grado di $\varphi(x)$ maggiore di quello di $\chi(x)$; mentre poi si annulla il secondo suo termine*

perciò ed il secondo; questo essendo funzione intera della quantità x, fa d' uopo, nella ipotesi attuale, che abbiasi costantemente

$$F(x) = 0 \quad (133),$$

e perciò

$$f(x) = \mathcal{E} \frac{((f(z)))}{x - z} \ldots (g^{\text{x}}) \quad (134).$$

5.° Si moltiplichi (g^{x}) per x, affinchè nasca

$$x f(x) = \mathcal{E} \frac{((f(z)))}{1 - \frac{z}{x}}:$$

fatto $x = \infty$, si rappresenti con Θ il valore $x f(x)$; sarà

$$\left.\begin{array}{l} \Theta = \mathcal{E}\,((f(z))); \\ \text{ed annullandosi } \Theta \text{, avremo} \\ \mathcal{E}\,((f(z))) = 0: \end{array}\right\} (g^{\text{xI}})$$

delle quali esige la seconda, che nella frazione razionale

$$f(x) = \frac{\chi(x)}{\varphi(x)},$$

non solo il grado del denominatore superi quello del numeratore, ma eziandio che la differenza fra l' uno e l' altro grado sia > 1 (135).

$$\mathcal{E} \frac{((f(z)))}{x - z},$$

perchè il suo denominatore $x - z$ diviene infinito per $x = \infty$.

(133) *In fatti una funzione intera che si annulla per un valore infinito della sua variabile, dovrà essere identicamente nulla.*

(134) *Da questa formola siamo abilitati a decomporre, quando si possa, le frazioni razionali in frazioni semplici.*

(135) *In fatti onde il prodotto razionale*

$$x f(x) = \frac{x\chi(x)}{\varphi(x)} = \Theta$$

70.

Data la funzione $f(x, y)$ di due variabili indipendenti x, y, pongasi che l' equazione

$$\frac{1}{f(x, y)} = 0,$$

risoluta rapporto ad x, somministri le radici $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (136). 1.° Sia (§. 65. g'')

$$f(x_1 + \theta, y + \theta') = \frac{\mathrm{f}(x_1 + \theta, y + \theta')}{\theta},$$

sarà (§. 63. o'' : §. 66. g^{v})

$$\mathcal{E} \frac{(x - x_1) f(x, y)}{((x - x_1))} = \mathrm{f}(x_1, y) \quad (137),$$

---

sia nullo per $x = \infty$, necessita che il grado del denominatore $\varphi(x)$, superi quello di $\chi(x)$ di un numero intero > 1. Gioverà poi qui osservare, che tutto l' esposto in questo paragrafo ha per oggetto di applicare la teorica dei residui a trasformare le funzioni, che divengono infinite per certi valori; e a decomporre le frazioni razionali in altre più semplici.

(136) *Si avverta che queste radici suppongonsi tutte indipendenti affatto dalla y.*

(137) *Similmente a quanto fu praticato (§. 65. g'), pongasi*

$$(x - x_1) f(x, y) = \mathrm{f}(x, y),$$

sarà chiaramente

$$f(x_1 + \theta, y + \theta') = \frac{\mathrm{f}(x_1 + \theta, y + \theta')}{\theta},$$

che altro non è fuorchè la prima delle (g'') (§. 65.) estesa, nel modo esposto, ad una funzione di due variabili indipendenti. Ora sviluppando il secondo membro di questa equazione, mediante la formola (o'') (§. 63.), troveremo essere $\mathrm{f}(x_1, y)$ il coefficiente di $\frac{1}{\theta}$; laonde secondo la teorica esposta (§. 65.) sarà

Laonde

$$\frac{d_y \mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x,y)}{((x-x_1))}}{dy} = \frac{d_y f(x_1,y)}{dy};$$

similmente (§. 65. g') sarà

$$\frac{d_y f(x,y)}{dy} = \frac{\frac{d_y f(x,y)}{dy}}{x-x_1},$$

e conseguentemente (§. 67 : 5.°)

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)\frac{d_y f(x,y)}{dy}}{((x-x_1))} = \frac{d_y f(x_1,y)}{dy} \quad (138).$$

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x,y)}{((x-x_1))} = f(x_1,y),$$

che altro non è fuorchè la prima delle (g^{v}) (§. 66.), *estesa, come dichiarammo, ad una funzione di due variabili.*

(138) *Essendo le radici* $x_1, x_2, \ldots$ *della*

$$\frac{1}{f(x,y)} = 0$$

indipendenti dalla y, *dovrà l' equazione*

$$\frac{1}{\frac{d_y f(x,y)}{dy}} = 0,$$

similmente risoluta rapporto ad x, *ammettere anch' essa le radici medesime; o in altri termini: come* $f(x, y)$ *diviene infinita pei valori* $x_1, x_2, \ldots$ *dati alla* x, *così lo diverrà pure*

$$\frac{d_y f(x,y)}{dy}$$

pei valori medesimi, sostituiti alla variabile stessa. Ciò avvertito, è chiaro aver luogo la ricerca del residuo di

2.° Sia (§. 65. g^{IV})

$$f(x_1 + \theta\,,\ y + \theta') = \frac{\mathrm{f}(x_1 + \theta\,,\ y + \theta')}{\theta^n}\,,$$

sarà (§. 63. o″ : §. 66. g^{VI})

$$\mathcal{E}\,\frac{(x - x_1)f(x\,,\ y)}{((x - x_1))} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \cdot \frac{d^{n-1}\mathrm{f}(x_1\,,\ y)}{dx_1^{\,n-1}}\,,$$

e perciò

$$\frac{d_y\,\mathcal{E}\,\dfrac{(x - x_1)\mathrm{f}(x\,,\ y)}{((x - x_1))}}{dy} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \cdot \frac{d^n\mathrm{f}(x_1\,,\ y)}{dx_1^{\,n-1}dy}\,;$$

similmente (§. 65. g''') sarà

$$\frac{d_y f(x\,,\ y)}{dy}$$

rispetto $x = x_1$, *laonde per la equazione*

$$\frac{d_y f(x\,,\ y)}{dy} = \frac{\dfrac{d_y\mathrm{f}(x\,,\ y)}{dy}}{((x - x_1))}\,,$$

avremo

$$\mathcal{E}\,\frac{(x - x_1)\dfrac{d_y f(x\,,\ y)}{dy}}{((x - x_1))} = \mathcal{E}\,\frac{\dfrac{d_y\mathrm{f}(x\,,\ y)}{dy}}{((x - x_1))}\,;$$

ma (§. 67. 5.°) *abbiamo*

$$\mathcal{E}\,\frac{\dfrac{d_y\mathrm{f}(x\,,\ y)}{dy}}{((x - x_1))} = \frac{d_y\mathrm{f}(x_1\,,\ y)}{dy}\,,$$

dunque sarà

$$\mathcal{E}\,\frac{(x - x_1)\dfrac{d_y f(x\,,\ y)}{dy}}{((x - x_1))} = \frac{d_y\mathrm{f}(x_1\,,\ y)}{dy}\,.$$

$$\frac{d_y f(x\,,\,y)}{dy} = \frac{\frac{d_y \mathrm{f}(x\,,\,y)}{dy}}{(x-x_1)^n}\,,$$

laonde (§. 67. 5.°)

$$\mathcal{E}\,\frac{(x-x_1)\,\frac{d_y f(x\,,\,y)}{dy}}{((x-x_1))} = \frac{1}{1.2\,\ldots\,(n-1)}\cdot\frac{d^n \mathrm{f}(x_1,\,y)}{dx_1^{\,n-1}dy}\ (139).$$

Non altro fa d' uopo ad intendere che sarà

---

(139) *Dalla*

$$\frac{d_y f(x\,,\,y)}{dy} = \frac{\frac{d_y \mathrm{f}(x\,,\,y)}{dy}}{(x-x_1)^n}$$

abbiamo chiaramente (nota 138.)

$$\mathcal{E}\,\frac{(x-x_1)^n\,\frac{d_y f(x\,,\,y)}{dy}}{(([x-x_1]^n))} = \mathcal{E}\,\frac{(x-x_1)\,\frac{d_y f(x\,,\,y)}{dy}}{((x-x_1))} =$$

$$\mathcal{E}\,\frac{\frac{d_y \mathrm{f}(x\,,\,y)}{dy}}{(([x-x_1]^n))}\,;$$

ma (§. 67. 5.°) abbiamo

$$\mathcal{E}\,\frac{\frac{d_y \mathrm{f}(x\,,\,y)}{dy}}{(([x-x_1]^n))} = \frac{d^{n-1}\left[\frac{d_y \mathrm{f}(x_1\,,\,y)}{dy}\right]}{1.2\ldots(n-1)dx_1^{\,n-1}} =$$

$$= \frac{d^n \mathrm{f}(x_1\,,\,y)}{1.2\ldots(n-1)dx_1^{\,n-1}dy}\,;$$

perciò

$$\mathcal{E}\,\frac{(x-x_1)\,\frac{d_y f(x\,.\,y)}{dy}}{((x-x_1))} = \frac{1}{1.2\,\ldots\,(n-1)}\,\frac{d^n \mathrm{f}(x_1\,,\,y)}{dx_1^{\,n-1}dy}.$$

$$\frac{d_\gamma \mathcal{E} \frac{(x - x_1)f(x, \gamma)}{((x - x_1))}}{d\gamma} = \mathcal{E} \frac{(x - x_1)\frac{d_\gamma f(x, \gamma)}{d\gamma}}{((x - x_1))} :$$

in simil guisa otterremo

$$\frac{d_\gamma \mathcal{E} \frac{(x - x_2) f(x, \gamma)}{((x - x_2))}}{d\gamma} = \mathcal{E} \frac{(x - x_2)\frac{d_\gamma f(x, \gamma)}{d\gamma}}{((x - x_2))},$$

e così appresso. Da ciò abbiamo

$$\frac{d_\gamma \mathcal{E}(((f(x, \gamma))))}{d\gamma} = \mathcal{E}\left(\left(\frac{d_\gamma f(x, \gamma)}{d\gamma}\right)\right) \ldots (g^{\text{XII}})\ (140).$$

---

(140) *Da questa equazione concludiamo che la derivata parziale del residuo integrale, uguaglia il residuo integrale della derivata parziale.*

Ritenuta x_1 *qual radice semplice della*

$$\frac{1}{f(x, \gamma)} = 0,$$

avremo (§. 65 : g')

$$(x - x_1)f(x, \gamma) = \mathrm{f}(x, \gamma);$$

quindi posto $x_1 + \theta$ *in luogo della* x, *ed* $\gamma + \theta'$ *in vece della* γ, *avremo* (§. 63. o'')

$$f(x_1 + \theta, \gamma + \theta') = \frac{\mathrm{f}(x_1 + \theta, \gamma + \theta')}{\theta} =$$

$$\frac{1}{\theta}\left(\mathrm{f}(x_1, \gamma) + \theta \frac{d_{x_1}\mathrm{f}(x_1, \gamma)}{dx_1} + \theta' \frac{d_\gamma \mathrm{f}(x_1, \gamma)}{d\gamma} + \ldots\right).$$

Ritenuta poi la x_1 *qual radice ripetuta* n *volte dell' equazione stessa, pongasi* (§. 65. g''')

$$(x - x_1)^n f(x, \gamma) = \mathrm{f}(x, \gamma),$$

e fatte le indicate sostituzioni, avremo (§. 63. o'')

$$f(x_1 + \theta, \gamma + \theta') = \frac{\mathrm{f}(x_1 + \theta, \gamma + \theta')}{\theta^n} =$$

71.

Mediante la formola (g^x) si risolvono le frazioni razionali in altre più semplici: verrà ciò posto in chiaro con due esempi.

1.° Abbiasi la frazione

$$\frac{1}{\varrho}\left(f(x_1, y) + \varrho\frac{d_{x_1}f(x_1, y)}{dx_1} + \varrho'\frac{d_y f(x_1, y)}{dy} + \dots\right.$$

$$\dots + \frac{\varrho^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}\;\frac{d_{x_1}{}^{n-1}f(x_1, y)}{dx_1{}^{n-1}} + \dots$$

$$\left. + \frac{\varrho'\varrho^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}\;\frac{d^n f(x_1, y)}{dx_1{}^{n-1}dy} + \dots\right).$$

Posto ciò, si dia luogo alla moltiplicazione tanto di $\frac{1}{\varrho}$, *quanto di* $\frac{1}{\varrho^n}$ *pei rispettivi sviluppi, e rileveremo che il coefficiente della frazione*

$$\frac{\varrho'}{\varrho},$$

nel primo caso è

$$\frac{d_y f(x_1, y)}{dy};$$

nel secondo è

$$\frac{1}{1.2\dots(n-1)}\;\frac{d^n f(x_1, y)}{dx_1{}^{n-1}dy}.$$

Dunque la radice x_1, *sia semplice, sia ripetuta; ovvero, sia*

$$f(x_1 + \varrho,\ y + \varrho') = \frac{f(x_1 + \varrho,\ y + \varrho')}{\varrho},$$

sia

$$f(x_1 + \varrho,\ y + \varrho') = \frac{f(x_1 + \varrho,\ y + \varrho')}{\varrho^n},$$

sempre il valore delle due seguenti espressioni

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}:$$

sarà

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\mathcal{E}\left(\left(\frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2(z+1)^2}\right)\right)\cdot\frac{1}{x-z}=$$

$$\mathcal{E}\frac{z^3+z^2+2}{((z))(z-1)^2(z+1)^2(x-z)}+\mathcal{E}\frac{z^3+z^2+2}{z(([z-1]^2))(z+1)^2(x-z)}+$$

$$\mathcal{E}\frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2(([z+1]^2))(x-z)}.$$

Ora poi rapporto a $z=x_1=0$, abbiamo (§. 66. g^{v})

$$\mathcal{E}\frac{z^3+z^2+2}{((z))(z-1)^2(z+1)^2(x-z)}=\mathrm{f}(x_1)=\frac{2}{x};$$

inoltre rapporto a $z=x_2=1$, abbiamo (§. 66. g^{VI}: §. 67. 4°)

$$\mathcal{E}\frac{z^3+z^2+2}{z(([z-1]^2))(z+1)^2(x-z)}=\mathrm{f}'(x_2)=$$

$$\frac{d[\theta^2 f(x_2+\theta)]}{d\theta}=\frac{d\,\frac{(1+\theta)^3+(1+\theta)^2+2}{(1+\theta)(2+\theta)^2(x-1-\theta)}}{d\theta}=$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)};$$

finalmente rapporto a $z=x_3=-1$, sarà

$$\mathcal{E}\frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2(([z-1]^2))(x-z)}=$$

$$\frac{dy\,\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x,y)}{((x-x_1))}}{dy},\qquad \mathcal{E}\frac{(x-x_1)\frac{dyf(x,y)}{dy}}{((x-x_1))},$$

che già fu dimostrato essere lo stesso, riducesi al coefficiente della frazione suindicata, il quale si ottiene sviluppando (§. 63. o') la funzione

$$f(x_1+\theta,\ y+\theta').$$

$$\frac{d\,\frac{(\theta-1)^3+(\theta-1)^2+2}{(\theta-1)(\theta-2)^2(x+1-\theta)}}{d\theta}=-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{3}{4(x+1)}:$$

dunque

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^3}=$$

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{5}{4(x+1)}.$$

II.° Abbiasi la frazione

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)}:$$

sarà

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)}=\mathcal{E}\frac{1}{((z^3))(z^2+1)(x-z)}+$$

$$\mathcal{E}\frac{1}{z^3((z^2+1))(x-z)}=\mathcal{E}\frac{1}{((z^3))(z^2+1)(x-z)}+$$

$$\mathcal{E}\frac{1}{z^3((z-\sqrt{-1}))(z+\sqrt{-1})(x-z)}+$$

$$\mathcal{E}\frac{1}{z^3(z-\sqrt{-1})((z+\sqrt{-1}))(x-z)}.$$

Rispetto poi a $z=x_1=0$, abbiamo

$$\mathcal{E}\frac{1}{((z^3))(z^2+1)(x-z)}=\frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\frac{1}{(\theta^2+1)(x-\theta)}}{d\theta^2}=$$

$$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x};$$

inoltre rispetto a $z=x_2=\sqrt{-1}$, abbiamo

$$\mathcal{E}\frac{1}{z^3((z-\sqrt{-1}))(z+\sqrt{-1})(x-z)}=$$

$$\frac{1}{(\sqrt{-1})^3\cdot 2\sqrt{-1}(x-\sqrt{-1})}=\frac{1}{2(x-\sqrt{-1})};$$

finalmente rispetto a $z = x_3 = -\sqrt{-1}$, sarà

$$\mathcal{E}\frac{1}{z^3(z-\sqrt{-1})((z+\sqrt{-1}))(x-z)} =$$

$$\frac{1}{-(-\sqrt{-1})^3 \cdot 2\sqrt{-1}(x+\sqrt{-1})} = \frac{1}{2(x+\sqrt{-1})}:$$

dunque

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-\sqrt{-1})} +$$

$$\frac{1}{2(x+\sqrt{-1})} \quad (141).$$

---

(141) *Ecco un terzo esempio. Abbiasi la frazione*

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+3)};$$

sarà

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+3)} = \mathcal{E}\frac{1}{(((z-1)^2(z+3)))(x-z)}$$

$$= \mathcal{E}\frac{1}{(([z-1]^2))(z+3)(x-z)} + \mathcal{E}\frac{1}{(z-1)^2((z+3))(x-z)};$$

Ora, per $z = x_1 = 1$ (§ 66. g^{VI} : 67. 4.°), *abbiamo*

$$\mathcal{E}\frac{1}{(([z-1]^2))(z+3)(x-z)} = f'(x_1) = \frac{d[\theta^2 f(x_1+\theta)]}{d\theta}$$

$$= \frac{d \cdot \frac{1}{(\theta+4)(x-\theta-1)}}{d\theta} = \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{16(x-1)}.$$

Inoltre, per $z = x_2 = -3$ (§. 66. g^{V}), *abbiamo*

$$\mathcal{E}\frac{1}{(z-1)^2((z+3))(x-z)} = f(x_2) = \frac{1}{16(x+3)};$$

dunque

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{16(x-1)} + \frac{1}{16(x+3)}.$$

72.

Esprimendo poi z_1 una radice dell' equazione

$$z - x - k\varphi(z) = 0 \ldots (g^{XIII}),$$

propongasi a svolgere $f(z_1)$ in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della quantità k.

Abbiamo (§. 67. 3.°)

$$\mathcal{E}\frac{(z-z_1)f(z)}{((z-z_1))(z-x-k\varphi(z))} = \frac{f(z_1)}{1-k\varphi'(z_1)};$$

e conseguentemente

$$f(z_1) = \mathcal{E}\frac{(z-z_1)[1-k\varphi'(z)]f(z)}{((z-z_1))(z-x-k\varphi(z))} \quad (142).$$

E' poi (§. 23. III.°)

$$L(z-x-k\varphi(z)) = L(z-x) - \frac{k\varphi(z)}{z-x} - \frac{k^2}{2}\left[\frac{\varphi(z)}{z-x}\right]^2 - \ldots$$

$$- \frac{k^n}{n}\left[\frac{\varphi(z)}{z-x}\right]^n - \frac{k^{n+1}}{n+1}\left[\frac{\varphi(z)}{z-x-\varepsilon k\varphi(z)}\right]^{n+1};$$

perciò (§. 6. 6° : 7 : 8.), fatto per brevità

$$-\frac{k^{n+1}}{n+1}\left[\frac{\varphi(z)}{z-x-\varepsilon k\varphi(z)}\right]^{n+1} = F,$$

avremo

$$1.^a \quad \frac{1-k\varphi'(z)}{z-x-k\varphi(z)} = \frac{1}{z-x} - k\frac{d\left[\frac{\varphi(z)}{z-x}\right]}{dz} -$$

$$\frac{k^2}{2}\frac{d\left[\frac{\varphi(z)}{z-x}\right]^2}{dz} - \ldots - \frac{k^n}{n}\frac{d\left[\frac{\varphi(z)}{z-x}\right]^n}{dz} + F'_z =$$

$$\frac{1}{z-x}\left(1 + \frac{k\varphi(z)}{z-x} + \left(\frac{k\varphi(z)}{z-x}\right)^2 + \ldots\right.$$

---

(142) *Questa equazione si ottiene (§. 67. 3.°) con lo stesso principio, col quale fu ottenuta la precedente.*

$$+\left(\frac{k\varphi'(z)}{z-x}\right)^n\Big)-\frac{k\varphi'(z)}{z-x}\Big(1+\frac{k\varphi(z)}{z-x}+\ldots$$

$$+\left(\frac{k\varphi(z)}{z-x}\right)^{n-1}\Big)+F'_z=\frac{1}{z-x}\left(\frac{1-\left(\frac{k\varphi(z)}{z-x}\right)^{n+1}}{1-\frac{k\varphi(z)}{z-x}}\right)-$$

$$\frac{k\varphi'(z)}{z-x}\left(\frac{1-\left(\frac{k\varphi(z)}{z-x}\right)^{n}}{1-\frac{k\varphi(z)}{z-x}}\right)+F'_z\,;$$

2.ª $$1-k\varphi'(z)=1-\left(\frac{k\varphi(z)}{z-x}\right)^{n+1}-k\varphi'(z)+$$

$$k\varphi'(z)\left(\frac{k\varphi(z)}{z-x}\right)^{n}+(z-x-k\varphi(z))\,F'_z\,;$$

3.ª $$F'_z=\frac{k^{n+1}[\varphi(z)]^n\,[\varphi(z)-(z-x)\varphi'(z)]}{(z-x)^{n+1}\,[z-x-k\varphi(z)]}\,;$$

4.ª $$\frac{1-k\varphi'(z)}{z-x-k\varphi(z)}f(z)=\frac{f(z)}{z-x}-\frac{k}{1}f(z)\frac{d\left[\frac{\varphi(z)}{z-x}\right]}{dz}-$$

$$\frac{k^2}{1}f(z)\frac{d\left[\frac{\varphi(z)}{z-x}\right]^2}{dz}-\ldots-\frac{k^n}{n}f(z)\frac{d\left[\frac{\varphi(z)}{z-x}\right]^n}{dz}+$$

$$f(z)\frac{k^{n+1}[\varphi(z)]^n\,[\varphi(z)-(z-x)\varphi'(z)]}{(z-x)^{n+1}\,[z-x-k\varphi(z)]}\quad(143).$$

---

(143) *Eseguendo le differenziazioni che sono indicate nel primo membro della 1.ª, e separando in due somme i termini positivi dai negativi, si otterrà il terzo suo membro; questo poi si trasformerà* (p. 1.ª §. 102.) *facilmente nel quarto. Moltiplicando i membri estremi della 1.ª per*

$$z-x-k\varphi(z)\,,$$

si ottiene tosto la 2.ª; e da questa, isolando F'$_z$, *si giun-*

Estratti adunque i residui dalla 4.^{a} rispetto le sole $z = z_1$, $z = x$; e posto per brevità

$$f(z)\,\frac{k^{n+1}[\varphi(z)]^n\,[\varphi(z) - (z-x)\varphi'(z)]}{(z-x)^{n+1}[z - x - k\varphi(z)]} = \psi \;\ldots\; (g^{\mathrm{XIV}}),$$

si otterrà (§. 67. 5.° 7.° 8.°)

$$\left.\begin{aligned} f(z_1) = f(x) + \frac{k}{1} f'(x)\varphi(x) + \frac{k^2}{1.2}\,\frac{d[f'(x)(\varphi(x))^2]}{dx} + \ldots \\ + \frac{k^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}[f'(x)(\varphi(x))^n]}{dx^{n-1}} + \mathcal{E}\,\frac{(z-x)(z-z_1)\psi}{(([z-x][z-z_1]))}\ (144). \end{aligned}\right\}(g^{\mathrm{XV}})$$

Se, aumentato n indefinitamente, pongasi

$$\lim.\ \mathcal{E}\,\frac{(z-x)(z-z_1)\psi}{(([z-x][z-z_1]))} = 0\,,$$

avrà luogo l'equazione

$$\left.\begin{aligned} f(z_1) = f(x) + \frac{k}{1} f'(x)\varphi(x) + \frac{k^2}{1.2}\,\frac{d[f'(x)(\varphi(x))^2]}{dx} \\ + \frac{k^3}{1.2.3}\,\frac{d^2[f'(x)(\varphi(x))^3]}{dx^2} + \ldots : \end{aligned}\right\}(g^{\mathrm{XVI}})$$

in ciò consiste la serie di Lagrange (145).

---

ge alla 3.^{a}. Sostituendo poscia il valore di $F'z$ nel secondo membro della 1.^{a}, e moltiplicando per $f(z)$ i due primi membri di essa, otterremo la 4.^{a}

(144) *Dalla terza equazione di questo paragrafo abbiamo già in pronto il residuo del primo membro della 4.^{a} rispetto $z = z_1$; ed in quanto al suo residuo rispetto $z = x$, chiaro apparisce (§. 67. 2.°) questo dover esser nullo: per la medesima ragione sarà pur nullo il residuo del secondo membro della 4.^{a} rispetto $z = z_1$, mentre il suo residuo rispetto $z = x$, dovrà calcolarsi mediante le precedenti dottrine (§. 67. 5.° 7.° 8.°). In seguito di queste considerazioni facilmente si ottiene la (g^{XV}).*

(145) *Questa formola è rimarchevole tanto per la elegante sua forma, quanto per le sue applicazioni all'analisi; con essa in fatti si può sviluppare, secondo le potenze ascendenti di k, qualunque funzione della incognita z, spettante all'equazione*

APPLICAZIONE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ALLA GEOMETRIA.

LINEE POSTE IN SUPERFICIE PIANA.

Delle tangenti, suttangenti, normali, sunnormali, e degli assintoti.

73.

Abbiasi (§. 5.) la curva

$$y = f(x) \dots (o)$$

$$z - x - k\varphi(z) = 0 ,$$

purchè abbia luogo per $n = \infty$ *la condizione*

$$\lim. \mathcal{E} \frac{(z-x)(z-z_1)\psi}{(([z-x][z-z_1]))} ,$$

già stabilita. Potrà questa medesima condizione venir espressa pure in altra guisa: in fatti poniamo

$$(1) \dots \frac{[\varphi(z)]^n[\varphi(z) - (z-x)\varphi'(z)]f'(z)}{z - x - k\varphi(z)} = \frac{\chi(z)}{z - z_1},$$

sarà l'ultimo termine del secondo membro della 4.ª *espresso da*

$$\frac{k^{n+1}\chi(z)}{(z-z_1)(z-x)^{n+1}}.$$

Ora si esprima con r_{n+1} *il resto che nel secondo membro della* (g^{XV}) *completa la serie in esso contenuta, e protratta sino al termine affetto da* k^n, *avremo*

$$r_{n+1} = \mathcal{E} \frac{\chi(z)}{(([z-z_1][z-x]^{n+1}))} k^{n+1} ,$$

ottenendosi dalla (1) *il valore di* $\chi(z)$. *Cangiando poscia* n *in* $n-1$, *avremo dalla* (1) *la*

$$(2) \dots \frac{[\varphi(z)]^{n-1}[\varphi(z) - (z-x)\varphi'(z)]f'(z)}{z - x - k\varphi(z)} = \frac{\Phi(z)}{z - z_1},$$

riferita alle coordinate ortogonali, e con (x, y) venga espresso qualunque punto della curva medesima, determinato dalle coordinate x, y; sia (p. 2.^{a} §. 174.) τ la tangente, p la suttangente, υ la normale, q la sunnormale, c la corda

---

e per conseguenza sarà

$$(3)\ \dots\ r_n = \mathcal{E}\frac{\Phi'(z)}{((\,[z-z_1][z-x]^n))}\,k^n\,;$$

ottenendosi dalla (2) il valore di $\Phi(z)$. Quante volte il resto r_n determinato da questa equazione, decresca indefinitamente coll' indefinito crescere di n, avremo sott' altra forma verificata, come ci proponemmo, la condizione sopra espressa, e valerà la (g^{XVI}). Ciò premesso, vogliasi applicare la stessa (g^{XVI}) ad un particolar caso: ammettiamo che il resto r_n della (3) decresca indefinitamente con $\frac{1}{n}$, si avrà dalla (g^{XVI}) la seguente

$$z_1 = x + \frac{k}{1}\varphi(x) + \frac{k^2}{1.2}\frac{d[\varphi(x)]^2}{dx} + \frac{k^3}{1.2.3}\frac{d^2[\varphi(x)]^3}{dx^3} + \dots:$$

abbiasi anche

$$\varphi(x) = x^m,$$

essendo m un qualunque numero: l'equazione (g^{XIII}) diverrà

$$z - x - kz^m = 0,$$

e la (4) somministrerà ciò che siegue

$$(4)\ \dots\ z_1 = x + \frac{k}{1}x^m + \frac{k^2}{1.2}\frac{dx^{2m}}{dx} + \frac{k^3}{1.2.3}\frac{d^2x^{3m}}{dx^2} + \dots =$$

$$x + \frac{1}{1}kx^m + \frac{2m}{1.2}k^2x^{2m-1} + \frac{3m(3m-1)}{1.2.3}k^3x^{3m-2} + \dots;$$

ma la serie compresa in questa espressione ha per termine generale

$$\frac{nm(nm-1)\dots(nm-n+2)}{1.2.3\dots n}\,k^n x^{nm-n+1}\,;$$

dunque se dicasi u_n questo termine, ed u_{n+1} quello che da esso nasce, sostituendo $n+1$ ad n, avremo corrispondente all' incremento infinitesimo Δs, valutato dal punto di contatto (x, y), dell' arco s: indicati gli angoli come nella p. 2.^{a} §. 171, sarà (p. 2.^{a} §. 125.)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} =$$

$$\frac{(nm+m)(nm+m-1)(nm+m-2)\ldots(nm+m-n+1)}{(n+1)nm(nm-1)(nm-2)\ldots(nm-n+2)} kx^{m-1}$$

A rendere più semplice questo rapporto si osservi, che nel suo numeratore ogni fattore si compone della quantità

$$nm + m,$$

diminuita successivamente di

$$0, 1, 2, 3, \ldots, m-1, m, \ldots, n-1;$$

mentre nel suo denominatore ogni fattore, tranne il primo, si compone della quantità

$$nm,$$

diminuita successivamente di

$$0, 1, 2, \ldots, n-m-1, n-m, n-m+1, \ldots, n-3, n-2,$$

laonde, sopprimendo nel rapporto medesimo i fattori comuni, avremo

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} =$$

$$\frac{(nm+m)(nm+m-1)(nm+m-2)\ldots(nm+1)}{(n+1)(nm-n+2)(nm-n+3)\ldots(nm-n+m)} kx^{m-1},$$

e, *per valori grandissimi di* n, *avremo presso a poco*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} kx^{m-1}.$$

Da ciò concludesi facilmente, che quante volte sia m *un numero intero, la serie compresa nell' ultimo membro della* (4) *sarà convergente, purchè il valor numerico del prodotto*

$$\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} kx^{m-1}$$

$$\text{tang.}\,(cx) = \frac{\Delta r}{\Delta x}.$$

Ma convergendo Δs nel lim. $= 0$, converge l' angolo (cx) nell' angolo (τx); dunque (§. 6.)

---

sia (p. 1.ª §. 236.) *minore della unità. In tal caso la somma della serie* (4) *sarà certo una radice reale dell' equazione trinomia*

$$z - x - kz^m = 0.$$

Per offrire un' altra applicazione del calcolo de' residui si riassuma (§. 69. 4.°) *l' equazione*

$$f(x) = \frac{\chi(x)}{\varphi(x)},$$

e si faccia

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n),$$

denotando n qualsivoglia numero intero. La formola (g") *somministrerà*

$$\frac{\chi(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)} =$$

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\chi(z)}{(z - x_1)(z - x_2) \ldots (z - x_n)}\right)\right) \cdot \frac{1}{x - z} =$$

$$\mathcal{E}\frac{\chi(z)}{((z - x_1))(z - x_2) \ldots (z - x_n)(x - z)} +$$

$$\mathcal{E}\frac{\chi(z)}{(z - x_1)((z - x_2)) \ldots (z - x_n)(x - z)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\chi(z)}{(z - x_1)(z - x_2) \ldots ((z - x_n))(x - z)} =$$

$$\frac{\chi(x_1)}{(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)(x - x_1)} +$$

$$\frac{\chi(x_2)}{(x_2 - x_1) \ldots (x_2 - x_n)(x - x_2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\chi(x_n)}{(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})(x - x_n)};$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang.}\,(\tau x) = \lim.\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}\,. \\ \text{Quindi (p. 2.}^a\ \text{§. 125 : 45. 1.}^\circ\text{ : 40. 1.}^\circ\text{) sarà} \\ p = \dfrac{y}{\text{tang}(\tau x)} = \dfrac{y\,dx}{dy},\ \tau = \sqrt{y^2+p^2} = y\sqrt{[1+\dfrac{dx^2}{dy^2}]}, \\ \nu = \tau\,\text{tang}(\tau x) = y\sqrt{[1+\dfrac{dy^2}{dx^2}]},\ q = \dfrac{y^2}{p} = \dfrac{y\,dy}{dx}\,. \end{array}\right\} (o')$$

---

donde si ottiene la seguente formola d'interpolazione di Lagrange

$$\chi(x) = \frac{(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\,\chi(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}\,\chi(x_2)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}\,\chi(x_n)\,,$$

mediante la quale, cogniti gli n *particolari valori*

$$\chi(x_1),\quad \chi(x_2),\quad \chi(x_3),\quad \ldots,\quad \chi(x_n)$$

della funzione intera $\chi(x)$, *viene determinata la stessa* $\chi(x)$, *conforme a quanto fu dimostrato* (p. 1.^{a} §. 226.). *Ci varremo di questa formola, per assegnare l'equazione alla parabola, che passa per tre punti, dati rispettivamente dalle coordinate*

$$x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;\quad x_3,\ y_3.$$

Fatto

$$n = 3,\quad \chi(x) = y\,,$$

e prese le y *parallele all'asse della curva, si otterrà*

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2 +$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3.$$

Inoltre, denotando v, u le coordinate della tangente o della normale, sarà (p. 2.^{a} §. 172. I.°)

$$u - y = \frac{dy}{dx}(v - x)$$

l' equazione alla tangente, e

Se invece di $\chi(x)$ pongasi $\chi(x, y)$, considerata la sola x per variabile, si avrà dalla formola precedente

$$\chi(x, y) = \frac{(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)} \chi(x_1, y)$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)} \chi(x_2, y) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})} \chi(x_n, y);$$

e denotando m uno qualunque dei numeri

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

se prendasi la sola y per variabile, avremo eziandio

$$\chi(x_m, y) = \frac{(y - y_2) \ldots (y - y_n)}{(y_1 - y_2) \ldots (y_1 - y_n)} \chi(x_m, y_1)$$

$$+ \frac{(y - y_1)(y - y_3) \ldots (y - y_n)}{(y_2 - y_1)(y_2 - y_3) \ldots (y_2 - y_n)} \chi(x_m, y_2) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_{n-1})}{(y_n - y_1)(y_n - y_2) \ldots (y_n - y_{n-1})} \chi(x_m, y_n).$$

Ora se i valori

$$\chi(x_1, y), \quad \chi(x_2, y), \quad \chi(x_3, y), \ldots,$$

dedotti da questa equazione, pongansi nella precedente, si avrà una formola, per la quale verrà determinato il general valore della funzione intera

$$\chi(x, y),$$

cogniti che sieno i valori particolari della medesima, quando per x prendendo

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_n,$$

$$u - y = -\frac{dx}{dy}(v - x)$$

l' equazione alla normale.

---

si prendano per y i valori

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n.$$

Esempio.

Facciasi

$$n = 2,$$

sarà

$$\chi(x, y) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\chi(x_1, y) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\chi(x_2, y);$$

quindi avremo

$$\chi(x_1, y) = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}\chi(x_1, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\chi(x_1, y_2),$$

$$\chi(x_2, y) = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}\chi(x_2, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\chi(x_2, y_2),$$

sostituiti questi valori nella precedente, avremo

$$\chi(x_1, y) =$$

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\cdot\frac{y - y_2}{y_1 - y_2}\chi(x_1, y_1) + \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\cdot\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\chi(x_1, y_2)$$

$$+\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y - y_2}{y_1 - y_2}\chi(x_2, y_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\chi(x_2, y_2).$$

le formole d' interpolazione riescono utilissime, in tutti quei casi ne' quali abbiasi a conoscere una legge di qualsivoglia natura, geometrica, meccanica, fisica, ecc. . . ., senza poter ciò conseguire per diretto ragionamento; dacchè in tal caso conosciuti, sia per calcoli, sia per osservazioni, sia per esperienze, dei casi particolari ad essa legge relativi, ed in bastevole numero, potrà eziandio, mediante le formole d' interpolazione, conoscersi la cercata legge.

Esempi.

I.° L'equazione alla cicloide, già trovata (p. 2.ª §. 172. III.°), somministra (§. 11.)

$$dy = \frac{a.d\frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a}}{\sqrt{(1 - \frac{2ax - x^2}{a^2})}} + d\sqrt{(2ax - x^2)} =$$

$$\frac{2a - x}{a - x} d\sqrt{(2ax - x^2)};$$

perciò (§. 6. 4.° : 7.) avremo

$$dy = dx\sqrt{(\frac{2a - x}{z})} \ldots (o''') :$$

le coordinate si computano dal punto superiore dell'asse, ovvero dal *vertice* della cicloide : che se dovessero computarsi dal principio della base, cosicchè le ascisse avessero a prendersi nella base medesima, saria bastevole nella (o''') sostituire (p. 2.ª §. 171.) ad x, e ad y rispettivamente $2a - y$, ed $a\pi - x$, le quali sostituzioni somministrano

$$dy = dx\sqrt{[\frac{2a - y}{y}]} \ldots (o^{IV}).$$

Valendoci dell'equazione (o^{IV}) conseguiremo le

$$\text{tang}(\tau x) = \sqrt{[\frac{2a - y}{y}]}, \quad p = y\sqrt{[\frac{y}{2a - y}]},$$

$$\tau = y\sqrt{[\frac{2a}{2a - y}]}, \quad \nu = \sqrt{2ay}, \quad q = \sqrt{2ay - y^2}.$$

Facile ora s'intende, non esser altro la normale nella cicloide, fuorchè (p. 2.ª §. 52. 3.°) la corda che sottende, nel circolo generatore, l'arco intercetto dalla base di essa cicloide, e dal punto (x, y) della medesima : quindi siegue (p. 2.ª §. 52. 1.°) che la corda sottendente il suo supplemento, valutato dal punto (x, y), fuori della cicloide, riesce tangente in esso punto a questa curva.

II.° Trovare la suttangente nella logaritmica (p. 2.ª §. 173. IV.°). Sarà (§. 6. 5.°)

$$dy = \frac{L(a)}{c} \; ba^{\frac{x}{c}} dx \, ;$$

perciò la suttangente cercata verrà espressa da

$$p = \frac{ydx}{dy} = \frac{c}{L(a)} \, ;$$

cioè sarà ovunque la stessa.

Si osservi che le due curve (o) ed $y = \mathrm{f}(x)$, ivi si dicono toccarsi a vicenda, ove hanno la tangente comune; quindi rispetto a questo punto di contatto, per la prima delle (o'), coesisteranno le

$$f(x) = \mathrm{f}(x), \quad f'(x) = \mathrm{f}'(x).$$

74.

Se nella prima della (o'') si ponga crescere indefinitamente la x, si potrà conoscere, passando ai limiti, se la curva (o) goda o no degli assintoti.

Esempi.

I.° In quanto alla logaritmica

$$y = e^x \, ,$$

abbiamo

$$u - e^x = e^x(v - x) \, ;$$

e fatto

$$x = -\infty \, ,$$

emergerà (p. 1.^{a} §. 241. 1.°)

$$u = 0 :$$

cioè l'assintoto di questa curva coincide coll'asse delle ascisse.

II.° In quanto alla parabola

$$y^2 = 2px$$

abbiamo

$$u = \mp \sqrt{2px} = \mp \tfrac{1}{2}(v - x) \sqrt{\frac{2p}{x}} \, ,$$

$$u = \mp \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2px} + v\sqrt{\frac{2p}{x}}\right) ;$$

e fatto

$$x = \infty,$$

sarà

$$u = \pm \infty:$$

cioè la parabola è priva di assintoti.

III.° In quanto alla iperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

abbiamo

$$u \mp b\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \mp \frac{bx(\nu - x)}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)},$$

ovvero

$$u\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \pm b = \pm \frac{bx\nu}{a^2};$$

che, moltiplicata per $\frac{a}{x}$, si cangia nella

$$u\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \pm b\,\frac{a}{x} = \pm \frac{b}{a}\nu;$$

e fatto

$$x = \pm \infty,$$

nascerà l' equazione

$$u = \pm \frac{b}{a}\nu$$

agli assintoti della iperbola. Si torni sulla p. 2.ª §. 173. IV.° §. 201. 1.°

75.

Se le quantità

$$\tan g(\tau x),\ p,\ \tau,\ \nu,\ q,$$

debbano esprimersi mediante le coordinate polari z ed ω (p. 2.ª §. 174.), oltre al valore della y, avremo in pronto eziandio i valori

$$dx = \cos\omega dz - z\,\text{sen}\,\omega d\omega\,, \quad dy = \text{sen}\,\omega dz + z\cos\omega d\omega$$

da sostituire nella (o'): la retta z dicesi *raggio vettore*; il punto poi, circa il quale si aggira la z, dicesi *polo*.

Esempio.

Venga proposta l' equazione

$$z = \frac{\omega}{2\pi} \dots (o^{v}),$$

in cui z cresce o decresce nel rapporto medesimo dell' arco ω; sarà $z = 0$, essendo $\omega = 0$, e quindi ambedue potranno insieme crescere all' infinito: pertanto la curva (o^{v}) incominciando dal polo, e quindi sempre più allontanandosi dal medesimo, si ravvolgerà incessantemente attorno lo stesso polo. Volendosi ora la suttangente p, sarà

$$p = \frac{ydx}{dy} = z\,\text{sen}\,\omega \frac{\cos\omega dz - z\,\text{sen}\,\omega d\omega}{\text{sen}\,\omega dz + z\cos\omega d\omega}:$$

pongasi

$$\omega = \frac{\pi}{2},$$

cosicchè dal predetto punto (146) si valuti la suttangente in una retta perpendicolare al raggio vettore z (147); si avrà

$$p = -\frac{z^2 d\omega}{dz}$$

ovvero, a cagione della (o^{v}), sarà

$$p = -2\pi z^2 = -\frac{\omega^2}{2\pi}.$$

Fatto

---

(146) *Cioè dal polo.*

(147) *Nelle curve polari suole per maggior semplicità valutarsi la suttangente sopra una retta, che dal polo si conduce perpendicolarmente al raggio vettore; cosicchè in tal caso gli estremi della suttangente medesima sono, da una parte la intersecazione della tangente con la indicata perpendicolare, dall' altra il polo.*

$$\omega = 2n\pi\,,$$

denotando n il numero delle rivoluzioni fatte dalla retta z, si avrà la suttangente

$$p = -n.2n\pi\,;$$

cioè uguale alla periferia del circolo, avente il raggio $= n.1$, moltiplicata nel numero delle rivoluzioni (148). La curva (o^v),

---

(148) *A dichiarare vie più la determinazione della suttangente nella spirale di Archimede, valga il seguente ragionamento. Dalla formola già dedotta*

$$p = z\operatorname{sen}\omega\,\frac{\cos\omega dz - z\operatorname{sen}\omega d\omega}{\operatorname{sen}\omega dz + z\cos\omega d\omega}\,,$$

eliminando z, *e* dz, *mediante l'equazione*

$$z = \frac{\omega}{2\pi}$$

della spirale medesima, otterremo

$$(1)\quad p = \frac{\omega}{2\pi}\operatorname{sen}\omega\,\frac{\cos\omega - \omega\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\omega + \omega\cos\omega}\,.$$

Questa formola somministra generalmente il valore della suttangente, contato sopra un' asse che passa per l' origine delle coordinate polari, e che rimane immobile al girare del raggio vettore; cosicchè al crescere di questo raggio, dovrà eziandio crescere l' angolo formato dal medesimo col suddetto asse. Però se, come suole nelle curve polari, vogliasi contare sempre la suttangente sopra un asse ad angolo retto col raggio vettore, in tal caso, avuto riguardo al significato di senω, *e* cosω (p. 1.^{a} §. 174.), *dovremo nella* (1) *fare*

$$\operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi = 1\,,$$

$$\cos\omega = \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0\,,$$

ed avremo nell' attuale ipotesi la suttangente così generalmente determinata

$$p = -\frac{\omega^2}{2\pi} = -2\pi z^2 = -z\,.\,2z\pi.$$

cioè sempre uguale alla periferia del circolo, avente il rag-

che fu da Conone di Siracusa immaginata, è una di quelle dette *spirali*: la ricerca delle sue principali proprietà devesi ad Archimede.

Differenziali dell' arco, e dell' area curvilinea.

76.

Convergendo l' incremento infinitesimo Δs dell' arco nel lim. $= 0$, il rapporto fra Δs, e la corrispondente corda c converge nel lim. $= 1$. Dachè s' intenda condotta pel punto (x, y) la tangente, che incontrerà l' ordinata $y + \Delta y$, prolungata, se faccia d' uopo: esprimendo con k la parte di essa tangente, compresa fra il punto di contratto, e l'ordinata $y + \Delta y \ldots$; con h la parte di questa ordinata intercetta dalla tangente, e dall' estremo dell' arco $s + \Delta s$; avremo (§. 73.)

$$\Delta y + h = \Delta x \,.\, \mathrm{tang}(\tau x) = \Delta x \,.\, \frac{dy}{dx},$$

ovvero

$$\Delta y - h = \Delta x \,.\, \mathrm{tang}(\tau x) = \Delta x \,.\, \frac{dy}{dx},$$

secondo che la curva presenti all' asse della x la sua concavità, o la sua convessità; e perciò

$$h = \pm \left(\Delta x \,.\, \frac{dy}{dx} - \Delta y\right),$$

$$k = \sqrt{(\Delta y \pm h)^2 + \Delta x^2} = \Delta x \sqrt{\left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right]} \quad (149);$$

---

gio vettore come raggio, moltiplicata pel raggio medesimo. Se poi fosse per caso particolare

$$\omega = z 2\pi, \quad \textit{ovvero} \quad z = n,$$

si otterrà

$$p = - n \,.\, 2n\pi.$$

Si osservi che il segno sempre negativo della suttangente, valutata sopra un asse perpendicolare al raggio vettore, significa essere la medesima sempre diretta dal polo verso la parte negativa dell' asse medesimo.

(149) *Quì si osservi che dalle prime due superiori equazioni abbiamo*

similmente

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{[1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}]} ;$$

quindi

$$\frac{h+k}{c} = \frac{\pm(\frac{dy}{dx} - \frac{\Delta y}{\Delta x}) + \sqrt{[1 + \frac{dy^2}{dx^2}]}}{\sqrt{[1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}]}} ;$$

e conseguentemente

$$\lim. \frac{h+k}{c} = \frac{\sqrt{[1 + \frac{dy^2}{dx^2}]}}{\sqrt{[1 + \frac{dy^2}{dx^2}]}} = 1.$$

Ma

$$\frac{\Delta s}{c} > \frac{c}{c} = 1 , \quad \text{ed anche} \quad \frac{\Delta s}{c} < \frac{h+k}{c} \quad (150) ;$$

dunque

$$\lim. \frac{\Delta s}{c} = 1.$$

77.

Essendo pertanto

$$\Delta y \pm h = \Delta x . \frac{dy}{dx} ,$$

da cui facilmente si ottiene l' assegnato valore di k.

(150) *Queste due condizioni significano che la quantità* $\frac{\Delta s}{c}$ *si trova sempre compresa fra* 1 , *ed* $\frac{h+k}{c}$; *dunque ecc.* ; *è dunque vero che quando l'arco di una curva diviene infinitamente piccolo , il rapporto di questo alla sua corda eguaglia l' unità.*

$$\lim. \frac{\Delta s}{c} = \lim. \frac{\Delta s}{\Delta x \sqrt{[1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}]}} = 1,$$

ed avendosi

$$\lim. \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx}, \quad \lim. \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = \frac{dy^2}{dx^2},$$

sarà

$$\frac{ds}{dx \sqrt{[1 + \frac{dy^2}{dx^2}]}} = 1,$$

e perciò il differenziale dell' arco s verrà così espresso

$$ds = dx \sqrt{[1 + \frac{dy^2}{dx^2}]} = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (151).$$

Fatta in esso la sostituzione dei valori di dx, dy, tolti dal §. 75, nascerà

$$ds = \sqrt{dz^2 + z^2 d\omega^2}.$$

---

(151) *Egli è chiaro che l' arco s di una curva (o), deve riguardarsi qual funzione dell' ascissa x, corrispondente all' estremo dell' arco medesimo: questa funzione però, come si vedrà in seguito, è molto difficile a determinare; non si giunge ad essa fuorchè in pochi casi. Non è così del suo differenziale ds, che si ottiene sempre facilmente. Però il valore trovato di ds, o di* $\frac{ds}{dx}$, *sarà una quantità positiva, o negativa, secondo che l' arco crescerà o decrescerà, crescendo l' ascissa; vale a dire secondo che gli archi saranno valutati nel senso delle ascisse positive, o delle negative: si dovrà dunque generalmente stabilire*

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{[1 + \frac{dy^2}{dx^2}]};$$

e valerà il segno $+$, *se l' arco crescerà con l' ascissa; il segno* $-$, *se il medesimo decrescerà col crescere di questa.*

78.

Si cerchi ora il differenziale dell' area α, intercetta dall' arco s e dalle rette y_0, y, $x - x_0$.

Indicando con t, t' i trapezi, uno terminato dai lati (§. 76.)

$$k,\ y,\ y+\Delta y \pm h,\ \Delta x\ \ (152);$$

l' altro dai lati

$$c,\ y,\ y+\Delta y,\ \Delta x,$$

si avranno (p. 2.^{a} §. 44. 5.^{o}) le due seguenti equazioni

$$t = \frac{\Delta x}{2}(y+y+\Delta y \pm h) = \frac{\Delta x}{2}(2y + \Delta x \frac{dy}{dx}),$$

$$t' = \frac{\Delta x}{2}(y+y+\Delta y) = \frac{\Delta x}{2}(2y+\Delta y);$$

laonde

$$\lim.\frac{t}{\Delta x} = y,\quad \lim.\frac{t'}{\Delta x} = y.$$

Ma il rapporto $\frac{\Delta \alpha}{\Delta x}$ è compreso fra le ragioni $\frac{t}{\Delta x}$, $\frac{t'}{\Delta x}$;

dunque

$$\lim.\frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = y,\quad \frac{d\alpha}{dx} = y,\quad d\alpha = y dx.$$

79.

Debbasi ancora determinare il differenziale del settore α', intercetto dall' arco s, e dai raggi vettori condotti dalla origine delle coordinate ai punti (x_0, y_0), (x, y). Poichè (p. 2.^{a} §. 44. 4.^{o}) abbiamo

$$\alpha' = \alpha + \frac{x_0 y_0}{2} - \frac{xy}{2},$$

---

(152) *Il segno + si riferisce al caso in cui la curva (§. 76.) rivolge la sua concavità all' asse delle x, mentre il segno — si riferisce al caso contrario.*

perciò sarà

$$d\alpha' = dz - d\frac{x\gamma}{2},$$

ovvero (§. 78.)

$$dz' = \gamma dx - d\frac{x\gamma}{2} = \frac{\gamma dx - x d\gamma}{2}.$$

Dei punti d' inflessione.

80.

Sono così detti quei punti, ne'quali cessa la curva di volgere la concavità sua dalla parte p. e. delle ascisse, onde progregendo rivolgere alle medesime la sua convessità. Prima di venire alla determinazione di siffatti punti, dobbiamo a guisa di premessa, indagare se la curva (o), presso il punto (x, y), presenti all' asse delle ascisse la concavità, o convessità sua.

Nel caso in cui la curva presenti la concavità, si ottiene (§. 76.)

$$\Delta y + h = \Delta x \frac{dy}{dx},$$

e perciò

$$\Delta x \frac{dy}{dx} > \Delta y, \quad \frac{dy}{dx} > \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

nel caso poi che offra la convessità, si ottiene

$$\Delta y - h = \Delta x \frac{dy}{dx};$$

e perciò

$$\Delta x \frac{dy}{dx} < \Delta y, \quad \frac{dy}{dx} < \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ma in ambedue questi casi abbiamo

$$\frac{dy}{dx} - \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0;$$

dunque se il punto

$$(x + \Delta x, \ y + \Delta y)$$

si accosti al punto (x, y), il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ crescerà nel primo caso, diminuirà nel secondo; e perciò (§. 17.) nel punto (x, y) si avrà

$$\frac{d\frac{\Delta y}{\Delta x}}{dx} < 0 \text{ nel 1.° caso; } > 0 \text{ nel 2.°} \quad (152).$$

Ma nel punto (x, y) si riduce $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nel lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$; dunque la curva presso il punto (x, y) rivolge la sua concavità, o la sua convessità all' asse delle x, secondo che abbiasi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} <, \text{ ovvero } > 0.$$

---

(153) *Ponendo mente alle conseguenze (2.°) e (1.°), dedotte nel §. 17, scorgeremo che l' inverso delle medesime viene così espresso: quante volte aumentata, o diminuita la x nelle prossimità di un suo particolar valore, suppongasi primieramente diminuire o crescere, poi crescere o diminuire la funzione $y = f(x)$, che nelle prossimità stesse viene supposta continua, sarà $f'(x) < 0$ nel primo caso, e $f'(x) > 0$ nel secondo, per valori della x prossimi a quel suo particolare. Applicando questo principio alla funzione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, la quale, come fu dimostrato, cresce nel primo caso, e diminuisce nel secondo, col diminuire del valore $x + \Delta x$, attribuito alla sua variabile x; e riflettendo che $\frac{d\frac{\Delta y}{\Delta x}}{dx}$ è la derivata della funzione medesima, si avranno tosto le due superiori disuguaglianze, dalle quali discende il criterio per giudicare, se una curva rivolga la concavità o la convessità sua dalle ascisse. Rammentiamo che $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ rappresenta (§. 73.) la tangente dell' angolo che fa con l' asse dell' ascisse, la corda condotta pei due punti (x, y), $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, spettanti alla curva (o).*

81.

Ciò posto, poichè, i punti d' inflessione trascorsi, dev' essere la $f''(x) >$, ovvero < 0, la quale, prima di giungere ad essi, era $<$, ovvero > 0; perciò in quei punti la derivata $f''(x)$, o si annullerà, o diverrà infinita (p. 1.ª §. 131. 1.°), laonde le ascisse x_n, cui può corrispondere la inflessione, saranno da cercare fra le radici dell' equazioni

$$f''(x) = 0, \quad \frac{1}{f''(x)} = 0.$$

Affinchè poi corrisponda realmente la inflessione alle ascisse così trovate, deve inoltre il segno della derivata $f''(x)$ cangiare se, in vece d' x_n posto $x_n + \sigma$, l' infinitesima σ da $>$, ovvero < 0, si prenda $<$, ovvero > 0.

Esempio.

Sia la curva

$$y = a + \frac{x(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{a^3},$$

saranno le

$$f'(x) = \frac{(a^2 - 4x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{a^3}, \quad f''(x) = \frac{12x^3 - 9a^2x}{a^3\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

L' equazione

$$f''(x) = 0$$

somministra

$$x_n = 0, \quad x_n = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad x_n = -\frac{a\sqrt{3}}{2}:$$

esaminato il primo valore x_n, abbiamo

$$f''(x_n + \sigma) = \frac{12\sigma^3 - 9a^2\sigma}{a^3\sqrt{a^2 - \sigma^2}};$$

ed esaminati gli altri due si ottiene

$$f''(x_n + \sigma) = \frac{12\sigma^3 \pm 18a\sigma^2\sqrt{3} + 18a^2\sigma}{a^3\sqrt{[a^2 - (\sigma \pm \frac{a\sqrt{3}}{2})^2]}};$$

dunque poichè il primo valore di $f''(x_n + \sigma)$ da $<$ diviene > 0 (p. 1.ª §. 251.), e gli altri due da $>$ divengono < 0, quando σ da $>$ si faccia < 0; perciò alle tre ascisse x_n corrisponderanno altrettanti punti d' inflessione. E poichè rispetto al primo punto si ha $f'(x_n) = 1$, e rispetto agli altri due otteniamo $f'(x_n) = -1$; perciò (§. 73.) la tangente condotta per questi tre punti, formerà con l' asse delle ascisse un angolo semiretto, comecchè non sempre dalla stessa parte rivolto (154).

82.

In quanto alla inflessione corrispondente alla radice x_n dell' equazione $f''(x) = 0$, si noti 1.° che assai facilmente potrà (§. 21.) stabilirsi la formola

---

(154) *Abbiasi per un secondo esempio l' equazione*

$$y = a^{\frac{1}{2}} (x - c)^{\frac{3}{2}},$$

avremo

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{ax - ac}}{2}, \quad f''(x) = \frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{x - c}}.$$

L' equazione

$$f''(x) = 0$$

non offre alcun valore per x, però l' altra

$$\frac{1}{f''(x)} = 0,$$

somministra

$$x_n = c;$$

perciò si avrà l' equazione

$$f''(x_n + \sigma) = \frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{\sigma}},$$

il secondo membro della quale diverrà immaginario, se σ divenga negativa. Concludiamo adunque che il ramo della curva, cui spetta la proposta equazione, rivolge sempre (§. 80.) *alle ascisse la convessità sua, e quindi che non possiede verun punto d' inflessione.*

$$f''(x_n+\sigma)=\frac{\sigma^m}{1\,.\,2\ldots m}f^{(m)}(x_n+\varepsilon\sigma)\quad(155)\,;$$

e poichè $f^{(m)}(x_n+\varepsilon\sigma)$ nelle prossimità d' x_n avrà il segno medesimo della $f^{(m)}(x_n)$, perciò cangiato il segno all' infinitesimo σ, non cangerà quello di $f''(x_n+\sigma)$, se la m non sia impari; cioè (§. 81.) alla radice x_n corrisponderà la inflessione, quante volte la prima che non si annullerà delle derivate

$$f'''(x_n)\,,\quad f^{\text{IV}}(x_n)\,,\quad f^{\text{V}}(x_n)\,,\;\ldots$$

sia di ordine impari. 2.° Da ciò si deduce (§. 30 : 31.) che $f'(x)$, ovvero (§. 73.) tang(τx), sarà massima o minima nel punto $(x_n\,,\,y_n)$ d' inflessione.

Del circolo osculatore, dell' evolute, non che generalmente delle curve osculatrici.

83.

Premettiamo quanto siegue: 1.° la periferia del circolo tanto più o meno presso il punto di contatto accostasi alla tangente, quanto maggiore o minore diviene (p. 2.^{a} §. 52. 13.°) il suo raggio; quindi si giudicano le curvature dei circoli essere in ragion reciproca dei corrispondenti raggi (156). 2.°

---

(155) *Questa formola subito verrà stabilita riflettendo che per ipotesi abbiamo*

$$f''(x_n)=0.$$

(156) *Ed in vero, se il raggio ρ di un cerchio aumenti, cioè se il rapporto $\frac{1}{\rho}$ diminuisca incessantemente, l' arco di esso cerchio vicino alla sua tangente, si accosterà di più in più alla medesima, diminuendo al tempo stesso la sua curvatura: questa diverrà sensibilmente nulla, ed il cerchio si confonderà sensibilmente con la sua tangente, quante volte il raggio ρ divenga grandissimo, cioè quante volte il rapporto $\frac{1}{\rho}$ divenga sensibilmente nullo. Pel contrario se ρ diminuisca, cioè se $\frac{1}{\rho}$ cresca incessantemente, la curvatura*

S' immagini che i due punti (x, y), $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ comprendano l'arco circolare $\Delta\chi$, di raggio $= \rho$; la tangente geometrica nel punto (x, y) sia $= \theta'$; e nel punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sia $= \theta''$: l'angolo che formano θ' e θ'' uguaglia (p. 2.ª §. 49 : 35. 7°: 7) quello formato dai due raggi appartenenti a quei punti (157), e perciò (p. 2.ª §. 61 : 124.) sarà

$$\Delta\chi = \rho(\theta'\theta''), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{(\theta'\theta'')}{\Delta\chi} \quad (158).$$

Abbiamo poi (p. 2.ª §. 35. 8.°)

$$(\theta'\theta'') = (\theta' x) - (\theta'' x) = \Delta(\theta' x) \quad (159);$$

---

del cerchio aumenterà, e di più in più si allontanerà dalla sua tangente. La curvatura del cerchio adunque cresce o diminuisce col rapporto $\frac{1}{\rho}$, *cioè col diminuire o crescere del suo raggio* ρ. *Da questo fatto geometrico si è stimato conveniente riguardare la curvatura dei circoli reciprocamente proporzionale ai raggi loro, e conseguentemente si ritiene il rapporto* $\frac{1}{\rho}$ *qual misura della curvatura stessa.*

(157) *Per l'angolo* $(\theta'\theta'')$ *qui s' intende l' angolo esterno relativamente al triangolo isoscele, formato dalla corda che sottende l' arco circolare* $\Delta\chi$, *e dalle rette che uniscono gli estremi di quest' arco, alla vicendevole intersecazione delle tangenti* θ', θ''.

(158) *Per l' angolo* $(\theta'\theta'')$ *si deve prendere il corrispondente arco descritto col raggio* $= 1$, *e perciò avremo*

$$\Delta\chi : (\theta'\theta'') = \rho : 1,$$

donde

$$\Delta\chi = \rho(\theta'\theta'').$$

(159) *Abbiamo evidentemente*

$$(\theta'\theta'') = (\theta' x) - (\theta'' x),$$

ma

$$(\theta'' x) - (\theta' x) = -\Delta(\theta' x),$$

ossia

$$(\theta' x) - (\theta'' x) = \Delta(\theta' x),$$

dunque

$$\frac{1}{\rho}=\frac{(\Delta\theta' x)}{\Delta\chi}.$$

84.

Poste le quali cose, facciasi che i punti $(x\,,\,y)$, $(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y)$, oltre l'arco circolare $\Delta\chi$, comprendano eziandio l'arco Δs della curva (o): accostandosi $(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y)$ ad $(x\,,\,y)$, convergono (§. 76.) $\Delta\chi$, Δs nella comune corda $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, e perciò nella scambievole uguaglianza, cosicchè sarà

$$\lim.\frac{\Delta\chi}{\Delta s}=\frac{d\chi}{ds}=1:$$

deduciamo quindi che il raggio ρ si cangia per modo, che la curvatura del circolo converge in quella della linea (o), presso il punto $(x\,,\,y)$. Inoltre convergerà (§. 73.) l'angolo $\Delta(\theta' x)$ nell'angolo $\Delta(\tau x)$ (160); si esprimerà dunque la curvatura della linea (o) presso il punto $(x\,,\,y)$ con

$$\lim.\frac{1}{\rho}=\lim.\frac{\Delta(\theta' x)}{\Delta\chi}=\frac{d(\tau x)}{ds};$$

e fatto

---

dunque

$$(\theta'\theta'')=\Delta(\theta' x).$$

(160) *Come fu provato essere*

$$\Delta(\theta' x)=\theta'\theta'',$$

con simile ragionamento si dimostrerebbe che

$$\Delta(\tau x)=(\tau\tau'),$$

essendo τ, τ' *le tangenti condotte rispettivamente ai punti* $(x\,,\,y)$, $(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y)$, *ora comuni alla curva* (o) *ed al circolo; e quì si osservi che l'equazione*

$$\lim.\frac{(\theta'\theta'')}{(\tau\tau')}=1$$

esprime il convergere della curvatura del circolo in quella spettante alla linea (o).

$$\text{lim.}\ \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r},$$

sarà

$$r = \frac{ds}{d(\tau x)} \ldots (o^{v}).$$

Il circolo descritto col raggio r dicesi *osculatore*; ha nel punto (x, y) la tangente comune con la (o), ed il centro in qualche punto della corrispondente normale; perciò lo stesso r dicesi *raggio di contatto*, od anche di *curvatura*.

85.

Presa x per variabile indipendente, si avranno (§. 73, 11 : 77) le

$$d(\tau x) = d\ \text{arc}(\text{tang} = f'(x)) = \frac{f''(x)dx}{1+f'^2(x)},$$

$$ds = dx\sqrt{1+f'^2(x)}.$$

Inoltre per ciascun punto della curva (o) unico è il raggio di curvatura, rivolto sempre dalla parte concava; e poichè la concavità della curva può rivolgersi o dall' asse delle ascisse, o dalla parte opposta, quindi per tener conto di siffatte posizioni, quel raggio, che nel primo caso viene riguardato come positivo, dovrà nel secondo riguardarsi come negativo. Non altro fa d' uopo ad intendere che la formola (o^{v}) si converte (§. 80.) nella

$$r = -\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} \quad (161),$$

---

(161) *Sostituendo i trovati valori di* $d(\tau x)$, *e* ds *nella* (o^{v}), *si ottiene*

$$r = \pm \frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Ora poichè (§. 80.) *abbiamo*

$$f''(x) <,\ \textit{ovvero} > 0,$$

ovvero (§. 73. o′)

$$r = -\frac{\left(\frac{v}{y}\right)^3}{f''(x)} \quad \ldots \; (o^{VI}).$$

Esempi.

I.° L' equazione (o^{IV} §. 73. I.°) somministra

---

secondo che la curva (o) *rivolga nel punto* (x, y) *la concavità, o la convessità sua alle ascisse, ne discende che, avuto riguardo al segno dal quale, come fu dichiarato, dev' essere affetto il raggio di curvatura* r, *dovrà nell' espressione*

$$\pm [1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}$$

valere sempre il segno — ; *quindi chiaro apparisce perchè gli assegnati valori di* r *sieno preceduti da questo segno.*

Inoltre dalla ispezione della formola

$$r = -\frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)},$$

possiamo concludere 1.° *che la curvatura diviene nulla, ed il suo raggio infinito, tutte le volte che* $f''(x)$ *si riduce a zero: in tal caso il circolo osculatore si trasforma in una retta, e si confonde con la tangente. Ciò avviene per esempio nei punti di inflessione, presso i quali restano continue rapporto alla* x *le funzioni* $f'(x)$ *e* $f''(x)$. 2.° *Se in qualche punto il valore di* $f''(x)$ *divenisse infinito, senza che tale pure divenisse* $f'(x)$, *cioè senza che in quel punto medesimo la tangente fosse perpendicolare all' asse della* x, *la curvatura sarebbe pur essa infinita, ed il suo raggio svanirebbe.* 3.° *Se le funzioni* $f'(x)$, $f''(x)$ *divenissero insieme infinite, il valore di* r *si presenterebbe sotto forma indeterminata, la quale però verrebbe fissata dalla dottrina esposta* (§. 20. 21.). 4.° *Se una delle funzioni* $f'(x)$, $f''(x)$ *divenisse discontinua, e cangiasse bruscamente valore, altrettanto avverrebbe dal raggio di curvatura: ciò si può avverare nei punti sporgenti di una curva, in ognuno dei quali si vengono a riunire i due rami di essa per modo, che le tangenti loro ivi concorrono ad angolo.*

$$f'^2(x) = \frac{2a}{y} - 1,$$

dalla quale differenziata emerge

$$f'(x)f''(x)dx = -\frac{ady}{y^2},$$

$$f'(x)f''(x) = -\frac{a}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{y^2} f'(x);$$

e perciò (§. 73. I.°)

$$f''(x) = -\frac{a}{y^2} = -\frac{2ay}{2y^3} = -\frac{\nu^2}{2y^3}:$$

e conseguentemente per la cicloide (o^{IV}) si ha

$$r = 2\nu \quad (162).$$

II.° L'equazione (p. 2.^{a} §. 196. i_{27})

$$A'x^2 + B'y^2 + 2D'x = K'$$

alle linee di second' ordine, somministra

$$A'x + B'yf'(x) + D' = 0,$$

onde

$$B'^2y^2f'^2(x) = A'^2x^2 + 2A'D'x + D'^2 =$$
$$A'(A'x^2 + 2D'x) + D'^2 = A'(K' - B'y^2) + D'^2;$$

perciò

$$f'^2(x) = \frac{A'K' + D'^2}{B'^2y^2} - \frac{A'}{B'}.$$

---

(162) *Perciò nella cicloide il raggio di curvatura è doppio della normale; dal che siegue che questo raggio si annulla con la medesima; laonde sarà infinita la curvatura in tutti quei punti, nei quali viene la cicloide ad incontrare la sua base; vale a dire in tutti quei punti singolari che diconsi di regresso, nei quali si arrestano toccandosi due rami della curva. In ciascun vertice poi della cicloide il raggio di curvatura diverrà uguale al doppio del diametro del suo cerchio generatore.*

Questa differenziata offre

$$f'(x)f''(x)dx = -\frac{A'K' + D'^2}{B'^2} \cdot \frac{dy^2}{y^4},$$

$$f''(x) = -\frac{A'K' + D'^2}{B'^2} \cdot \frac{1}{y^3}:$$

ma (p. 2.^{a} §. 196 : 205. 4° : 206. 4.°) abbiamo

$$\frac{A'K' + D'^2}{B'^2} = p^2 \quad (163),$$

eguale cioè al quadrato del semiparametro, dunque

$$f''(x) = -\frac{p^2}{y^3},$$

e perciò

$$r = \frac{y^3}{p^2} \quad (164).$$

---

(163) *Se la origine delle coordinate sia posta nel vertice, avremo evidentemente* $K' = 0$, *e sarà* (p. 2.^{a} §. 196.)

$$\frac{A'K' + D'^2}{B'^2} = \frac{D'^2}{B'^2} = p^2;$$

se poi la origine sia posta nel centro, allora sostituendo alle quantità componenti l' espressione

$$\frac{A'K' + D'^2}{B'^2},$$

i valori che ad esse competono, secondo la specie della curva conica alla quale si riferiscono, valori che si ottengono paragonando (p. 2.^{a} §. 196.) *la* (i_{27}) *con ciascuna delle* (i_{29}), *troveremo che sempre in ognuna di siffatte curve l' espressione medesima riducesi* (p. 2.^{a} §. 196 : 205. 4° : 206. 4.°) *al quadrato del semiparametro spettante alla curva che si considera.*

(164) *Questi due valori, uno di* $f''(x)$, *l' altro di* r, *sono rimarchevoli per la semplicità loro; ed apprendiamo da essi che in ogni curva conica* 1.° *la derivata seconda dell' ordinata, uguaglia il quadrato negativo del semiparametro, diviso pel cubo dell' ordinata medesima :* 2.° *che il*

86.

Ora debbano determinarsi le coordinate v, u di quel punto, nel quale sta il centro del circolo osculatore; le coordi-

---

raggio di curvatura eguaglia il cubo della normale, diviso pel quadrato del semiparametro.

Fatto $K' = 0$ *nella* (i_{27}) (p. 2.^{a} §. 196.) *avremo*

$$y^2 = -\frac{A'}{B'}x^2 - \frac{2D'}{B'}x,$$

e posto

$$-\frac{A'}{B'} = q, \quad -\frac{2D'}{B'} = 2p,$$

sarà

$$(1) \quad y^2 = qx^2 + 2px$$

l'equazione delle curve coniche, nella quale si computano le ascisse dal vertice, denotando (p. 2.^{a} §. 196 : 205 : 206) $2p$ *il parametro in ciascuna curva, ed essendo* a, b *i semiassi, trasverso l'uno, congiunto l'altro nella ellisse, e nella iperbola, nelle quali si ha*

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Dalla (1) *facilmente* (§. 73. o') *si ottiene*

$$v = [(1+q)y^2 + p^2]^{\frac{1}{2}},$$

e perciò

$$(2) \quad r = \frac{[(1+q)y^2 + p^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{[(1+q)(qx^2 + 2px) + p^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Poichè supposto $x = 0$, *abbiamo dalla* (1) $y = 0$, *perciò in qualunque curva conica, per questi valori, sarà*

$$r = p;$$

cioè il raggio di curvatura spettante al vertice delle curve medesime, uguaglia sempre la metà del parametro. Ora poichè nate medesime soddisferanno insieme (§. 73. o'' : §. 84 : e p. 2.ª §. 172. II.°) alle due seguenti equazioni

$$u - y = -\frac{1}{f'(x)}(v - x)\,,\ \ (u - y)^2 + (v - x)^2 = r^2 \ldots (\mathrm{o}^{\mathrm{VII}}):$$

---

dev' essere per la parabola, per la ellisse, e per la iperbola rispettivamente

$$q = 0\,,\quad q = -\frac{p}{a}\,,\quad q = \frac{p}{a}\,,$$

così per la parabola, rappresentata dall' equazione

$$y^2 = 2px\,,$$

sarà

$$r = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = p\left(1 + \frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}:$$

per la ellisse poi, od iperbola, complessivamente rappresentate dalla

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a}x^2\,,$$

sarà

$$r = \frac{\left[\left(1 \mp \frac{p}{a}\right)y^2 + p^2\right]^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{[a^4y^2 + b^4(a \mp x)^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Inoltre volendosi nel centro la origine delle coordinate, dovremo sostituire $x + a$ ad x nella ellisse, ed $x - a$ ad x nella iperbola; da ciò per ambedue queste curve avremo

$$(3)\qquad r = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Finalmente si osservi che nei vertici degli assi, maggiore l' uno, minore l' atro, della ellisse, abbiamo rispettivamente

$$x = \pm a\,,\quad y = 0\,,\quad ed\quad x = 0\,,\quad y = \pm b\,;$$

perciò sarà

$$(u-y)^2=\frac{r^2}{1+f'^2(x)}=\frac{[1+f'^2(x)]^2}{f''^2(x)};$$

e poichè abbiamo

$$u<,\ \text{ovvero}\ >y,$$

secondo che la curva (o) rivolge la sua cavità o convessità all' asse delle ascisse, perciò (§. 80.) avremo

$$\left.\begin{array}{l} u-y=\dfrac{1+f'^2(x)}{f''(x)}\quad (165); \\ \text{e quindi per la prima delle } (o^{VII}) \text{ sarà} \\ v-x=-\dfrac{1+f'^2(x)}{f''(x)}f'(x). \end{array}\right\}(o^{VIII}).$$

---

perciò i corrispondenti valori del raggio di curvatura in questi punti verranno espressi come siegue

$$r=\frac{b^2}{a},\quad r=\frac{a^2}{b}.$$

Se nella (3) si ponga

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

avremo

$$r=\frac{[a^4-(a^2-b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b},$$

dalla quale si vede chiaro che, aumentata l' ascissa x, diminuisce il valore di r. Da tutto ciò discende che nella ellisse il raggio di curvatura è minimo agli estremi dell' asse maggiore, massimo agli estremi del minore; e che in essa (§. 83 : 84.) la curvatura è massima nel primo caso, minima nel secondo : le ultime due formole vengono in soccorso della teorica sulla figura del nostro pianeta.

(165) *Poichè dev' essere*

$$u<,\ \text{ovvero}\ >y,$$

secondo che la curva (o) rivolga all' asse delle ascisse la concavità o convessità sua, è chiaro doversi verificare

87.

Eliminate le x, y dalle (o), (o^{VIII}), nascerà l'equazione

$$u = \varphi(v) \ldots (o^{IX})$$

della linea in cui si trovano i centri dei circoli tutti osculatori della curva (o).

Esempi.

I.° In quanto alla cicloide (o^{IV}. §. 73. I.°) abbiamo (§. 85. I.°)

$$u - y = - 2y,$$

donde

$$u = - y:$$

il segno negativo si riferisce alla posizione dell'ordinata u; per la qual cosa, considerati solo i valori assoluti, sarà

$$u = y, \quad du = dy:$$

di nuovo (§. 85. I.°) abbiamo

$$v - x = 2y\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde

$$v = x + 2y\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$u - y <, \text{ ovvero } > 0,$$

secondo che (§. 80.) *sia*

$$f''(x) <, \text{ ovvero } > 0;$$

e perciò la radice della quantità

$$\frac{[1 + f'^2(x)]^3}{f''^2(x)},$$

dovrà essere preceduta dal segno +, *come si osserva nella prima delle* (o^{VIII}).

e conseguentemente (§. 75. I.° o^{IV}) sarà

$$dv = dx + 2\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}}dy + 2yd\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{dy}{\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} + 2\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}}dy - \frac{2a}{y}\cdot\frac{dy}{\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$-\frac{\left(\frac{2a}{y} - 1\right)dy}{\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} + 2\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}}dy = \left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}}dy\,;$$

ovvero

$$dv = \left(\frac{2a}{u} - 1\right)^{\frac{1}{2}}du = du\sqrt{\left[\frac{2a - u}{u}\right]}.$$

Concludiamo (§. 73. I.° o$'''$) che i centri dei circoli osculatori della cicloide, si trovano tutti sopra una seconda cicloide generata con lo stesso cerchio della prima.

II.° Nelle linee di second'ordine (§. 85. II.°) abbiamo

$$f''(x) = -\frac{p^2}{y^3}\,;$$

perciò nella parabola

$$y^2 = 2px\,,$$

sarà

$$f'(x) = \frac{p}{y}\,;$$

nella ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

sarà

$$f'(x) = -\frac{b^2x}{a^2y}\,;$$

nella iperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

sarà

$$f'(x) = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Dunque 1.° per la parabola otterremo

$$u - y = -\frac{y^3 + p^2 y}{p^2}, \quad v - x = \frac{y^2 + p^2}{p}:$$

dalla prima di queste si ha

$$p^2 u = -y^3, \quad u^2 = \frac{y^6}{p^4} = \frac{8x^3}{p};$$

e dalla seconda

$$v = 3x + p, \quad x = \frac{v - p}{3};$$

laonde

$$u^2 = \frac{8}{27p}(v - p)^3.$$

2.° Per la ellisse otteniamo

$$u - y = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^3}{p^2} - \frac{y^3}{p^2} - y = \frac{y^3}{b^3}(b - \frac{a^2}{b}) - y,$$

$$v - x = [\frac{y^3}{b^3}(b - \frac{a^2}{b}) - y]\frac{b^2 x}{a^2 y} =$$

$$[\frac{y^2}{b^2}(1 - \frac{a^2}{b^2}) - 1]\frac{b^2 x}{a^2} = \frac{x^3}{a^3}(a - \frac{b^2}{a}) - x:$$

quindi fatto per brevità

$$b - \frac{a^2}{b} = k, \quad a - \frac{b^2}{a} = k,$$

saranno le

$$\frac{u}{h} = \frac{y^3}{b^3}, \quad \frac{v}{k} = \frac{x^3}{a^3},$$

ovvero le

$$(\frac{u}{h})^{\frac{2}{3}} = \frac{y^2}{b^2}, \quad (\frac{v}{k})^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2}{a^2};$$

e perciò

$$\left(\frac{v}{k}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{u}{h}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

3.° Similmente per la iperbola sarà

$$\left(\frac{v}{k}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{u}{h}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

avendosi per questa

$$k = a + \frac{b^2}{a}, \quad h = b + \frac{a^2}{b}.$$

88.

I raggi de' circoli osculatori della curva (o), sono altrettante tangenti della corrispondente curva (o^{IX} §. 87.)

Infatti differenziate le (o^{VIII}) (§. 86.) si ottiene

$$du - f'(x)dx = d\frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)},$$

$$dv - dx = -f''(x)\frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}dx - f'(x)d\frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)};$$

ed eliminato

$$d\frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)},$$

abbiamo

$$du = -\frac{dv}{f'(x)}$$

ovvero

$$\frac{du}{dv} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Ora non d' altro è mestieri (§. 73 : 84 : e p. 2.^{a} §. 172. I.° 4.°) onde sia manifesta la verità dell' asserto (166).

---

(166) *Le due tangenti condotte, una sulla curva* (o) *nel suo punto* (x, y), *l' altra sulla* (o^{IX}) *nel suo punto* (v, u),

89.

Delle due (o^{VII}) (§. 86.), la prima si riduce (§. 88.) nella

$$u - y = \frac{du}{dv}(v - x),$$

la seconda somministra

$$(u - y)(du - dy) + (v - x)(dv - dx) = rdr;$$

dunque (§. 88.)

$$v - x = \frac{rdrdv}{dv^2 + du^2 - dvdx - dudy} = \frac{rdrdv}{dv^2 + du^2},$$

$$u - y = \frac{rdrdu}{dv^2 + du^2 - dvdx - dudy} = \frac{rdrdu}{dv^2 + du^2}:$$

e fatte le sostituzioni nella seconda delle (o^{VII}) (§. 86.) otterremo

$$\frac{dr^2}{dv^2 + du^2} = 1, \quad dr = \sqrt{dv^2 + du^2}.$$

Il differenziale cioè del raggio di curvatura, spettante alla curva (o), eguaglia (§. 77.) il differenziale del corrispondente arco nella curva (o^{IX}) (§. 87.); e perciò (§. 8.) lo stesso

---

hanno (§. 73.) per tangenti trigonometriche degli angoli, rispettivamente da esse formati coll' asse delle x, le quantità

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{du}{dv};$$

ma fu dimostrato essere

$$\frac{du}{dv} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

dunque (p. 2.ª §. 172. I.° 4.°) queste due tangenti sono fra loro perpendicolari, ovvero la normale alla curva (o) nel punto (x, y) è parallela alla tangente della (o^{IX}) nel punto (v, u): ma il raggio di curvatura della (o) nel punto (x, y) coincide (§. 84.) con la normale medesima, ed ha inoltre per estremo il punto (v, u); dunque siffatto raggio sarà tangente in questo punto alla curva (o^{IX}).

raggio, o eguaglia il corrispondente arco nella (o^{IX}) medesima, o ne differisce per una quantità costante.

90.

Da ciò è facile concludere, che se avvolgasi un filo alla curva (o^{IX}), quindi svolgasi per modo, che la sua parte libera, e rimanga tesa, e sia continuamente tangente (§. 88.) alla curva (o^{IX}), l'estremità del filo, che al principiar dello svolgimento poniamo sulla (o), rimarrà sempre sulla stessa (o), e la descriverà. Delle due (o^{IX}), (o), la prima dicesi *evoluta*, l'altra generata dallo svolgimento di quella.

91.

Diciamo alcun che del raggio di curvatura, nelle curve riferite (§. 75.) alle coordinate polari z, ω.

Nella

$$r = -\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)},$$

(§. 85.), cessi la x di essere variabile indipendente, onde abbiasi per tale l'arco ω; dovrà cangiarsi (§. 15.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ in } \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3},$$

e sarà

$$r = -\frac{dx^3\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Ma (§. 75.) abbiamo

$$dx^2 + dy^2 = dz^2 + z^2d\omega^2,$$

$$dxd^2y - dyd^2x = 2dz^2d\omega - zd\omega d^2z + z^2d\omega^3 \quad (167);$$

---

(167) *Se i valori di* dx, dy, *espressi* (§. 75.) *per mezzo delle coordinate polari* z, ω, *si elevino al quadrato, e si sommino, avremo tosto l'assegnato valore di*

$$dx^2 + dy^2:$$

dunque

$$r = -\frac{(dz^2 + z^2d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{2dz^2d\omega - zd\omega d^2z + z^2d\omega^3}.$$

Similmente (§. 15: 86. o$^{\mathrm{VIII}}$) avremo

$$u - y = \frac{(dx^2+dy^2)dx}{dxd^2y-dyd^2x} = \frac{(dz^2+z^2d\omega^2)(\cos\omega dz - z\,\mathrm{sen}\,\omega d\omega)}{2dz^2d\omega - zd\omega d^2z + z^2d\omega^4},$$

$$v - x = -\frac{(dx^2+dy^2)dy}{dxd^2y-dyd^2x} = -\frac{(dz^2+z^2d\omega^2)(\mathrm{sen}\,\omega dz+z\cos\omega d\omega)}{2dz^2d\omega-zd\omega d^2z+z^2d\omega^3}.$$

Pongasi

$$\omega = \frac{\pi}{2};$$

lo che significa volere che le x sieno computate dal polo sopra una retta perpendicolare al raggio vettore, e che perciò la y sia lo stesso raggio: si avrà

$$x = 0, \quad y = z, \quad \mathrm{sen}\,\omega = 1, \quad \cos\omega = 0,$$

e perciò

$$u = z - \frac{z(dz^2 + z^2d\omega^2)}{2dz^2 - zd^2z + z^2d\omega^2},$$

$$v = -\frac{(dz^2 + z^2d\omega^2)dz}{2dz^2d\omega - zd\omega d^2z + z^2d\omega^3}.$$

Esempio.

Abbiasi la curva

$$z = e^{\frac{\omega}{a}},$$

detta *spirale logaritmica*: apparisce che siffatta curva con infinite spire si ravvolge per modo attorno al polo, che l'angelo ($z\tau$), formato dal raggio vettore con la tangente, risulti sempre lo stesso: poichè (p. 2.^{a} §. 121 : 123. i) sarà

---

se poi si differenzino, riguardando $d\omega$ per costante, si vedrà facilmente come ottenere l'altro assegnato valore di

$$dxd^2y - dyd^2x.$$

$$\operatorname{tang}(z\tau) = \operatorname{tang}[90^\circ - (\tau x)] =$$

$$\cot(\tau x) = -\frac{dx}{dy} = -\frac{\cos\omega dz - z\operatorname{sen}\omega d\omega}{\operatorname{sen}\omega dz + z\cos\omega d\omega} = \frac{z d\omega}{dz} = a \text{ (168)};$$

---

(168) *Sarà facile ravvisare che*

$$(z\tau) + (\tau x) + 90^\circ = 180^\circ ,$$

donde

$$(z\tau) = 90^\circ - (\tau x) ;$$

perciò ecc. . . .

Nell' equazione

$$\operatorname{tang}(z\tau) = a ,$$

consiste la dimostrazione dell' asserto , riguardo all' angolo $(z\tau)$; e siccome l' angolo $(r\tau)$ è retto , così potremo dire ancora , che tanto la tangente , quanto la normale, fanno col raggio vettore un angolo, che in questa curva è sempre costante.

Dall' equazione poi

$$z = e^{\frac{\omega}{a}}$$

rileviamo, che nella spirale logaritmica da essa rappresentata , 1.° quando l' angolo ω cresca positivamente , il raggio vettore z aumenta di più in più , cosicchè partendo dall' origine o polo , questa curva formerà intorno al medesimo un' infinità di rivoluzioni , allontanandosi da esso con un suo estremo indefinitamente : 2.° che quando l' angolo medesimo cresca negativamente , il raggio vettore diminuirà di più in più , accostandosi la curva con un suo estremo indefinitamente alla origine , senza poterla mai raggiungere.

A dichiarare in ultimo perchè si appone il segno negativo alla quantità $\frac{dx}{dy}$, s' immagini che la spirale sviluppi da destra a sinistra ; egli è chiaro che la tangente ad un punto qualunque di questa curva , farà coll' asse mobile della medesima , cioè coll' asse continuamente perpendicolare al suo raggio vettore , un angolo sempre attuso dalla parte destra;

inoltre dalla

$$d\omega = \frac{adz}{z},$$

otteniamo

$$0 = \frac{azd^2z - adz^2}{z^2}, \quad d^2z = \frac{dz^2}{z},$$

laonde sarà

$$r = -\frac{z}{a}(1+a^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u = 0, \quad v = -\frac{z}{a} \quad (169).$$

Ora di tali equazioni, la prima dimostra che il raggio di curvatura è proporzionale al raggio vettore; le altre che il centro del circolo osculatore trovasi costantemente in una retta, passante pel polo perpendicolarmente al raggio vettore z: e che la distanza di siffatto centro dallo stesso polo si ha dalla

$$v = -\frac{z}{a}.$$

Quindi il raggio vettore v della curva evoluta, formerà col raggio di curvatura r, cioè (§. 88.) con la tangente, un angolo, di cui (p. 2.ª §. 125.) la tangente trigonometrica

$$\text{tang}(vr) = \frac{z}{v} = -a \quad (170).$$

---

e poichè $\frac{dy}{dx}$ *rappresenta* (§. 73.) *la tangente di siffatto angolo, perciò si dovrà nel caso attuale riguardare sempre* $\frac{dy}{dx}$ *per quantità intrinsecamente negativa; quindi ecc. . . .*

(169) *Poichè*

$$d^2z = \frac{dz^2}{z},$$

così per ottenere facilmente questi valori, basta sostituire, nelle corrispondenti formole generali, dz^2 *in luogo di* zd^2z.

(170) *Se bene si riguardi alla giacitura delle rette* z, r, v, *si vedrà che queste formano un triangolo rettangolo, nel quale l'angolo* (zv) *è il retto, e l'angolo* (rv) *è quello formato dal raggio* r *di curvatura, e dal raggio vettore* v; *quindi ecc. . . .*

Da ciò concludiamo non essere altro la curva evoluta, fuorchè una spirale logaritmica, eguale alla generata.

92.

Per quello riguarda finalmente le curve osculatrici, osserviamo 1.° che le due curve (o), $y = \mathrm{f}(x)$, ivi si dicono combaciarsi, ove hanno la tangente col circolo osculatore comune, rivolgendo la cavità dalla stessa parte (171): dunque rispetto al punto di combagiamento dovranno (§. 73 : 80 : 85) coesistere le

$$f(x) = \mathrm{f}(x), \quad f'(x) = \mathrm{f}'(x), \quad f''(x) = \mathrm{f}''(x) \quad (172).$$

2.° Sia λ un' altra quantità variabile, di cui la relazione con le x, y venga espressa da

---

(171) *Dunque due curve piane diconsi* osculatrici *l' una dell' altra in un punto ad esse comune, quando, riferite ai medesimi assi coordinati, hanno in quel punto non solamente la stessa tangente, ma eziandio lo stesso circolo osculatore; e per conseguenza la medesima curvatura con la cavità volta dalla stessa parte. In tal caso il contatto esistente fra le due curve dicesi* combagiamento.

(172) *La prima equazione*

$$f(x) = \mathrm{f}(x)$$

significa che le due curve hanno il punto (x, y) *comune: l' altra*

$$f'(x) = \mathrm{f}'(x),$$

ossociata alla prima, significa (§. 73.) *che le medesime hanno in quel punto pure la tangente comune: l' ultima*

$$f''(x) = \mathrm{f}''(x)$$

vuol dire che le curve stesse, nel punto medesimo, volgono (§. 80.) *la cavità loro dalla stessa parte: associando poi questa equazione alla seconda, saremo certi che le curve avranno ivi eziandio lo stesso raggio di curvatura* (§. 85.). *Dunque le due curve saranno osculatrici l' una dell' altra in un punto corrispondente all' ascissa* x, *quando le tre quantità*

$$y, \quad y', \quad y'',$$

conserveranno nel passaggio da una curva all' altra i medesimi valori numerici, ed i segni medesimi.

$$\lambda = \varphi(x\,,\,y):$$

differenziando successivamente due volte questa equazione, supposto λ indipendente, otterremo (§. 45 : 46) le

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{d\lambda} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{d\lambda}, \\ 0 &= \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2x}{d\lambda^2} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{d\lambda^2} + \\ &\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2y}{d\lambda^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\cdot\frac{dy^2}{d\lambda^2} + 2\,\frac{d^2\varphi}{dxdy}\cdot\frac{dx}{d\lambda}\cdot\frac{dy}{d\lambda}; \end{aligned}\right\}(0^{\mathrm{X}})$$

espresse inoltre tanto le $f'(x)$, $f''(x)$, quanto le $\mathrm{f}'(x)$, $\mathrm{f}''(x)$, con y', y'', si avranno (§. 14 : 15) le

$$y' = \frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dx}{d\lambda}}, \quad y'' = \frac{\frac{dx}{d\lambda}\cdot\frac{d^2y}{d\lambda^2} - \frac{dy}{d\lambda}\cdot\frac{d^2x}{d\lambda^2}}{\frac{dx^3}{d\lambda^3}} \ldots (0^{\mathrm{XI}}).$$

Dalle (0^{X}), (0^{XI}) discendono le

$$\frac{dx}{d\lambda},\ \frac{dy}{d\lambda},\ \frac{d^2x}{d\lambda^2},\ \frac{d^2y}{d\lambda^2} \ldots (0^{\mathrm{XII}}).$$

espresse mediante le

$$y',\, y'',\ \frac{d\varphi}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy},\ \frac{d^2\varphi}{dx^2},\ \frac{d^2\varphi}{dy^2},\ \frac{d^2\varphi}{dxdy}:$$

ma queste quantità rispetto al punto di combagiamento ritengono (1.°) lo stesso valore, se da una curva si passi all'altra; dunque altrettanto deve dirsi delle quantità (0^{XII}) (173). 3.° Lo

---

(173) *Perchè s' intenda più facilmente l' esposto in questo 2.°, faremo riflettere che le* (0^{XII}) *costituiscono, anch' esse, un critero per conoscere se due curve piane sieno osculatrici l' una dell' altra in un punto dato; e poichè senza inconveniente possiamo sostituire alle stesse* (0^{XII}) *i loro numeratori, cioè i differenziali*

$$dx,\ dy,\ d^2x,\ d^2y;$$

così potremo ancor dire che avrà luogo il combagiamento di due curve piane nel punto dato $(x\,,\,y)$, *se prendendo* scambievole avvicinamento delle curve (o), $y = f(x)$ nelle prossimità del punto (x, y), potrà dedursi dal valore della quantità infinitesima

---

per variabile indipendente una funzione determinata delle coordinate, i valori delle quantità

$$x, \ y, \ dx, \ dy, \ d^2x, \ d^2y,$$

dedotti dall' equazioni delle due curve, rimangano gli stessi pel punto dato.

Inoltre osserveremo che nulla impedisce di supporre la variabile λ ridotta ad una delle coordinate x, y; quindi p. e. supposto $\lambda = x$, le (o^{XII}) diverranno

$$1, \ y', \ 0, \ y'';$$

e perciò saremo ricondotti al criterio già indicato in fine della nota (172). Da ultimo per dare un' applicazione dell' esposta dottrina, si prenda per variabile indipendente il raggio vettore λ, condotto dall' origine delle coordinate al punto (x, y), cosicchè abbiasi

$$(1) \quad \lambda = \sqrt{x^2 + y^2},$$

avremo

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{x}{\lambda}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{y}{\lambda}, \quad \frac{d^2\varphi}{dxdy} = -\frac{xy}{\lambda^3},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\lambda^2 - x^2}{\lambda^3} = \frac{y^2}{\lambda^3}, \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{\lambda^2 - y^2}{\lambda^3} = \frac{x^2}{\lambda^3},$$

e per conseguenza l' equazioni (o^X) diverranno rispettivamente

$$1 = \frac{x}{\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda} + \frac{y}{\lambda} \cdot \frac{dy}{d\lambda},$$

$$0 = \frac{x}{\lambda} \cdot \frac{d^2x}{d\lambda^2} + \frac{y}{\lambda} \cdot \frac{d^2y}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3}\left(y\frac{dx}{d\lambda} - x\frac{dy}{d\lambda}\right)^2.$$

Da queste, combinate con le (o^{XI}), e con la (1), otterremo i valori delle (o^{XII}) così espressi

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{x + yy'}, \quad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{y'\sqrt{(x^2+y^2)}}{x + yy'},$$

$$f(x+\beta)-\mathrm{f}(x+\beta)\ldots(\mathrm{o}^{\mathrm{XIII}})\ (174):$$

se il numero c rappresenti l'ordine della infinitesima $(\mathrm{o}^{\mathrm{XIII}})$, certo nelle vicinanze del punto (x, y), le curve (o), $y=\mathrm{f}(x)$ si avvicineranno fra loro più (p. 1.^{a} §. 251.) di tutte quelle altre, per le quali sia l'ordine della stessa $(\mathrm{o}^{\mathrm{XIII}})$ espresso da un numero $< c$ (175). 4.° Le derivate della $(\mathrm{o}^{\mathrm{XIII}})$, prese rispetto β, sono

$$f'(x+\beta)-\mathrm{f}'(x+\beta),\quad f''(x+\beta)-\mathrm{f}''(x+\beta),$$
$$f'''(x+\beta)-\mathrm{f}'''(x+\beta),\ \ldots.$$

Ma se β si annulli, sarà (§. 29.) di ordine $=c$, ovvero

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2}=-\frac{(y-xy')^2+yy''(x^2+y^2)}{(x+yy')^3},$$
$$\frac{d^2y}{d\lambda^2}=-\frac{y'(y-xy')^2-xy''(x^2+y^2)}{(x+yy')^3}.$$

(174) *In fatti l'espressione* $(\mathrm{o}^{\mathrm{XIII}})$ *rappresenta la differenza delle ordinate corrispondenti alla comune ascissa* $x+\beta$, *nelle due curve* (o), $y=\mathrm{f}(x)$; *ma è chiaro che quanto più questa differenza sarà piccola, tanto più le curve medesime si avvicineranno scambievolmente nelle prossimità del punto* (x, y); *dunque dalla* $(\mathrm{o}^{\mathrm{XIII}})$ *si potrà conoscere lo scambievole avvicinamento delle curve stesse in quel punto, e sarà tanto più considerevole questo avvicinamento, quanto più l'ordine della quantità infinitesima* $(\mathrm{o}^{\mathrm{XIII}})$ *sarà elevato.*

(175) *Quindi saremo certi che niun' altra linea*

$$y=\varphi(x)$$

potrà passare fra le due proposte curve, se l'ordine della quantità infinitesima

$$f(x+\beta)-\varphi(x+\beta)$$

sia $< c$: *di qui niuna retta che passi pel punto* (x, y) *della curva* $y=f(x)$, *potrà mai passare fra questa, e la sua tangente al punto medesimo; ed in fatti* (p. 2.^{a} §. 49.) *sappiamo che fra l'arco di cerchio, e la sua tangente, non può aver luogo veruna retta.*

immediatamente $> c$, la prima di siffatte derivate che non si annullerà: dunque

$$\left.\begin{array}{c} f(x) = \mathrm{f}(x)\,,\quad f'(x) = \mathrm{f}'(x)\,,\quad f''(x) = \mathrm{f}''(x)\,, \\ f'''(x) = \mathrm{f}'''(x)\,,\ \ldots \end{array}\right\} \quad (o^{\mathrm{XIV}})$$

sino all' ordine $= c$, ovvero immediatamente $< c$; vale a dire nell' una, e nell' altra curva, conserveranno lo stesso valore non pure (1.°) le ordinate del punto (x, y), e le derivate di primo e second' ordine che da esse provengono; ma e le altre, sino all' ordine $= c$, o immediatamente $< c$ (176). 5.° Se una fra le due curve che si debbono combaciare, non fosse del tutto determinata, cosicchè nella sua equazione p. e. $y = \mathrm{f}(x)$, si trovino le costanti arbitrarie a, a', a'', ..., queste potranno definirsi per mezzo di altrettante dell' equazioni (o^{XIV}) (177): 6.° Le quantità infinitesime

$$f(x+\beta) - \mathrm{f}(x+\beta)\,,\quad f(x-\beta) - \mathrm{f}(x-\beta)$$

o saranno affette da segni contrari, o da segni medesimi; le curve osculatrici, nel primo caso manifestamente s' intersecheranno a vicenda, nel secondo non s' intersecheranno (178).

---

(176) *Dunque se l' ordine di contatto sia un numero intero, basterà, per determinarlo, cercare qual sia l' ultima dell' equazioni*

$$f(x) = \mathrm{f}(x)\,,\quad f'(x) = \mathrm{f}'(x)\,,\quad f''(x) = \mathrm{f}''(x)\,,\ \ldots$$

che si verifica per l' ascissa del punto di contatto: l' ordine delle derivate comprese in quest' ultima equazione, sarà precisamente l' ordine di contatto cercato.

(177) *Per questo caso vedasi la seconda parte della seguente nota.*

(178) *Riflettendo che*

$$f(x+\beta) - \mathrm{f}(x+\beta)$$

è la differenza fra le due ordinate, rispettivamente corrispondenti nelle due curve all' ascissa comune $x+\beta$; *e che*

$$f(x-\beta) - \mathrm{f}(x-\beta)$$

è la differenza stessa, corrispondente all' ascissa comune $x-\beta$; *chiaro apparisce la verità dell' asserto.*

In quanto al caso 5.° abbiansi due curve (o), $y = \mathrm{f}(x)$ *tali, che la forma e la posizione della prima essendo completamente determinata, la forma e la posizione della seconda possa variare coi valori di alcune, o di tutte le costanti arbitrarie*

LINEE POSTE NELLO SPAZIO.

Tangenti, normali, piano osculatore, ed assintoti.

93.

Immaginiamo nello spazio una curva riferita agli assi ortogonali AX, AY, AZ; e sieno

---

$$a\,,\quad a'\,,\quad a''\,,\ \ldots\,,\quad a^{(n-1)}\,,$$

comprese nella sua equazione. Si potrà disporre di alcune, o di tutte queste in guisa, che i valori di più termini consecutivi della serie

$$y,\quad y',\quad y'',\ \ldots\,,\quad y^{(n)}\,,$$

rimangano gli stessi per l' ascissa x, nel passaggio dalla prima alla seconda delle curve medesime. In tal caso la seconda godrà, nel punto (x, y), con la prima, un contatto più o meno intimo, l' ordine del quale sarà inferiore di uno (4.°) al numero $n+1$ dei termini, che non avranno cangiato valore nella indicata serie; cioè sarà espresso dell' ordine delle ultime due derivate uguali. Essendo n il numero delle costanti della seconda equazione, si potrà disporre delle medesime in guisa che l' ordinata y, e le $n-1$ prime sue derivate, conservino il medesimo valore per le due curve considerate; cosicchè fra i valori che possono ricevere quelle costanti arbitrarie, contenute (§. 2.) nella funzione esplicita

$$y = \mathrm{f}(x)\,,$$

ovvero nella implicita

$$\varphi(x,\ y) = 0\,,$$

ve ne sarà generalmente un sistema, ottenuto mediante la coesistenza delle (o^{XIV}), pel quale la curva rappresentata dalla seconda equazione, ovvero da una delle indicate funzioni, acquisterà con la prima (o) data, un contatto di ordine almeno eguale ad $n-1$, nel punto (x, y). Se poi si considerino solo alcune delle (o^{XIV}), incominciando da quelle che si riferiscono all' ordinata y, e sue derivate di ordini inferiori, più costanti rimarranno arbitrarie, e la seconda

$$\left\{ x = f(z), \quad y = \mathrm{f}(z) \right\} \ldots (a)$$

le sue projezioni (p. 2.ª §. 182.) nei piani XAZ, YAZ: o la curva sia piana, od abbia doppia curvatura, la sua tangente nel punto (x, y, z) verrà determinata da quelle tangenti, che nei due piani coordinati, p. e. XAZ, YAZ, saranno

---

curva potrà variare di forma e di posizione, senza cessare tuttavia di contenere il punto (x, y), e di toccare la prima curva in questo punto. In tal caso l' ordine di contatto fra le due curve sarà generalmente inferiore ad $n - 1$; e sarà indefinito il numero dei sistemi delle costanti, per ognuno dei quali dovrà verificarsi quest' ordine di contatto.

Esempio.

Supponiamo che la seconda curva $y = \mathrm{f}x)$ sia parabolica, ed abbia l' ordinata espressa mediante una funzione intera dell' ascissa, cosicchè rappresentando per maggior chiarezza con x_1, y_1, le sue coordinate, avremo

$$(1)\ y_1 = a + a'x_1 + a''x_1^2 + \ldots + a^{(n-2)}x_1^{n-2} + a^{(n-1)}x_1^{n-1};$$

prendendo x_1 per variabile indipendente, si otterrà

$$y'_1 = a' + 2a''x_1 + 3a'''x_1^2 + \ldots$$
$$\ldots + (n-2)a^{(n-2)}x_1^{n-3} + (n-1)a^{(n-1)}x_1^{n-2},$$
$$y_1'' = 2a'' + 2.3a'''x_1 + \ldots,$$
$$y_1''' = \ldots, \ y^{\mathrm{IV}} = \ldots, \ ecc. \ldots,$$
$$y_1^{(n-2)} = 1.2.3\ldots(n-2)a^{(n-2)} + 1.2.3\ldots(n-1)a^{(n-1)}x_1,$$
$$y_1^{(n-1)} = 1.2.3\ldots(n-1)a^{(n-1)}.$$

Sostituendo in queste equazioni alle derivate

$$y'_1, \ y''_1, \ y'''_1, \ldots, y_1^{(n-1)},$$

le seguenti

$$y', \ y'', \ y''', \ldots, y^{(n-1)},$$

dedotte dalla equazione della prima curva $y = f(x)$, si determineranno le costanti per modo, che la curva parabolica possegga con quella un contatto dell'ordine $\overline{n - 1}^{mo}$. Sarà molto semplice ottenere l' equazione di questa parabola, eli-

condotte pei punti (x, z), (y, z) delle projezioni. Pertanto se dicansi v, u, t, le coordinate della retta tangente la curva (a), saranno (§. 73. o'') le

$$\left\{ v - x = \frac{dx}{dz}(t - z), \quad u - y = \frac{dy}{dz}(t - z) \right\} \ldots (a').$$

---

minando dalla (1) le costanti arbitrarie, mediante le seguenti n equazioni di condizione

$$y = a + a'x + a''x^2 + \ldots + a^{(n-2)}x^{n-2} + a^{(n-1)}x^{n-1},$$

$$y' = a' + 2a''x + 3a'''x^2 + \ldots$$

$$\ldots + (n-2)a^{(n-2)}x^{n-3} + (n-1)a^{(n-1)}x^{n-2},$$

$$y'' = \ldots, \quad y''' = \ldots, \quad ecc. \ldots,$$

$$y^{(n-1)} = 1.2.3\ldots(n-1)a^{(n-1)};$$

nelle quali si pone identica l' ascissa in ambedue i membri, come richiedono le (o^{XIV}).

Per eseguire la eliminazione, sviluppiamo il secondo membro della (1) secondo le potenze ascendenti di $x_1 - x$, *osservando che, qualunque sia m, abbiamo sempre*

$$x_1^m = [x + (x_1 - x)]^m =$$

$$= x^m + \frac{m}{1} x^{m-1}(x_1 - x) + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}(x_1 - x)^2 + \ldots$$

$$\ldots + (x_1 - x)^m;$$

avremo pertanto

$$y_1 = a + a'x + a''x^2 + \ldots + a^{(n-1)}x^{n-1}$$

$$+ \frac{a' + 2a''x + 3a'''x^2 + \ldots + (n-1)a^{(n-1)}x^{n-2}}{1}(x_1 - x)$$

$$+ ecc. \ldots$$

$$+ \frac{1.2.3\ldots(n-2)a^{(n-2)} + 1.2.3\ldots(n-1)a^{(n-1)}x}{1.2.3\ldots(n-2)}(x_1 - x)^{n-2}$$

$$+ \frac{1.2.3\ldots(n-1)a^{(n-1)}}{1.2.3\ldots(n-1)}(x_1 - x)^{n-1},$$

quindi mediante l' equazioni di condizioni già stabilite, sarà

Quindi 1.° se con (τx), (τy), (τz) si esprimano gli angoli, che la retta tangente la curva (a) nel punto (x, y, z) forma cogli assi AX, AY, AZ, fatto per brevità

$$\sqrt{[1+(\frac{dx}{dz})^2+(\frac{dy}{dz})^2]}=h,$$

$$y_1 = y + \frac{y'}{1}(x_1 - x) + \frac{y''}{2}(x_1 - x)^2 + \ldots\ldots +$$

$$\frac{y^{(n-2)}}{1.2.3\ldots(n-2)}(x_1-x)^{n-2} + \frac{y^{(n-1)}}{1.2.3\ldots(n-1)}(x_1-x)^{n-1}$$

l' equazione della curva parabolica, di grado $\overline{n-1}.^{mo}$ di forma semplicissima, ed avente nel punto dato (x, y) un contatto dell' ordine $\overline{n-1}.^{mo}$ con la data. Si giunge a questa medesima equazione anche nel modo seguente. Poichè la parabola di forma indeterminata deve passare pel punto (x, y), potrà la sua equazione ricevere la forma

$$y_1 - y = a'(x_1-x) + a''(x_1-x)^2 + \ldots + a^{(n-1)}(x_1-x)^{n-1};$$

ed affinchè abbia questa curva un contatto di ordine $\overline{n-1}.^{mo}$ con la data $y = f(x)$, basterà (4.°) che i valori delle

$$\frac{dy_1}{dx_1}, \quad \frac{d^2y_1}{dx_1^2}, \ldots, \quad \frac{d^{n-2}y_1}{dx_1^{n-2}}, \quad \frac{d^{n-1}y_1}{dx_1^{n-1}},$$

corrispondenti ad $x = x_1$, cioè

$$a', \ 1.2a'', \ldots, 1.2.3\ldots(n-2)a^{(n-2)}, \ 1.2.3\ldots(n-1)a^{(n-1)},$$

sieno rispettivamente uguali alle

$$y', \quad y'', \ldots y^{(n-2)}, \quad y^{(n-1)};$$

si avranno dunque le

$$a' = y', \ a'' = \frac{y''}{1.2}, \ldots, a^{(n-2)} = \frac{y^{(n-2)}}{1.2\ldots(n-2)},$$

$$a^{(n-1)} = \frac{y^{(n-1)}}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Sostituendo questi valori alle costanti arbitrarie nella equazione della parabola, riprodurremo l' equazione già ottenuta per questa curva. Nel caso particolare di $n = 2$, la saranno (p. 2.^{a} §. 183 : 184) le

$$\cos(\tau x) = \frac{1}{h}\,\frac{dx}{dz}\,,\ \cos(\tau y) = \frac{1}{h}\,\frac{dy}{dz},\ \cos(\tau z) = \frac{1}{h}\ \ldots (a'').$$

2.° Se le due curve (a), ed

$$\left\{\, x = \varphi(z)\,,\quad y = \psi(z) \,\right\}\ (b)$$

---

parabola osculatrice si cangerà in una retta, rappresentata dall' equazione

$$y_1 - y = y'(x_1 - x)\,,$$

la quale (§. 73 ; e p. 2.^{a} §. 172. I.° 2.°) *esprime, come doveva essere, la tangente al punto* (x, y) *della curva data.*

Quando l' ordinata sia una funzione implicita dell' ascissa, potremo determinare il sistema dei valori dalle costanti arbitrarie, pel quale il contatto riesce dell' ordine $\overline{n-1}.^{mo}$, *col mezzo di n equazioni, ottenute dall' esprimere che la*

$$\varphi(x_1\,,\ y_1) = 0\,,$$

e le sue $n - 1$ *differenziali successive, sono soddisfatte ponendo in esse, invece delle*

$$x_1\,,\ y_1\,,\ dx_1\,,\ dy_1\,,\ \ldots\,,$$

le seguenti

$$x\,,\ y\,,\ dx,\ dy\,,\ \ldots\,,$$

relative alla equazione data

$$F(x\,,\ y) = 0.$$

Questo metodo torna in quello precedentemente sviluppato, e proprio del caso in cui l' ordinata sia funzione esplicita dell' ascissa ; giacchè ponendo bene mente ad ambedue, si vedrà che le condizioni dalle quali vengono determinate le costanti arbitrarie, sono in ognuno le stesse.

Esempio I.°

Supponiamo che l' equazione di una curva

$$\varphi(x_1\,,\ y_1) = 0\,,$$

contenga le tre costanti arbitrarie a, a', a'' ; *si potrà disporre* si combacieranno scambievolmente (§. 73.), si avranno pel punto di contatto le

$$f(z) = \varphi(z)\,, \quad \mathrm{f}(z) = \psi(z)\,, \quad f'(z) = \varphi'(z)\,, \quad \mathrm{f}'(z) = \psi'(z).$$

---

delle medesime in guisa, che questa curva possegga un contatto di second' ordine con un' altra data. Infatti, differenziando due volte l' equazione medesima, si avrà

$$\frac{d\varphi}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi}{dy_1}dy_1 = 0\,,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx_1^2}dx_1^2 + \frac{2d^2\varphi}{dx_1dy_1}dx_1dy_1 + \frac{d^2\varphi}{dy_1^2}dy_1^2 +$$

$$\frac{d\varphi}{dx_1}d^2x_1 + \frac{d\varphi}{dy_1}d^2y_1 = 0\,;$$

e per fissare il contatto di second' ordine fra quella curva, e l' altra data $\mathrm{F}(x, y) = 0$, *basta esprimere che queste differenziali equazioni vengono soddisfatte allorquando in esse alle quantità*

$$x_1\,, \quad y_1\,, \quad dx_1\,, \quad dy_1\,, \quad d^2x_1\,, \quad d^2y_1\,,$$

sostituiscansi rispettivamente i valori delle

$$x\,, \quad y\,, \quad dx\,, \quad dy\,, \quad d^2x\,, \quad d^2y\,,$$

dedotti dall' equazione data. Così operando si otterranno le tre seguenti equazioni

$$\varphi(x, y) = 0\,, \quad \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy = 0\,,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2\varphi}{dxdy}dxdy + \frac{d^2\varphi}{dy^2}dy^2 +$$

$$\frac{d\varphi}{dx}d^2x + \frac{d\varphi}{dy}d^2y = 0\,;$$

dalle quali si potranno dedurre i valori delle costanti, a, a', a'', *in funzione delle coordinate* x, y *del punto di contatto; e sostituendo i valori medesimi nella*

$$\varphi(x_1\,, \ y_1) = 0\,,$$

si otterrà l' equazione della curva osculatrice.

94.

Facilmente s' intende che quantunque non sia piana la curva (a), non di meno avrà pur luogo il teorema già dimostrato (§. 76.). Ciò posto consideriamo nell' (a) l' arco s, unita-

---

Esempio II.°

Se in vece della curva rappresentata dalla

$$\varphi(x_1, y_1) = 0,$$

si prenda la

$$(u - y_1)^2 + (v - x_1)^2 = r^2,$$

che rappresenta un cerchio di raggio r (§. 86. o$^{\text{VII}}$), *saranno* u, v, r, *le costanti arbitrarie da doversi determinare. A questo effetto differenziando due volte la proposta equazione, con riguardare qual variabile indipendente la* x_1, *e cangiando* x_1, y_1, dx_1, dy_1, ..., *in* x, y, dx, dy, ..., *si avranno le*

$$(u - y)^2 + (v - x)^2 = r^2,$$

$$(u - y)dy + (v - x)dx = 0,$$

$$(u - y)d^2y - dy^2 - dx^2 = 0,$$

delle quali le ultime due forniscono le

$$u - y = \frac{\dfrac{dy^2}{dx^2} + 1}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \quad v - x = -\frac{\dfrac{dy^2}{dx^2} + 1}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx},$$

che sono identicamente le (o$^{\text{VIII}}$) *del* §. 86. *Sostituendo i trovati valori di* $u - y$, *e* $v - x$ *nella prima delle tre precedenti equazioni, avremo*

$$\frac{\left(\dfrac{dy^2}{dx^2} + 1\right)^2}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2} + \frac{\left(\dfrac{dy^2}{dx^2} + 1\right)^2}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2} = r^2,$$

ovvero

mente all' incremento Δs: se c denoti la corda che sottende questo incremento, sarà (p. 2.ª §. 176.)

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \quad \frac{\Delta s}{c} = \frac{\Delta s}{\Delta z\sqrt{[1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta z^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta z^2}]}},$$

donde

$$\lim. \frac{\Delta s}{c} = 1 = \frac{1}{h}\frac{ds}{dz} \quad (180),$$

$$r^2 = \frac{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

donde

$$r = \pm \frac{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

formola perfettamente coincidente col primo valore di r, ottenuto al §. 85, purchè in essa, pel ragionamento istituito alla nota (161), si ritenga solo il segno negativo.

(180) *Essendo la curva qualunque rappresentata dalle due equazioni (a) (§. 93.), fra le coordinate rettangolari x, y, z, ed essendo s l' arco di essa, compreso fra un punto fisso, ed il punto mobile (x, y, z); se attribuiscasi alla x un accrescimento piccolissimo Δx, le coordinate x, y, z, varieranno ancor esse di quantità positive o negative, che prescindendo dal segno saranno piccolissime, e rappresentate dalle Δx, Δy, Δz. Inoltre chiaro apparisce che la corda dell' arco Δs, ovvero, in altri termini, la distanza del punto (x, y, z) dal punto ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$), sarà (p. 2.ª §. 176.) numericamente*

$$= \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}.$$

Posto ciò per intendere facilmente la determinazione del differenziale dell' arco s, basterà valersi del principio evi-

e conseguentemente

$$ds = hdz = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \dots (a''') \quad (181).$$

Ora è chiaro che le formole (a'') si potranno scrivere a questo modo

$$\cos(\tau x) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(\tau y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\tau z) = \frac{dz}{ds} \dots (a^{\text{iv}});$$

---

dente, che un piccolissimo arco Δs di curva, si confonde sensibilmente con la sua projezione $p_{\Delta s}$ sulla tangente, condotta da uno de' suoi punti; vale a dire, che il rapporto del piccolissimo arco alla indicata sua projezione, si riduce sensibilmente alla unità, cosicchè possiamo stabilire il principio

$$\Delta s = p_{\Delta s}.$$

Inoltre la projezione dell' arco essendo uguale alla projezione p_c della sua corda c, avremo

$$p_{\Delta s} = p_c = \Delta s;$$

ma essendo α l' angolo formato dalla corda con la tangente, sarà $p_c = c\cos\alpha$, e perciò

$$\frac{p_c}{c} = \frac{c\cos\alpha}{c} = \cos\alpha,$$

ovvero

$$\frac{\Delta s}{c} = \cos\alpha,$$

quindi

$$\lim. \frac{\Delta s}{c} = 1:$$

dunque il rapporto di un arco infinitamente piccolo alla sua corda ha per limite l' unità.

(181) *Qui giova osservare che nella formola (a''') deve il radicale farsi precedere dal doppio segno $\pm$, il quale riducesi al segno $+$, quando l' arco s cresca coll' ascissa x; ed al segno $-$ nel caso contrario.*

dalle quali (p. 2.^{a} §. 186.) si ottiene l' equazione

$$(v - x)dx + (u - y)dy + (t - z)dz = 0 \; . \; . \; . \; (a^{\text{v}})$$

fra le coordinate v, u, t, del piano che, passando pel punto (x, y, z), è perpendicolare alla tangente della curva (a) nel punto medesimo: in questo piano (a^{v}) giacciono le normali tutte, sono queste di numero infinite, che possono condursi pel punto di contatto alla stessa curva, comunque posta nello spazio (182).

95.

Denoti σ una lunghezza infinitesima, computata dal contatto, e sulla curva (a), e sulla tangente (a'), dalla stessa parte: gli estremi della lunghezza σ, uno in (a), l' altro in (a'), sieno congiunti dalla retta δ; e corrispondano ai medesimi le coordinate x_1, y_1, z_1 nella (a), le v_1, u_1, t_1 nella (a'): si abbia inoltre la s qual variabile indipendente, per investigare in questa ipotesi i coseni degli angoli (δx), (δy), (δz), che la retta δ fa cogli assi AX, AY, AZ.

Le coordinate v_1, u_1, t_1 possono (§. 94. a^{IV}) esprimersi a questo modo

$$v_1 = x + \sigma\cos(\tau x) = x + \sigma\frac{dx}{ds},$$

$$u_1 = y + \sigma\cos(\tau y) = y + \sigma\frac{dy}{ds},$$

$$t_1 = z + \sigma\cos(\tau z) = z + \sigma\frac{dz}{ds} \quad (183).$$

---

(182) *Dicesi che una retta è normale ad una curva in un suo punto dato, quando sia perpendicolare alla tangente in questo. Posto ciò si potrà evidentemente condurre ad una curva per ciascun suo punto, un infinito numero di normali, che saranno tutte comprese in uno stesso piano, il quale si chiama perciò il piano* normale, *di cui l' equazione viene rappresentata dalla* (a^{v}).

(183) *Computando la lunghezza* σ *sulla tangente* τ, *essa congiungerà i punti* (x, y, z), (v_1, u_1, t_1); *quindi considerando il parallelepipedo rettangolare, formato coi lati* $v_1 - x$, $u_1 - y$, $t_1 - z$, *sarà* σ *la lunghezza della sua diagonale, che farà cogli assi* AX, AY, AZ, *ovvero*

Le coordinate x_1, y_1, z_1 verranno (§. 23. q^{VIII}) determinate come siegue

$$x_1 = x + \sigma\frac{dx}{ds} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \alpha'\right),$$

$$y_1 = y + \sigma\frac{dy}{ds} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + \alpha''\right),$$

$$z_1 = z + \sigma\frac{dz}{ds} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} + \alpha'''\right) \ (184);$$

convergono le α', α'', α''', insieme alla σ, nel lim. $= 0$. Dunque (p. 2.ª §. 125.) saranno le

---

coi lati dello stesso parallelepipedo rispettivamente gli angoli (σx), (σy), (σz). *Con queste considerazioni sarà facile determinare* (p. 2.ª §. 125 : 176.) *i valori di* v_1, u_1, t_1, *sopra espressi.*

(184) *Computando la lunghezza* σ *sulla curva, essa congiungerà i punti* (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), *e potrà considerarsi la* x_1 *qual funzione della* σ, *cosicchè abbiasi*

$$x_1 = f(x + \sigma);$$

ciò posto avremo (§. 23. q^{VIII}) *la*

$$(1)\ldots x_1 = f(x+\sigma) = f(x) + \sigma f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x + \varepsilon\sigma);$$

ma quando $\sigma = 0$, *dev' essere* $x_1 = x$, *dunque*

$$f(x) = x, \quad f(x + \varepsilon\sigma) = x + \varepsilon\sigma.$$

Ora poichè si considera s per variabile indipendente, avremo

$$f'(x) = \frac{dx}{ds}, \quad f''(x + \varepsilon\sigma) = \frac{d^2x}{ds^2} + \alpha',$$

essendo α' *una quantità infinitesima ; laonde fatte le opportune sostituzioni nella* (1), *avremo*

$$x_1 = x + \sigma\frac{dx}{ds} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \alpha'\right);$$

e similmente si determineranno gli assegnati valori delle y_1, z_1.

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\delta x) &= \frac{x_1 - v_1}{\delta} = \frac{\sigma^2}{2\delta}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \alpha'\right),\\
\cos(\delta y) &= \frac{y_1 - u_1}{\delta} = \frac{\sigma^2}{2\delta}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + \alpha''\right),\\
\cos(\delta z) &= \frac{z_1 - t_1}{\delta} = \frac{\sigma^2}{2\delta}\left(\frac{d^2z}{ds^2} + \alpha'''\right) \text{ (185).}
\end{aligned}\right\} (a^{VI})$$

Per quello riguarda la δ, poichè (p. 2.^{a} §. 176.) abbiamo

$$\delta = [(x_1 - v_1)^2 + (y_1 - u_1)^2 + (z_1 - t_1)^2]^{\frac{1}{2}},$$

sarà

$$\delta = \frac{\sigma^2}{2}\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \alpha'\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} + \alpha''\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} + \alpha'''\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \ldots (a^{VII}).$$

96.

Ora è facile trovare il coseno dell'angolo $(\delta\tau)$, che fa la retta δ con la tangente: poichè (p. 2.^{a} §. 177.) abbiamo

$$\cos(\delta\tau) = \cos(\delta x)\cos(\tau x) + \cos(\delta y)\cos(\tau y) + \cos(\delta z)\cos(\tau z)\,;$$

perciò (§. 95 : 94. a^{IV}) sarà

$$\cos(\delta\tau) = \frac{\frac{dx}{ds}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \alpha'\right) + \frac{dy}{ds}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + \alpha''\right) + \frac{dz}{ds}\left(\frac{d^2z}{ds^2} + \alpha'''\right)}{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \alpha'\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} + \alpha''\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} + \alpha'''\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Il numeratore di questa frazione riducesi ad

$$\alpha'\frac{dx}{ds} + \alpha''\frac{dy}{ds} + \alpha'''\frac{dz}{ds}\,;$$

poichè (§. 94. a''') abbiamo

---

(185) *Si ottengono queste formole riflettendo al parallelepipedo rettangolare, formato dai lati* $x_1 - v_1$, $y_1 - u_1$, $z_1 - t_1$; *ed alla sua diagonale* δ, *che unendo i punti* (x_1, y_1, z_1), (v_1, u_1, t_1), *forma rispettivamente gli angoli* (δx), (δy), (δz) *coi lati medesimi, ognuno dei quali si determina sottraendo fra loro due delle sei precedenti equazioni.*

$$dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z = ds d^2s = 0.$$

Pertanto concludiamo che, σ convergendo nel lim. $= 0$, l' angolo $(\delta\tau)$ si accosterà (§. 95.) tanto a 90°, finchè, fatto $\sigma = 0$ nel punto di contatto, sarà

$$(\delta\tau) = 90°.$$

97.

Pertanto la direzione della retta δ verge in quella di alcuna fra le normali, di numero infinite (§. 94.), che possono condursi pel punto (x, y, z) della curva (a). Questa normale particolare, che dicesi *principale*, venga espressa con ν_1; si avranno (§. 95. a^{VI}. a^{VII}) le

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\nu_1 x) &= \frac{d^2x}{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]^{\frac{1}{2}}},\\
\cos(\nu_1 y) &= \frac{d^2y}{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]^{\frac{1}{2}}},\\
\cos(\nu_1 z) &= \frac{d^2z}{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}\right\} (a^{VIII})$$

quindi poi si avranno (p. 2.ª §. 186.) l' equazioni

$$\frac{v - x}{d^2x} = \frac{u - y}{d^2y} = \frac{t - z}{d^2z} \ldots (a^{IX})$$

alla normale ν_1; non che (ivi) l' equazione

$$(v - x)d^2x + (u - y)d^2y + (t - z)d^2z = 0 \ldots (a^{X})$$

al piano che, passando pel punto (x, y, z), è perpendicolare alla stessa ν_1.

98.

Il piano condotto per la tangente e la normale principale, dicesi piano *osculatore* (186). Pongasi che (p. 2.ª §. 73. 6.°)

---

(186) *Si consideri sopra una data curva qualunque il punto* (x, y, z), *e s' immagini condotta per questo una tangente alla medesima, si potrà pure immaginare che passino per la tangente stessa un' infinità di piani, tutti diconsi* piani tangenti *la curva data in quel punto, dei quali uno certamente comprenderà la normale principale: questo,*

una retta k passi pel punto di contatto (x, y, z), e perpendicolarmente insista sul piano osculatore: poichè (p. 2.^{a} §. 69.) abbiamo

$$(k\tau) = 90^\circ, \quad (k\nu_1) = 90^\circ,$$

perciò (p. 2.^{a} §. 177.) sarà

$$\cos(k\tau) =$$
$$\cos(kx)\cos(\tau x) + \cos(ky)\cos(\tau y) + \cos(kz)\cos(\tau z) = 0,$$
$$\cos(k\nu_1) =$$
$$\cos(kx)\cos(\nu_1 x) + \cos(ky)\cos(\nu_1 y) + \cos(kz)\cos(\nu_1 z) = 0;$$

e conseguentemente (§. 94. a^{IV} : 97. a^{VIII}) avremo le seguenti

$$\left.\begin{array}{l} \cos(kx)dx + \cos(ky)dy + \cos(kz)dz = 0, \\ \cos(kx)d^2x + \cos(ky)d^2y + \cos(kz)d^2z = 0. \end{array}\right\} (a^{\text{XI}})$$

Alle due (a^{XI}) può sostituirsi (p. 1.^{a} §. 127.) la formola

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\cos(kx)}{dyd^2z - dzd^2y} = \dfrac{\cos(ky)}{dzd^2x - dxd^2z} = \dfrac{\cos(kz)}{dxd^2y - dyd^2x}, \\ \text{cui deve associarsi (p. 2.}^a\text{ §. 177.) la} \\ \qquad \cos^2(kx) + \cos^2(ky) + \cos^2(kz) = 1, \end{array}\right\} (a^{\text{XII}})$$

per ottenere i valori di

$$\cos(kx), \quad \cos(ky), \quad \cos(kz),$$

e così determinare la posizione del piano osculatore. In quanto all'equazione di questo piano, essa (p. 2.^{a} §. 186.) sarà

$$\left.\begin{array}{l} (v - x)\cos(kx) + (u - y)\cos(ky) + (t - z)\cos(kz) = 0, \\ \text{ovvero, per la prima delle } (a^{\text{XII}}), \text{ sarà} \\ (v - x)(dyd^2z - dzd^2y) + (u - y)(dzd^2x - dxd^2z) + \\ \qquad (t - z)(dxd^2y - dyd^2x) = 0. \end{array}\right\} (a^{\text{XIII}})$$

Se la curva (a) sia piana, ciascun vede che (a^{XIII}), niente altro sarà fuorchè il piano della stessa curva.

---

che merita particolare attenzione, viene denominato, come sopra è detto, piano osculatore.

99.

La curva posta nello spazio abbia gli assintoti: le projezioni di questi sui piani coordinati saranno gli assintoti delle projezioni di quella sui piani medesimi. Dunque il metodo per investigare gli assintoti di una linea curva, posta comunque nello spazio, può ridursi al metodo (§. 74.) per determinare gli assintoti delle curve, che sono poste in una superficie piana.

Del circolo osculatore,
ove generalmente delle evolute,
e delle curve osculatrici.

100.

I punti

$$(x, y, z), \quad (x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z),$$

oltre l'arco Δs, comprendano eziandio l'arco circolare $\Delta\chi$, di cui sia il raggio $= \rho$; in quei punti abbia l'arco $\Delta\chi$ per tangenti le rette θ', θ'', e l'arco Δs le altre τ, τ'; inoltre k' rappresenti la perpendicolare sul piano osculatore (§. 98.) condotto per $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Qui pure (§. 84.) si avrà (§. 76: 94.) la seguente

$$\lim. \frac{\Delta\chi}{\Delta s} = 1;$$

e perciò mentre il punto $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ accostasi all'altro (x, y, z), si cangerà ρ per modo, che la curvatura del circolo converga in quella della linea (a), presso il punto di contatto (x, y, z) (187). Inoltre la curva-

(187) *Questa convergenza di curvature avverà, purchè l'angolo* $(\tau\tau')$, *compreso fra le due tangenti agli estremi dell'arco infinitamente piccolo* Δs, *detto angolo di* contingenza, *insieme all'altro* (kk'), *formato dalle perpendicolari ai piani osculatori corrispondenti agli estremi dell'arco* Δs, *convergano ambedue nel corrispondente angolo* $(\theta'\theta'')$, *formato dalle tangenti* θ', θ'', *condotte agli estremi dell'arco circolare* $\Delta\chi$, *quando il punto* $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ *si accosti all'altro* (x, y, z). *E' da osservare che gli angoli* $(\tau\tau')$, (kk') *svaniscono ambedue, quando la curva (a) si cangi in una retta; svanirà poi solo il se-*

tura della linea (a), presso al punto (x, y, z), può considerarsi doppia, una cioè nel piano (a^{XIII}), l'altra nel piano (a^{X}): in ambo i casi (§. 83.) abbiamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(\theta'\theta'')}{\Delta\chi};$$

ma rispetto alla prima curvatura sarà

$$\text{lim.}\frac{(\theta'\theta'')}{(\tau\tau')} = 1,$$

rispetto alla seconda

---

condo, quando la curva stessa diverrà piana; e generalmente parlando essi angoli conserveranno valori differenti dallo zero, cosicchè altrettanto potrà dirsi de' limiti delle quantità

$$\frac{(\tau\tau')}{\Delta s}, \quad \frac{(kk')}{\Delta s}.$$

Questi limiti, che se voglia considerarsi una curva piana, equivalgono, il primo alla curvatura di essa (§. 83.), il secondo allo zero, servono a misurare in ogni caso ciò che dicesi prima e seconda curvatura *della linea proposta. Infatti per concepire una curva che non sia piana, bisogna non solo concepire che la tangente s' inclini da un elemento all' altro, lo che dà origine alla prima curvatura; ma pure che il piano di due consecutivi elementi vari di posizione nello spazio, lo che genera la curvatura seconda, la quale può essere paragonata alla torsione fatta subire ad una curva piana. D' altronde chiaro apparisce che queste due curvature saranno tanto più grandi, o tanto più piccole, quanto più gli angoli $(\tau\tau')$, (kk') saranno più grandi o più piccoli, per un medesimo valore di Δs, e che per conseguenza i limiti delle quantità*

$$\frac{(\tau\tau')}{\Delta s}, \quad \frac{(kk')}{\Delta s},$$

saranno la misura loro naturale, come viene dalle (a^{XIV}) stabilito, le quali furono dedotte, applicando ad ognuna delle due indicate curvature il ragionamento istituito (§. 83: 84.), per misurare quella di una curva piana.

$$\lim. \frac{(\theta'\theta'')}{(kk')} = 1 :$$

fatto dunque nel 1.° caso

$$\lim. \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r},$$

e nel secondo

$$\lim. \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R},$$

si otterrà

$$r = \lim. \frac{\Delta s}{(\tau\tau')}, \quad R = \lim. \frac{\Delta s}{(kk')} \ldots (a^{xiv}).$$

De' due circoli che possono descriversi coi raggi r, R, solo il primo dicesi propriamente osculatore; ha nel punto (x, y, z) la tangente comune con (a), il centro poi situato in un punto della corrispondente ν_1 (§. 97.) (188).

---

(188) *Per dimostrare che il raggio* r, *e che perciò il centro del circolo osculatore ad esso appartenente, si trova sulla normale principale* ν_1, *basta osservare che* (§. 100.) *il raggio medesimo si riferisce a quella fra le due curvature della linea* (a), *che giace nel piano osculatore* (a^{xiii}) (§. 98.). *Ciò posto siccome il raggio deve stare tutto nel piano della curvatura cui si appartiene, così dovrà* r *trovarsi tutto nel piano* (a^{xiii}); *ma il raggio medesimo esser deve perpendicolare alla tangente* (§. 100.), *dunque dovrà esso trovarsi pure nel piano normale* (a^{v}) (§. 94.): *dunque finalmente si troverà nella intersecazione di questi due piani, cioè sulla normale principale, su cui perciò si troverà eziandio il centro del circolo osculatore.*

Possiamo anche giungere a questa conseguenza riflettendo, che potendosi riguardare una curva a doppia curvatura, come un poligono in cui tre qualunque de' suoi lati consecutivi non possono giacere nel medesimo piano, dovrà il suo raggio di curvatura r, *spettante al punto* (x, y, z) *della curva, stare tutto nel piano che passa pel punto medesimo, e per gli altri due consecutivi. Sieno* v, u, t, *le coordinate di questo piano, sarà* (p. 2.ª §. 130. I.)

101.

Se i coseni degli angoli, che una delle τ, τ' forma cogli assi AX, AY, AZ, sieno espressi da

$$\cos(\tau x), \quad \cos(\tau y), \quad \cos(\tau z),$$

apparisce che i coseni degli angoli formati dall' altra, coi medesimi assi, potranno esprimersi con

$$\cos(\tau x) + \Delta\cos(\tau x), \quad \cos(\tau y) + \Delta\cos(\tau y),$$

$$(1) \ldots \mathrm{A}v + \mathrm{B}u + \mathrm{C}t + 1 = 0,$$

la sua equazione, la quale dovendo essere soddisfatta dalle coordinate x, y, z, *porge l' altra*

$$(2) \ldots \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + 1 = 0;$$

ed affinchè gli altri due punti consecutivi si trovino pure in quel piano, bisognerà di più che i differenziali primo, e secondo di questa equazione, coesistano insieme ai differenziali stessi della curva proposta; quindi sarà

$$\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy + \mathrm{C}dz = 0,$$

$$\mathrm{A}d^2x + \mathrm{B}d^2y + \mathrm{C}d^2z = 0,$$

dalle quali si ottiene

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{dxd^2y - dyd^2x}, \quad \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{dxd^2y - dyd^2x};$$

e sottraendo dall' equazione (1) *la* (2), *otterremo la*

$$\mathrm{A}(v - x) + \mathrm{B}(u - y) + \mathrm{C}(t - z) = 0,$$

nella quale ponendo i trovati valori di

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}, \quad \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}},$$

e sopprimendo i denominatori, avremo la

$$(v - x)(dyd^2z - dzd^2y) + (u - y)(dzd^2x - dxd^2z) +$$
$$(t - z)(dxd^2y - dyd^2x) = 0;$$

equazione del piano sul quale deve giacere il raggio r; *ma questa equazione* (§. 98.) *è quella del piano osculatore* (a^{XIII}), *dunque il raggio medesimo si deve trovare in questo piano; quindi ecc.*

$$\cos(\tau z) + \Delta\cos(\tau z) \quad (189).$$

Quindi (p. 2.ª §. 177.) sarà

$$\cos(\tau\tau') = \cos(\tau x)[\cos(\tau x) + \Delta\cos(\tau x)] +$$

$$\cos(\tau y)[\cos(\tau y) + \Delta\cos(\tau y)] + \cos(\tau z)[\cos(\tau z) + \Delta\cos(\tau z)] \quad (190),$$

$$1 = [\cos(\tau x) + \Delta\cos(\tau x)]^2 + [\cos(\tau y) + \Delta\cos(\tau y)]^2 +$$

$$[\cos(\tau z) + \Delta\cos(\tau z)]^2,$$

$$1 = \cos^2(\tau x) + \cos^2(\tau y) + \cos^2(\tau z);$$

perciò (p. 2.ª §. 127. 3.°) avremo

$$2[1 - \cos(\tau\tau')] = [2\text{sen}\tfrac{1}{2}(\tau\tau')]^2 =$$

$$[\Delta\cos(\tau x)]^2 + [\Delta\cos(\tau y)]^2 + [\Delta\cos(\tau z)]^2.$$

Da quì si discende alla

$$\frac{\Delta s^2}{[2\text{sen}\frac{1}{2}(\tau\tau')]^2} = \frac{\Delta s^2}{(\tau\tau')^2}\left[\frac{\frac{1}{2}(\tau\tau')}{\text{sen}\frac{1}{2}(\tau\tau')}\right]^2 =$$

$$\frac{1}{\left[\frac{\Delta\cos(\tau x)}{\Delta s}\right]^2 + \left[\frac{\Delta\cos(\tau y)}{\Delta s}\right]^2 + \left[\frac{\Delta\cos(\tau z)}{\Delta s}\right]^2};$$

---

(189) *In fatti come le coordinate* x, y, z, *di un estremo dell'arco* Δs *cangiano rispettivamente di* Δx, Δy, Δz, *passando all'altro dell'arco medesimo, così gli angoli*

$$\cos(\tau x), \quad \cos(\tau y), \quad \cos(\tau z),$$

cangeranno di

$$\Delta\cos(\tau x), \quad \Delta\cos(\tau y), \quad \Delta\cos(\tau z),$$

a cagione del passaggio stesso, nel quale τ *diviene* τ'; *avremo perciò*

$$\cos(\tau' x) = \cos(\tau x) + \Delta\cos(\tau x),$$

$$\cos(\tau' y) = \cos(\tau y) + \Delta\cos(\tau y),$$

$$\cos(\tau' z) = \cos(\tau z) + \Delta\cos(\tau z).$$

(190) *Si otterrà facilmente questa espressione riflettendo* (p. 2.ª §. 177.) *essere*

$$\cos(\tau\tau') = \cos(\tau x)\cos(\tau' x) + \cos(\tau y)\cos(\tau' y) + \cos(\tau z)\cos(\tau' z).$$

e passato prima pei limiti (p. 2.^{a} §. 129. 2.^{o}), poi fatta l' estrazione della radice quadrata, emergerà (§. 100. a^{XIV} : §. 94. a^{IV}) la formula

$$r = \frac{1}{\left[\left(\frac{d\cos(\tau x)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos(\tau y)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos(\tau z)}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{\left[\left(\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots (a^{XV}) \;(191).$$

Similmente si otterrà la

$$R = \frac{1}{\left[\left(\frac{d\cos(kx)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos(ky)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos(kz)}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots (a^{XVI}).$$

102.

Abbiansi a determinare le coordinate v, u, t, del punto, in cui trovasi posto il centro del circolo osculatore.

Poichè siffatto centro si trova (§. 100.) sulla normale principale ν_1, perciò (p. 2.^{a} §. 125.) sarà

$$\left.\begin{array}{l} \frac{v-x}{r} = \cos(\nu_1 x), \quad \frac{u-y}{r} = \cos(\nu_1 y), \\ \frac{t-z}{r} = \cos(\nu_1 z) \;(192). \end{array}\right\} (a^{XVII}),$$

---

(191) *Dunque assumendo la s per variabile indipendente, il raggio r di curvatura sarà espresso dalla semplicissima formola*

$$r = \frac{ds^2}{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

(192) *I punti estremi del raggio r trovandosi nello*

ovvero (§. 97. a^{VIII} : §. 101. a^{XV}) si avranno le

$$\frac{v-x}{r}=r\frac{d^2x}{ds^2},\quad \frac{u-y}{r}=r\frac{d^2y}{ds^2},\quad \frac{t-z}{r}=r\frac{d^2z}{ds^2};$$

e perciò le

$$v-x=r^2\frac{d^2x}{ds^2},\quad u-y=r^2\frac{d^2y}{ds^2},\quad t-z=r^2\frac{d^2z}{ds^2}\ldots(a^{\mathrm{XVIII}})\ (193).$$

103.

Cessando s di rappresentare la variabile indipendente, affinchè per tale abbiasi p. e. la z, dovranno (§. 15.) adoperarsi le

$$\frac{dsd^2x-dxd^2s}{ds^3},\quad \frac{dsd^2y-dyd^2s}{ds^3},\quad -\frac{dzd^2s}{ds^3}$$

invece delle

$$\frac{d^2x}{ds^2},\quad \frac{d^2y}{ds^2},\quad \frac{d^2z}{ds^2}:$$

a questo modo la (a^{XV}) si cangerà (§. 94. a''') nella

$$r=\frac{[1+f'^2(z)+\mathrm{f}'^2(z)]^{\frac{3}{2}}}{[(f'(z)\mathrm{f}''(z)-\mathrm{f}'(z)f''(z))^2+f''^2(z)+\mathrm{f}''^2(z)]^{\frac{1}{2}}}\ldots(a^{\mathrm{XIX}})\ (194),$$

---

spazio fissati, uno dalle coordinate x, y, z, l' altro dalle v, u, t, si otterranno facilmente le (a^{XVIII}) mediante la soluzione di tanti triangoli rettangoli.

(193) *Si otterranno facilmente queste formole, se riflettasi che dalla (a^{XV}) abbiamo*

$$[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]^{\frac{1}{2}}=\frac{ds^2}{r}.$$

(194) *Per giungere a questa formola si rifletta, che le quantità*

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\quad \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\quad \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds},$$

e le (a^{XVIII}) nelle

---

contenute nella seconda espressione di r (§. 101. a^{XV}), *sono eguali* (§. 14 : 15.) *rispettivamente alle*

$$\frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^3}, \quad \frac{dsd^2y - dyd^2s}{ds^3}, \quad -\frac{dzd^2s}{ds^3},$$

quante volte suppongasi non s, *come nel caso precedente, ma si bene* z, *la variabile indipendente, come nell' attual caso. Fatte pertanto queste sostituzioni nell'* (a^{XV}), *cioè nella*

$$r = \frac{1}{\left[\left(\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

avremo

$$r = \frac{ds^3}{[(dsd^2x - dxd^2s)^2 + (dsd^2y - dyd^2s)^2 + (dzd^2s)^2]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{ds^3}{[ds^2((d^2x)^2 + (d^2y)^2) + (d^2s)^2ds^2 - 2dsd^2s(dxd^2x + dyd^2y)]^{\frac{1}{2}}},$$

e riflettendo essere

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y,$$

sarà

$$r = \frac{ds^3}{[ds^2((d^2x)^2 + (d^2y)^2) + ds^2(d^2s)^2 - 2ds^2(d^2s)^2]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{ds^2}{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

formola rimarchevole per la sua semplicità, dalla quale eliminando $(d^2s)^2$ *avremo*

$$r = \frac{ds^3}{[((d^2x)^2 + (d^2y)^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (dxd^2x + dyd^2y)^2]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\left.\begin{aligned} v - x &= \frac{\mathrm{f}'(z)[\mathrm{f}'(z)f''(z) - f'(z)\mathrm{f}''(z)] + f''(z)}{[1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)]^2} r^2 , \\ u - y &= \frac{f'(z)[f'(z)\mathrm{f}''(z) - \mathrm{f}'(z)f''(z)] + \mathrm{f}''(z)}{[1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)]^2} r^2 , \\ t - z &= -\frac{f'(z)f''(z) + \mathrm{f}'(z)\mathrm{f}''(z)}{[1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)]^2} r^2 \quad (195). \end{aligned}\right\} (a^{XX})$$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{[(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dzd^2y)^2 + (dzd^2x)^2]}.$$

Ora dividendo tanto il numeratore quanto il denominatore di questa espressione per la quantità $dz^{\frac{6}{2}}$, *e ponendo mente alle* (*a*) (§. 93.), *otterremo*

$$r = \frac{\left(\frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{(f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z) + 1)^{\frac{3}{2}}}{[(f'(z)\mathrm{f}''(z) - \mathrm{f}'(z)f''(z))^2 + \mathrm{f}''^2(z) + f''^2(z)]^{\frac{1}{2}}}.$$

(195) *Il calcolo istituito per ottenere la* (a^{XIX}), *servirà di schiarimento a quello da istituire per giungere alle formole* (a^{XX}), *le quali discendono dalle* (a^{XVIII}), *quando in queste si ritenga non* s, *ma* z *per variabile indipendente. Osserveremo inoltre che per la medesima ipotesi, essendosi ottenuta nella precedente nota la elegante formola*

$$r = \frac{ds^2}{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

sarà facile ottenere dalle (a^{XVIII}), *mediante questa, le seguenti*

104.

Eliminate le x, y dalle (a), (a^{XVIII}), nasceranno le tre

$$\nu - f(z) = f_1(z), \quad u - \mathrm{f}(z) = f_2(z), \quad t - z = f_3(z);$$

dalle quali, eliminata z, si otterranno le due

$$\left\{ \nu = f_4(t), \quad u = f_5(t) \right\} (a^{\mathrm{XXI}}),$$

appartenenti alla linea, in cui si trovano i centri dei circoli tutti, osculatori la curva (a) (196).

105.

Le formole (a^{XVII}) somministrano (p. 2.ª §. 177.) la seguente

---

$$\nu - x = \frac{ds^3 d \,.\, \dfrac{dx}{ds}}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2},$$

$$u - y = \frac{ds^3 d \,.\, \dfrac{dy}{ds}}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2},$$

$$t - z = \frac{ds^3 d \,.\, \dfrac{dz}{ds}}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2},$$

formole non meno eleganti della prima, in ognuna delle quali si prende z per variabile indipendente.

(196) *Quando il punto (x, y, z) passi da un luogo all' altro sulla curva (a), il relativo centro di curvatura farà nel tempo stesso altrettanto; e se quel punto si muova con moto continuo sulla curva medesima, questo descriverà un' altra curva, l' equazioni della quale si otterranno 1.° esprimendo le (a^{XVIII}) in funzione di una sola variabile, per es. di z, mediante le (a); 2.° eliminando questa dalle stesse (a^{XVIII}). Da ciò si otterranno due equazioni fra le sole variabili ν, u, t, appartenenti ad una linea, che sarà il luogo geometrico dei centri tutti di curvatura, spettanti alla curva (a). Siffatto processo è appunto quello tracciato in questo paragrafo.*

$$(v - x)^2 + (u - y)^2 + (t - z)^2 = r^2 \ldots (a^{XXII});$$

le formole (a^{XVIII}) moltiplicate, la prima per d^2x, la seconda per d^2y, la terza per d^2z, danno (§. 101. a^{XV}) la

$$(v - x)d^2x + (u - y)d^2y + (t - z)d^2z = ds^2;$$

ovvero (§. 94. a''') la

$$\left.\begin{array}{c}(v - x)d^2x + (u - y)d^2y + (t - z)d^2z - \\ dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0:\end{array}\right\} (a^{XXIII}):$$

ciascun vede che l'equazioni (a^{XXII}), (a^{XXIII}), (a^{V}. §. 94.), vengono insieme soddisfatte dalle coordinate v, u, t della linea (a^{XXI}) (197).

Mediante la (a^{XXIII}) si riduce la (a^{V}), differenziata, alla

---

(197) *Le* (a^{XVIII}) *moltiplicate, la prima per* dx, *la seconda per* dy, *la terza per* dz, *e sommate fra loro, danno la* ($a.^{V}$ §. 94.), *avvertendo che* (§. 96.) *si ha*

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = 0.$$

Inoltre per la prima delle (a^{XII} §. 98.) *potremo stabilire le*

$$dyd^2z - dzd^2y = A\cos(kx),$$

$$dzd^2x - dxd^2z = A\cos(ky),$$

$$dxd^2y - dyd^2x = A\cos(kz).$$

Ora moltiplicate rispettivamente per queste le (a^{XVIII}), *ed avuto riguardo alla seconda delle* (a^{XI} §. 98.), *avremo la seconda delle* (a^{XIII}). *Dunque dalle* (a^{XVII}), *e dalle* (a^{XVIII}), *con opportuni calcoli, deduconsi le tre seguenti*

$$(v - x)^2 + (u - y)^2 + (t - z)^2 = r^2,$$

$$(v - x)dx + (u - y)dy + (t - z)dz = 0,$$

$$(v - x)(dyd^2z - dzd^2y) + (u - y)(dzd^2x - dxd^2z) +$$

$$(t - z)(dxd^2y - dyd^2x) = 0,$$

che tutte vengono soddisfatte dalle coordinate v, u, t *della linea* (a^{XXI}). *Perciò queste equazioni esprimono, la prima che il centro di curvatura trovasi ad una distanza* r *dal punto* (x, y, z); *la seconda che trovasi nel piano normale; la terza che sta pure sul piano osculatore; ciò si accorda con le osservazioni già fatte.*

$$dv dx + du dy + dt dz = 0 \ldots (a^{\text{xxiv}})\ ;$$

quindi se denoti ς l'arco della linea (a^{xxi}), e τ_1 la retta tangente nel punto $(v\ ,\ u\ ,\ t)$ la stessa (a^{xxi}), sarà (§. 94. a^{iv} ; e p. 2.^{a} §. 177.)

$$\cos(\tau\tau_1) = \frac{dv}{d\varsigma} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{du}{d\varsigma} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{dt}{d\varsigma} \cdot \frac{dz}{ds} = 0\ ,$$

e perciò $(\tau\tau_1) = 90°$ (198). Mediante la (a^{v}) si riduce la (a^{xxii}), differenziata, alla

$$\left.\begin{array}{l} (v-x)dv + (u-y)du + (t-z)dt = rdr\ , \\ \text{laonde (§. 102. } a^{\text{xvii}} : \text{§. 94. } a^{\text{iv}} \text{ ; e p. 2.}^a \text{ §. 177.) sarà} \\ \dfrac{dr}{d\varsigma} = \dfrac{v-x}{r} \cdot \dfrac{dv}{d\varsigma} + \dfrac{u-y}{r} \cdot \dfrac{du}{d\varsigma} + \dfrac{t-z}{r} \cdot \dfrac{dt}{d\varsigma} = \cos(v_1 \tau_1). \end{array}\right\} (a^{\text{xxv}})$$

Supposto che la curva (a) sia piana, le rette v_1, τ_1 costantemente (§. 88.) coincideranno fra loro ; e perciò i valori dei differenziali dr, $d\varsigma$ costantemente (§. 89.) si uguaglieranno (199).

106.

Alla curva (a) si avvolga un filo, quindi si svolga in guisa, che la sua parte libera, sia sempre tesa, e tangente (§. 93.) la curva (a) ; l'estremo del filo descriverà la curva

$$\left\{ v = \mathrm{F}(t), \quad u = \varphi(t) \right\} (a^{\text{xxvi}}) :$$

ritenendo le denominazioni già stabilite (§. 90.), diremo la curva (a) evoluta, e la (a^{xxvi}) generata dallo svolgimento di quella. Facciamo su tali curve le seguenti osservazioni. 1.° Esprimendo λ la distanza fra i due punti $(x\ ,\ y\ ,\ z)$, $(v\ ,\ u\ ,\ t)$,

---

(198) *Cioè la tangente condotta alla nuova curva (a^{xxi}) pel punto $(v\ ,\ u\ ,\ t)$, forma un angolo retto con la tangente condotta alla curva (a), pel corrispondente punto $(x\ ,\ y\ ,\ z)$. Dunque la tangente τ_1 alla nuova curva, è compresa dal piano normale alla data nel punto $(x\ ,\ y\ ,\ z)$.*

(199) *Però se la stessa curva non sia piana, il rapporto $\dfrac{dr}{d\varsigma}$ riceve generalmente un valore diverso dall' unità.*

che si corrispondono, l'uno in (a), l'altro in (a^{xxvi}), si avranno (§. 94. a^{iv}) le

$$\frac{\nu - x}{\lambda} = \cos(\lambda x) = \cos(\tau x) = \frac{dx}{ds},$$

$$\frac{\nu - y}{\lambda} = \cos(\lambda y) = \cos(\tau y) = \frac{dy}{ds},$$

$$\frac{t - z}{\lambda} = \cos(\lambda z) = \cos(\tau z) = \frac{dz}{ds};$$

donde

$$\nu - x = \lambda\frac{dx}{ds},\ u - y = \lambda\frac{dy}{ds},\ t - z = \lambda\frac{dz}{ds}\ \ldots (a^{xxvii}):$$

abbiamo inoltre

$$\lambda + s = \text{const.}$$

perciò

$$d\lambda = -ds\ \ldots (a^{xxviii}).$$

Adunque l'equazioni (a^{xxvii}), differenziate, daranno le

$$d\nu = -\lambda d(\frac{dx}{d\lambda}),\ du = -\lambda d(\frac{dy}{d\lambda}),\ dt = -\lambda d(\frac{dz}{d\lambda}) \ldots (a^{xxix}).$$

Inoltre (§. 94. a''') si ha

$$d\lambda^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

e conseguentemente

$$(\frac{dx}{d\lambda})^2 + (\frac{dy}{d\lambda})^2 + (\frac{dz}{d\lambda})^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{d\lambda}d(\frac{dx}{d\lambda}) + \frac{dy}{d\lambda}d(\frac{dy}{d\lambda}) + \frac{dz}{d\lambda}d(\frac{dz}{d\lambda}) = 0:$$

l'equazioni pertanto (a^{xxix}) moltiplicate, la prima per dx, la seconda per dy, la terza per dz, somministrano la

$$d\nu dx + du dy + dt dz = 0\ \ldots (a^{xxx}).$$

Dalla (a^{xxx}) concludiamo (§. 94. a^{iv}: e p. 2.^{a} §. 177.) che le due tangenti, una della curva (a) nel punto (x, y, z), l'altra della curva (a^{xxvi}) nel punto (ν, u, t), saranno fra loro perpendicolari. 2.° Data la curva sviluppata, potranno conoscersi l' equazioni (a^{XXVI}) alla curva generata dallo svolgimento di essa: per tal fine prima sostituiscansi nelle (a^{XXVII}) i valori delle x, y, z, λ, espressi per s; poi si elimini la s (200). 3.° Pel contrario, data la curva (a^{XXVI}), potranno come siegue determinarsi l'equazioni (a) della corrispondente sviluppata: abbiamo (p. 2.^{a} §. 176.)

$$(x - v)^2 + (y - u)^2 + (z - t)^2 = \lambda^2 \ldots (a_1);$$

e poichè le (a^{XXVII}), (a^{XXVIII}) porgono

$$dx = \frac{x - v}{\lambda} d\lambda, \quad dy = \frac{y - u}{\lambda} d\lambda, \quad dz = \frac{z - t}{\lambda} d\lambda \ldots (a_2),$$

perciò la (a_1), differenziata, si ridurrà nella

$$\frac{d\lambda}{\lambda}[(x - v)^2 + (y - u)^2 + (z - t)^2] -$$
$$(x - v)dv - (y - u)du - (z - t)dt = \lambda d\lambda;$$

che per la stessa (a_1) torna nella

$$(x - v)dv + (y - u)du + (z - t)dt = 0 \ldots (a_3).$$

Differenziando (a_3), ed insieme tenendo conto della (a_2), otterremo la

$$(x - v)d^2v + (y - u)d^2u + (z - t)d^2t +$$
$$\frac{d\lambda}{\lambda}[(x - v)dv + (y - u)du + (z - t)dt] - dv^2 - du^2 - dt^2 = 0;$$

la quale, indicato con ς l' arco della curva (a^{XXVI}), si ridurrà, per la stessa (a_3), e per la $(a'''$. §. 94.), nella

---

(200) *Quando sia cognita la sviluppata* (a), *come appunto è supposto in tutta la precedente dottrina, basterà per avere l' equazioni* (a^{XXVI}) *della sua generata, porre nelle* (a^{XXVII}) *i valori delle* x, y, z, *espressi per* ς, *e nelle medesime il valore di* λ, *dedotto dalla*

$$\lambda + s = \text{cost.},$$

eliminando poscia la s *dall' equazioni stesse: a questo modo si otterranno due equazioni fra le* v, u, t, *che rappresenteranno la curva* (a^{XXVI}), *descritta dall' estremo della distanza* λ.

$$(x - v)d^2v + (y - u)d^2u + (z - t)d^2t = d\varsigma^2 \ldots (a_4).$$

Differenziando l' (a_4), con supporre ς variabile indipendente, e tenendo conto nuovamente della (a_2), otterremo la

$$(x - v)(d^3v + \frac{d\lambda}{\lambda} d^2v) + (y - u)(d^3u + \frac{d\lambda}{\lambda} d^2u) +$$

$$(z - t)(d^3t + \frac{d\lambda}{\lambda} d^2t) - dvd^2v - dud^2u - dtd^2t = 0 ;$$

e poichè abbiamo

$$dvd^2v + dud^2u + dtd^2t = d\varsigma d^2\varsigma = 0 ,$$

perciò sarà

$$(x - v)d(\lambda d^2v) + (y - u)d(\lambda d^2u) + (z - t)d(\lambda d^2t) = 0 \ldots (a_5).$$

Le formole (a_3), (a_5) somministrano

$$\frac{x - v}{dud(\lambda d^2t) - dtd(\lambda d^2u)} = \frac{y - u}{dtd(\lambda d^2v) - dvd(\lambda d^2t)} =$$

$$\frac{z - t}{dvd(\lambda d^2u) - dud(\lambda d^2v)} \quad (201) ;$$

e conseguentemente, fatto per brevità

$$dud(\lambda d^2t) - dtd(\lambda d^2u) = Q' , \quad dtd(\lambda d^2v) - dvd(\lambda d^2t) = Q'' ,$$

$$dvd(\lambda d^2u) - dud(\lambda d^2v) = Q''' ,$$

---

(201) *Si moltiplichi l' equazione (a_5) per dt, l' equazione (a_3) per $d(\lambda d^2t)$, e dal primo prodotto si sottragga il secondo : avremo*

$$\frac{x - v}{dud(\lambda d^2t) - dtd(\lambda d^2u)} = \frac{y - u}{dtd(\lambda d^2v) - dvd(\lambda d^2t)} :$$

se poi si moltiplichi l' equazione (a_3) per $d(\lambda d^2u)$, l' equazione (a_5) per du, e dal primo prodotto venga sottratto il secondo, avremo

$$\frac{x - v}{dud(\lambda d^2t) - dtd(\lambda d^2u)} = \frac{z - t}{dvd(\lambda d^2u) - dud(\lambda d^2v)} .$$

Questi due risultamenti, paragonati fra loro, daranno la formola sopra espressa.

si troverà, per la (a_4), essere

$$\frac{x-v}{Q'}=\frac{y-u}{Q''}=\frac{z-t}{Q'''}=\frac{d\varsigma^2}{Q'd^2v+Q''d^2u+Q'''d^2t}\ (202).$$

Abbiamo poi (p. 1.^{a} §. 197.)

$$\frac{(x-v)^2}{Q'^2}=\frac{(y-u)^2}{Q''^2}=\frac{(z-t)^2}{Q'''^2}=$$

$$\frac{(x-v^2)+(y-u^2)+(z-t^2)}{Q'^2+Q''^2+Q''^2}=\frac{\lambda^2}{Q'^2+Q''^2+Q'''^2};$$

dunque sarà

$$\frac{\lambda^2}{Q'^2+Q''^2+Q'''^2}=\frac{d\varsigma^4}{(Q'd^2v+Q''d^2u+Q'''d^2t)^2}\ldots(a_6).$$

Ora nell' (a_6) si pongano i valori delle v, u, t, espressi per ς; nascerà l' equazione differenziale di prim' ordine

$$\Phi(\lambda, \varsigma, \frac{d\lambda}{d\varsigma})=0\ldots(a_7)$$

fra la variabile ς, l' incognita λ, e la derivata $\frac{d\lambda}{d\varsigma}$. Pongasi che l' (a_7) venga soddisfatta dalla

$$\lambda=\psi(\varsigma, C)\ldots(a_8),$$

in cui (§. 53.) denota C una quantità costante, ed arbitraria; se nelle (a_1), (a_3), (a_4) sostituiscansi prima i valori delle v,

---

(202) *Si ottiene l' ultimo membro di questa uguaglianza nel modo seguente*

$$\frac{x-v}{Q'}=\frac{y-u}{Q''}=\frac{z-t}{Q'''}=$$

$$\frac{(x-v)d^2v}{Q'd^2v}=\frac{(y-u)d^2u}{Q''d^2u}=\frac{(z-t)d^2t}{Q'''d^2t}=$$

$$\frac{(x-v)d^2v+(y-u)d^2u+(z-t)d^2t}{Q'd^2v+Q''d^2u+Q'''d^2t}=$$

$$\frac{ds^2}{Q'd^2v+Q''d^2u+Q''d^2t}.$$

u, t, λ, espressi per ς, poscia si elimini ς, nasceranno l'equazioni (a), spettanti alla richiesta sviluppata: del resto la determinazione della funzione ψ dipende dal calcolo integrale. 4.° Poichè C è arbitraria, tante saranno le sviluppate, quanti sono i valori della stessa C; apparteranno cioè alla curva (a^{xxvi}) innumerevoli sviluppate. 5.° L' equazione fra le x y, z, risultante dalla eliminazione (3.°) della quantità ς fra le due (a_3), (a_4), sarà propria di una superficie nella quale si comprendono tutte le sviluppate della curva (a^{xxvi}): ma basta di ciò; ed aggiungiamo alcun che delle curve osculatrici.

107.

1.° Poichè, le due curve (a), (b. §. 93. 2.°) ivi diconsi osculatrici, ove hanno e la tangente, ed il circolo osculatore comune; perciò rispetto al punto di cambagiamento dovranno (§. 93. 2.°) oltre le

$$f(z) = \varphi(z), \quad \mathrm{f}(z) = \psi(z), \quad f'(z) = \varphi'(z), \quad \mathrm{f}'(z) = \psi'(z),$$

verificarsi ancora le

$$f''(z) = \varphi''(z), \quad \mathrm{f}''(z) = \psi''(z) \quad (203):$$

---

(203) *Qui osserveremo che le*

$$f(z) = \varphi(z), \quad \mathrm{f}(z) = \psi(z),$$

significano essere comune alle due curve il punto (x, y, z): *che le altre*

$$f'(z) = \varphi'(z), \quad \mathrm{f}'(z) = \psi'(z),$$

associate alle prime, significano (§. 93.) *avere le curve medesime in quel punto la tangente comune: che le ultime poi*

$$f''(z) = \varphi''(z), \quad \mathrm{f}''(z) = \psi''(z),$$

associate alle precedenti, significano esse godere nel punto medesimo ugual raggio di curvatura. Potremo dunque dire che due curve a doppia curvatura saranno l' una dell' altra osculatrici nel punto comune, corrispondente all' ordinata z, quando presa la z per variabile indipendente, le sei quantità

$$x, \; y, \; x', \; y', \; x'', \; y'',$$

conservino, passando da una curva all' altra, i medesimi valori numerici, ed i medesimi segni.

infatti dalla prima e terza delle (a^{xx} §. 103.) nascono le

$$f''(z) = \frac{v - x - (t - z)f'(z)}{r^2}[1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)]\,,$$

$$\varphi''(z) = \frac{v - x - (t - z)\varphi'(z)}{r^2}[1 + \varphi'^2(z) + \psi'^2(z)]\,;$$

dalla seconda e terza si ottengono le

$$\mathrm{f}''(z) = \frac{u - y - (t - z)\mathrm{f}'(z)}{r^2}[1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)]\,,$$

$$\psi''(z) = \frac{u - y - (t - z)\psi'(z)}{r^2}[1 + \varphi'^2(z) + \psi'^2(z)] \quad (204).$$

---

(204) *Dalla prima delle* (a^{xx} §. 103.) *abbiamo evidentemente*

$$\frac{(v - x)[1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)]^2}{r^2} = f''(z)\mathrm{f}'^2(z) - f'(z)\mathrm{f}'(z)\mathrm{f}''(z) + f''(z);$$

dalla terza delle formole stesse, moltiplicata per $f'(z)$, *abbiamo*

$$-\frac{(t - z)[1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)]^2}{r^2}f'(z) = f''(z)f'^2(z) + f'(z)\mathrm{f}'(z)\mathrm{f}''(z);$$

e sommando insieme questi due risultamenti otterremo

$$\frac{v - x - (t - z)f'(z)}{r^2}[1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)]^2$$
$$= [1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)]f''(z)\,,$$

ovvero

$$f''(z) = \frac{v - x - (t - z)f'(z)}{r^2}[1 + f'^2(z) + \mathrm{f}'^2(z)].$$

Similmente operando sulla seconda e terza delle (a^{xx}) *medesime, però moltiplicata questa non più per* $f'(z)$, *bensì per* $\mathrm{f}'(z)$, *si otterrà il valore di* $\mathrm{f}''(z)$ *sopra espresso. I valori delle* $f''(z)$, $\mathrm{f}''(z)$ *così trovati per la curva* (*a*), *si cangeranno i quelli spettanti rispettivamente alle* $\varphi''(z)$, $\psi''(z)$, *per la curva* (*b*), *facendo passaggio da quella a questa curva, cioè ponendo* $\varphi'(z)$ *e* $\psi'(z)$ *in luogo di* $f'(z)$ *e* $\mathrm{f}'(z)$. *Ora*

2.° Quindi siegue (§. 92.) che se le (a), (b) si combaciano nel punto (x, y, z), si combacieranno pure le due projezioni

$$x = f(z), \quad x = \varphi(z),$$

nel punto (x, z); similmente le

$$y = \mathrm{f}(z), \quad y = \psi(z),$$

nel punto (y, z); e viceversa (205). 3.° Inoltre denotando c, c' gli ordini delle quantità infinitesime

$$f(z+\beta) - \varphi(z+\beta), \quad \mathrm{f}(z+\beta) - \psi(z+\beta),$$

e posto

$$c = c', \quad \text{ovvero} \quad c \text{ per es. } < c',$$

avranno luogo (§. 92. 4.°) nell'uno e nell'altro caso le

---

badando alle condizioni del combagiamento, cioè alle prime quattro equazioni stabilite nel 1.° di questo paragrafo, ed alle coordinate v, u, t del centro di curvatura, che debbono essere le stesse passando dalla curva (a) *alla* (b), *avremo le*

$$f''(z) = \varphi''(z), \quad \mathrm{f}''(z) = \psi''(z).$$

(205) *Nelle condizioni pel combagiamento stabilito nel 1.° di questo paragrafo, sono comprese le*

$$f(z) = \varphi(z), \quad f'(z) = \varphi'(z), \quad f''(z) = \varphi''(z);$$

dunque (§. 92.) *le curve*

$$x = f(z), \quad x = \varphi(z),$$

poste nel piano XZ, *ossia le projezioni delle* (a), (b) *su questo piano medesimo, si combacieranno nel punto* (x, z). *Similmente poichè in quelle stesse condizioni si comprendono le*

$$\mathrm{f}(z) = \psi(z), \quad \mathrm{f}'(z) = \psi'(z), \quad \mathrm{f}''(z) = \psi''(z);$$

perciò (§. 92.) *le curve*

$$y = \mathrm{f}(z), \quad y = \psi(z),$$

poste nel piano YZ, *ossia le projezioni delle* (a), (b) *sul piano stesso, avranno il punto* (y, z) *di combagiamento.*

$$\left.\begin{array}{l} f(z)=\varphi(z)\,,\quad f'(z)=\varphi'(z)\,,\quad f''(z)=\varphi''(z)\,, \\ \qquad\qquad f'''(z)=\varphi'''(z)\,,\ \text{ecc.}\ \ldots \\ \text{ed insieme le} \\ \mathrm{f}(z)=\psi(z)\,,\quad \mathrm{f}'(z)=\psi'(z)\,,\quad \mathrm{f}''(z)=\psi''(z)\,, \\ \qquad\qquad \mathrm{f}'''(z)=\psi'''(z)\,,\ \text{ecc.}\ \ldots \end{array}\right\}(a_9)$$

sino all' ordine $= c$, ovvero immediatamente $< c$ (206).

---

(206) *Ad intendere vie più la esposta dottrina sulle curve osculatrici, faremo della medesima, similmente a quanto fu praticato con la nota (178), un applicazione alla ricerca tanto del raggio di curvatura, e delle coordinate che determinano il centro di essa, quanto del piano osculatore, col seguente*

Esempio.

Sia r il raggio di una sfera, sieno v, u, t le coordinate del suo centro, ed x_1, y_1, z_1 quelle di un punto qualunque della sua superficie, sarà

$$\left.\begin{array}{l} (v-x_1)^2+(u-y_1)^2+(t-z_1)^2-r^2=0 \\ \textit{l' equazione della medesima. Inoltre la} \\ (v-x_1)\cos(kx_1)+(u-y_1)\cos(ky_1)+(t-z_1)\cos(kz_1)=0 \end{array}\right\}(b')$$

sarà (p. 2.ª §. 186.) *l' equazione di un piano, che passa pel punto delle coordinate v, u, t, perpendicolarmente ad una retta k: è chiaro che le (b') rappresenteranno insieme il circolo formato dalla intersecazione di queste due superficie. Suppongasi ora che la seconda delle curve osculatrici, cioè la* (*b.* §. 93.) *sia un circolo, quale appunto è quello rappresentato dalle (b'), le condizioni affinchè questo sia osculatore della prima curva, cioè della* (*a.* §. 93.), *saranno quelle che nascono dal supporre le stesse (b'), ed i differenziali loro di primo e di second' ordine, cioè le*

$$(v-x_1)dx_1+(u-y_1)dy_1+(t-z_1)dz_1=0\,,$$

$$(v-x_1)d^2x_1+(u-y_1)d^2y_1+(t-z_1)d^2z_1$$
$$-(dx_1^2+dy_1^2+dz_1^2)=0\,,$$

$$\cos(kx_1)dx_1+\cos(ky_1)dy_1+\cos(kz_1)dz_1=0\,,$$

Del piano tangente, della corrispondente normale, dei coni e cilindri circoscritti alle superficie curve.

108.

Sieno l' equazioni

$$z = f(x, y), \quad t - z_1 = a(v - x_1) + a'(u - y_1),$$

$$\cos(kx_1)d^2x_1 + \cos(ky_1)d^2y_1 + \cos(kz_1)d^2z_1 = 0,$$

verificate, ponendo in esse le

$$x, \; y, \; z, \; dx, \; dy, \; dz, \; d^2x, \; d^2y, \; d^2z,$$

in vece delle

$$x_1, \; y_1, \; z_1, \; dx_1, \; dy_1, \; dz_1, \; d^2x_1, \; d^2y_1, \; d^2z_1.$$

Perciò in questa ipotesi dovranno verificarsi le

$$(v - x)^2 + (u - y)^2 + (t - z)^2 - r^2 = 0,$$

$$(v - x)dx + (u - y)dy + (t - z)dz = 0,$$

$$(v - x)d^2x + (u - y)d^2y + (t - z)d^2z - ds^2 = 0,$$

$$(v - x)\cos(kx) + (u - y)\cos(ky) + (t - z)\cos(kz) = 0,$$

$$\cos(kx)dx + \cos(ky)dy + \cos(kz)dz = 0,$$

$$\cos(kx)d^2x + \cos(ky)d^2y + \cos(kz)d^2z = 0.$$

A queste unendo la

$$\cos^2(kx) + \cos^2(ky) + \cos^2(kz) - 1 = 0,$$

avremo quanto basta per determinare le incognite

$$v, \; u, \; t, \; r, \; (kx), \; (ky), \; (kz),$$

nella ipotesi che sia s la variabile indipendente. Ma poichè delle precedenti equazioni, nelle quali debbono le

$$x, \; y, \; z, \; dx, \; dy, \; dz, \; d^2x, \; d^2y, \; d^2z,$$

essere dedotte dalla (a), le prime tre coincidono rispettiva-

una (p. 2.^{a} §. 180.) alla superficie curva, l'altra (p. 2.^{a} §. 180. I.° 2.°) al piano tangente nel punto (x_1, y_1, z_1): la prima differenziata somministra

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy,$$

la seconda, pure differenziata, produce

$$dt = adv + a'du;$$

perciò

$$dz - dt = f'_x(x, y)dx - adv + f'_y(x, y)dy - a'du.$$

Facciasi che le coordinate x, y, z, con le v, u, t convergano rispettivamente nelle x_1, y_1, z_1; sarà nel limite

$$0 = [f'_{x_1}(x_1, y_1) - a]dx_1 + [f'_{y_1}(x_1, y_1) - a']dy_1,$$

e conseguentemente

$$f'_{x_1}(x_1, y_1) - a = 0, \quad f'_{y_1}(x_1, y_1) - a' = 0,$$

$$a = f'_{x_1}(x_1, y_1), \quad a' = f'_{y_1}(x_1, y_1).$$

Suppresso adunque l'indice, si avrà l'equazione

$$t - z = \frac{dz}{dx}(v - x) + \frac{dz}{dy}(u - y) \ldots (h) \quad (207),$$

al piano tangente la superficie

$$z = f(x, y) \ldots (h')$$

nel punto (x, y, z).

---

mente con le (a^{XXII} §. 105.), (a^{V} §. 94.), (a^{XXIII} §. 105.); *le ultime tre poi con le* (a^{XIII}. a^{XI} §. 93.); *perciò i valori delle incognite medesime coincideranno pure con quelli ottenuti* (103. a^{XV} §. 102. a^{XVIII} §. 98. a^{XII}), *come era da credere. Dunque il circolo così determinato coincide col circolo di curvatura della* (a), *nel suo punto* (x, y, z), *ed i valori degli angoli* (kx), (ky), (kz), *ottenuti a questo modo, coincidono con quelli che determinano il piano osculatore nel punto stesso.*

(207) *Dunque il piano tangente ad una superficie curva, in qualsivoglia suo punto, è unico; mentre infiniti di numero sono i piani tangenti che possono condursi per qualsiasi punto di una curva* (*nota* 186.).

Si osservi che le due superficie curve (h'), $z = \mathrm{f}(x, y)$, ivi diconsi a contatto fra loro, ove hanno comune il piano tangente; perciò rispetto a questo punto di contatto valeranno insieme le

$$f(x, y) = \mathrm{f}(x, y), \quad f'_x(x, y) = \mathrm{f}'_x(x, y),$$
$$f'_y(x, y) = \mathrm{f}'_y(x, y).$$

109.

Dall' equazione (h) si traggono (p. 2.ª §. 182. IV.°) le seguenti

$$v - x = -\frac{dz}{dx}(t - z), \quad u - y = -\frac{dz}{dy}(t - z) \ldots (h'')$$

alla corrispondente normale N; quindi fatto per brevità

$$\sqrt{[1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2]} = k,$$

deduciamo (p. 2.ª §. 184.) le

$$\left.\begin{array}{c} \cos(\mathrm{N}x) = -\frac{1}{k}\frac{dz}{dx}, \quad \cos(\mathrm{N}y) = -\frac{1}{k}\frac{dz}{dy}, \\ \cos(\mathrm{N}z) = \frac{1}{k} \ (208). \end{array}\right\} (h''').$$

110.

Se l' equazione alla superficie (h') sia della forma

$$\mu = 0 \ldots (h^{\mathrm{IV}}),$$

avendosi (§. 52. i_1)

---

(208) *Per ottenere queste formole basta riflettere che le* (a, a', p. 2.ª §. 184.) *corrispondono rispettivamente alle*

$$-\frac{dz}{dx}, \ -\frac{dz}{dy},$$

delle (h'') *di questo paragrafo.*

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\frac{d\mu}{dx}}{\frac{d\mu}{dz}}, \quad \frac{dz}{dy} = - \frac{\frac{d\mu}{dy}}{\frac{d\mu}{dz}},$$

si cangerà la (h) nella

$$\frac{d\mu}{dx}(v - x) + \frac{d\mu}{dy}(u - y) + \frac{d\mu}{dz}(t - z) = 0 \ldots (h^{\mathrm{v}});$$

e fatto per brevità

$$\sqrt{\left[\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2\right]} = k',$$

si cangeranno le (h''), (h''') nelle

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{v - x}{\frac{d\mu}{dx}} = \dfrac{u - y}{\frac{d\mu}{dy}} = \dfrac{t - z}{\frac{d\mu}{dz}}, \\ \cos(\mathrm{N}x) = \dfrac{1}{k'}\dfrac{d\mu}{dx}, \quad \cos(\mathrm{N}y) = \dfrac{1}{k'}\dfrac{d\mu}{dy}, \\ \cos(\mathrm{N}z) = \dfrac{1}{k'}\dfrac{d\mu}{dz}. \end{array}\right\} (h^{\mathrm{vi}})$$

111.

Dal punto (x_0, y_0, z_0), preso nel piano tangente, conducasi al punto di contatto (x, y, z) una retta: l' equazioni di questa saranno (p. 2.^{a} §. 182. II.^{o}) le

$$\left\{ v - x_0 = \frac{x_0 - x}{z_0 - z}(t - z_0), \quad u - y_0 = \frac{y_0 - y}{z_0 - z}(t - z_0) \right\} (h^{\mathrm{vii}}).$$

Ma la retta (h^{vii}) forma con la corrispondente normale un angolo di 90°; dunque (§. 109. h'', e p. 2.^{a} §. 183.) sarà

$$1 - \frac{x_0 - x}{z_0 - z}\frac{dz}{dx} - \frac{y_0 - y}{z_0 - z}\frac{dz}{dy} = 0,$$

ovvero (§. 110.)

$$\frac{d\mu}{dz} + \frac{x_0 - x}{z_0 - z}\frac{d\mu}{dx} + \frac{y_0 - y}{z_0 - z}\frac{d\mu}{dy} = 0 \ldots (h^{\mathrm{viii}}).$$

Eliminate le x, y, z dalle (h^{IV}), (h^{VII}), (h^{VIII}), e ritenute le x_0, y_0, z_0 quali coordinate di un qualche punto fisso, si otterrà un' equazione fra le v, u, t; la quale, poichè appartenente a tutte le rette che passano per (x_0, y_0, z_0), e che sono tangenti alla superficie (h^{IV}) ne' suoi diversi punti, apparterrà eziandio al cono circoscritto alla stessa (h^{IV}), il vertice del quale starà nel punto (x_0, y_0, z_0).

Inoltre deve sempre il piano tangente passare per (x_0, y_0, z_0); dunque (§. 110. h^{V}) avremo

$$\frac{d\mu}{dx}(x_0-x)+\frac{d\mu}{dy}(y_0-y)+\frac{d\mu}{dz}(z_0-z)=0 \;\ldots\; (h^{\text{IX}}).$$

Dalle (h^{IV}), (h^{IX}) si elimini prima p. es. la y, poi la x; si otterranno l' equazioni di quella linea, in cui si trovano i punti tutti di contatto.

112.

Ora sieno

$$\left\{ v-x=a'(t-z)\,,\quad u-y=a''(t-z) \right\} \; (h^{\text{X}})$$

l' equazioni alla retta, che muovendosi parallelalmente a se stessa, genera la superficie del cilindro, circoscritto alla superficie (h^{IV}); poichè l' (h^{X}) forma con la corrispondente normale un angolo $=90°$, perciò (§. 109. h'', e p. 2.ª §. 183.) si avrà

$$\left.\begin{array}{l} 1-a'\dfrac{dz}{dx}-a''\dfrac{dz}{dy}=0\,, \\ \text{ovvero (§. 110.)} \\ \dfrac{d\mu}{dz}+a'\dfrac{d\mu}{dx}+a''\dfrac{d\mu}{dy}=0 \end{array}\right\} (h^{\text{XI}}).$$

Pertanto eliminate le x, y, z dalle (h^{IV}), (h^{X}), (h^{XI}), nascerà l' equazione al circoscritto cilindro: le (h^{IV}), (h^{XI}) somministreranno il luogo geometrico, cioè la curva in cui si trovano i punti di contatto.

Esempi.

I.° Si debba trovare l' equazione del cono circoscritto alla ellissoide (p. 2.ª §. 221.)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \;\ldots\; (h^{\text{XII}}).$$

Dall' (h^{xii}) abbiamo

$$\frac{d\mu}{dx}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{d\mu}{dy}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{d\mu}{dz}=\frac{2z}{c^2};$$

perciò dalla (h^{viii}) si avrà

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{z}{c^2}(z_0-z)+\dfrac{x}{a^2}(x_0-x)+\dfrac{y}{b^2}(y_0-y)=0, \\ \text{che per l' } (h^{\text{xii}}) \text{ riducesi alla} \\ \dfrac{zz_0}{c^2}+\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1: \end{array}\right\} (h^{\text{xiii}})$$

nella prima delle (h^{xiii}) si pongano i valori delle x_0-x, y_0-y, tolti dalle (h^{vii}); narcerà la

$$\frac{z}{c^2}(t-z_0)+\frac{x}{a^2}(v-x_0)+\frac{y}{b^2}(u-y_0)=0,$$

che per la seconda delle (h^{xiii}) riducesi alla

$$\frac{zt}{c^2}+\frac{xv}{a^2}+\frac{yu}{b^2}=1\ \ldots\ (h^{\text{xiv}}).$$

Ora poi le (h^{vii}) possono così scriversi

$$\frac{v-x_0}{x_0-x}=\frac{u-y_0}{y_0-y}=\frac{t-z_0}{z_0-z},$$

e conseguentemente (p. 1.^{a} §. 196.) sarà

$$\frac{v-x}{x_0-x}=\frac{u-y}{y_0-y}=\frac{t-z}{z_0-z};$$

dunque (p. 1.^{a} §. 192 : 197.) avremo

$$\frac{(v-x)\dfrac{x_0}{a^2}+(u-y)\dfrac{y_0}{b^2}+(t-z)\dfrac{z_0}{c^2}}{(x_0-x)\dfrac{x_0}{a^2}+(y_0-y)\dfrac{y_0}{b^2}+(z_0-z)\dfrac{z_0}{c^2}}=$$

$$\frac{(v-x)\dfrac{v}{a^2}+(u-y)\dfrac{u}{b^2}+(t-z)\dfrac{t}{c^2}}{(x_0-x)\dfrac{v}{a^2}+(y_0-y)\dfrac{u}{b^2}+(z_0-z)\dfrac{t}{c^2}},$$

ovvero, per la seconda delle (h^{xiii}), e per l' (h^{xiv}), avremo la

$$\frac{\frac{vx_0}{a^2}+\frac{uy_0}{b^2}+\frac{tz_0}{c^2}-1}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1}=\frac{\frac{v^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}+\frac{t^2}{c^2}-1}{\frac{vx_0}{a^2}+\frac{uy_0}{b^2}+\frac{tz_0}{c^2}-1};$$

equazione del cono circoscritto alla ellissoide.

II.° Trovare l' equazione del cilindro circoscritto alla ellissoide. Dall' (h^{XI}) abbiamo (I.°) la

$$\frac{z}{c^2}+a'\frac{x}{a^2}+a''\frac{y}{b^2}=0\ldots(h^{\text{XV}});$$

inoltre le due (h^{X}) potranno a questo modo scriversi, cioè

$$t-z=\frac{v-x}{a'}=\frac{u-y}{a''}\ldots(h^{\text{XVI}}):$$

si moltiplichino i singoli termini delle (h^{XV}) pei singoli membri delle (h^{XVI}); si otterrà

$$\frac{z(t-z)}{c^2}+\frac{x(v-x)}{a^2}+\frac{y(u-y)}{b^2}=0,$$

che per l' (h^{XII}) riducesi alla

$$\frac{zt}{c^2}+\frac{xv}{a^2}+\frac{yu}{b^2}=1\ldots(h^{\text{XVII}}).$$

Ora dalle (h^{XVI}) deduciamo (p. 1.^{a} §. 192: 196: 197.) la

$$\frac{\frac{1}{c^2}(t-z)+\frac{a'}{a^2}(v-x)+\frac{a''}{b^2}(u-y)}{\frac{1}{c^2}+\frac{a'^2}{a^2}+\frac{a''^2}{b^2}}=$$

$$\frac{\frac{t}{c^2}(t-z)+\frac{v}{a^2}(v-x)+\frac{u}{b^2}(u-y)}{\frac{t}{c^2}+\frac{a'v}{a^2}+\frac{a''u}{b^2}},$$

ovvero, per le (h^{XV}), (h^{XVII}), si avrà la

$$\frac{\frac{t}{c^2}+\frac{a'v}{a^2}+\frac{a''u}{b^2}}{\frac{1}{c^2}+\frac{a'^2}{a^2}+\frac{a''^2}{b^2}}=\frac{\frac{t^2}{c^2}+\frac{v^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}-1}{\frac{t}{c^2}+\frac{a'v}{a^2}+\frac{a''u}{b^2}};$$

equazione del cilindro circoscritto alla ellissoide.

113.

L'equazioni (h^{IX}), (h^{XI}), come ognun vede, appartengono alle superficie, che abbracciano i luoghi geometrici di ogni contatto; la prima nel caso del cono, la seconda nel caso del cilindro circoscritto.

Facciasi che la (h^{IV}) coincida nella (h_1. p. 2.^{a} §. 214.), che appartenga cioè alle superficie di second' ordine; si cangerà l' (h^{IX}) nella

$$(Ax + Ez + Fy + G)(x_0 - x)$$
$$+ (By + Dz + Fx + H)(y_0 - y)$$
$$+ (Cz + Dy + Ex + K)(z_0 - z) = 0,$$

ovvero nella

$$(Ax + Ez + Fy + G)x_0 + (By + Dz + Fx + H)y_0 +$$
$$(Cz + Dy + Ex + K)z_0 + Gx + Hy + Kz - Q = 0 \text{ (209)}.$$

Concludiamo (p. 2.^{a} §. 180. I.°), che se dal punto (x_0, y_0, z_0) si conducano dei piani tangenti una superficie di second' ordine, ciascun punto di contatto si troverà sur una curva piana.

Raggi osculatori delle varie curve,
che possono descriversi sopra una superficie data;
ed alcune osservazioni riguardo le superficie osculatrici.

114.

Sopra una data superficie (h^{IV}. §. 110.) s' intenda descritta una curva: ed in questa sia s l' arco, r il raggio di curvatura nel punto (x, y, z), τ la tangente, ν_1 la normale principale nel punto medesimo: sarà (§. 97 : 101 : 110, e p. 2.^{a} §. 177.)

---

(209) *Poichè in questa equazione abbiamo* (p. 2.^{a} §. 214. h_1) *la quantità* Q *per una costante data, perciò l' equazione medesima sarà di primo grado fra le variabili* x, y, z, *e rappresenterà semplicemente una superficie di prim' ordine, cioè* (p. 2.^{a} §. 180. I.°) *un piano sul quale si troveranno i punti tutti di contatto.*

$$\cos(N\nu_1) = \frac{r}{k'} \; \frac{\frac{d\mu}{dx} d^2x + \frac{d\mu}{dy} d^2y + \frac{d\mu}{dz} d^2z}{ds^2} \quad (210).$$

Inoltre, differenziata due volte la (h^{IV}), produrrà la

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\mu}{dx} d^2x + \frac{d\mu}{dy} d^2y + \frac{d\mu}{dz} d^2z + \frac{d^2\mu}{dx^2} dx^2 + \\ \quad \frac{d^2\mu}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2\mu}{dz^2} dz^2 + 2\frac{d^2\mu}{dxdy} dxdy + \\ \quad\quad 2\frac{d^2\mu}{dxdz} dxdz + 2\frac{d^2\mu}{dydz} dydz \end{array}\right\} = 0,$$

ovvero (§. 94. a^{IV}) la

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\frac{d\mu}{dx} d^2x + \frac{d\mu}{dy} d^2y + \frac{d\mu}{dz} d^2z}{ds^2} + \\ \frac{d^2\mu}{dx^2}\cos^2(\tau x) + \frac{d^2\mu}{dy^2}\cos^2(\tau y) + \frac{d^2\mu}{dz^2}\cos^2(\tau z) + \\ 2\frac{d^2\mu}{dxdy}\cos(\tau x)\cos(\tau y) + 2\frac{d^2\mu}{dxdz}\cos(\tau x)\cos(\tau z) + \\ \quad\quad 2\frac{d^2\mu}{dydz}\cos(\tau y)\cos(\tau z) \end{array}\right\} = 0.$$

Fatto adunque a cagione di brevità

---

(210) *Poichè abbiamo* (p. 2.^{a} §. 177.) *la seguente relazione*

$$\cos(N\nu_1) = \cos(\nu_1 x)\cos(Nx) + \cos(\nu_1 y)\cos(Ny) + \cos(\nu_1 z)\cos(Nz),$$

perciò, valendoci delle (a^{VIII}. §. 97.), *e delle* (h^{VI}. §. 110.), *avremo*

$$\cos(N\nu_1) = \frac{\frac{d\mu}{dx} d^2x + \frac{d\mu}{dy} d^2y + \frac{d\mu}{dz} d^2z}{k'[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]^{\frac{1}{2}}};$$

quindi mediante la (a^{XV}. §. 101.) *sarà*

$$\left.\begin{array}{c}\frac{d^2\mu}{dx^2}\cos^2(\tau x)+\frac{d^2\mu}{dy^2}\cos^2(\tau y)+\frac{d^2\mu}{dz^2}\cos^2(\tau z)+\\ 2\frac{d^2\mu}{dxdy}\cos(\tau x)\cos(\tau y)+2\frac{d^2\mu}{dxdz}\cos(\tau x)\cos(\tau z)+\\ 2\frac{d^2\mu}{dydz}\cos(\tau y)\cos(\tau z)\end{array}\right\}=\mathrm{S},$$

sarà

$$\cos(\mathrm{N}\nu_1)=-\frac{r}{k'}\mathrm{S};$$

e perciò

$$r=-\frac{k'}{\mathrm{S}}\cos(\mathrm{N}\nu_1)\ldots(g).$$

Pertanto data la posizione del punto (x, y, z), della tangente τ, e della normale ν_1, potrà dedursene il raggio di curvatura r (211): del resto poichè sono r, k' quantità > 0, sa-

---

$$\cos(\mathrm{N}\nu_1)=\frac{r}{k'}\;\frac{\frac{d\mu}{dx}d^2x+\frac{d\mu}{dy}d^2y+\frac{d\mu}{dz}d^2z}{ds^2},$$

come sopra è stabilito.

(211) *Affinchè s'intenda facilmente quanto si trova in questa deduzione accennato, riflettiamo che delle tre quantità k', S, $(\mathrm{N}\nu_1)$, comprese nel secondo membro della (g), la prima, cioè k', dipende unicamente (§. 110.) dalle coordinate x, y, z, di un punto qualunque, dato sulla superficie (h^{IV} §. 110.). La seconda quantità, cioè S, dipende non solo dalle coordinate medesime, ma e dalla direzione della tangente, condotta pel punto (x, y, z), alla curva tracciata sulla superficie data. L'angolo poi $(\mathrm{N}\nu_1)$, formato dal piano osculatore della curva, ovvero, che torna allo stesso, dalla sua normale principale ν_1 con la normale N alla superficie, dipende dalle coordinate stesse (§. 110. h^{VI}), non che dagli angoli che la normale principale forma con le medesime (nota precedente). Ciò posto se conoscasi col punto (x, y, z) la tangente alla curva, cioè gli angoli che la medesima fa colle coordinate, e se conoscasi pure il piano osculatore, cioè gli angoli che la normale ν_1, giacente sul me-*

ranno le altre due, S, $\cos(N\nu_1)$, affette da segni contrari (212).

115.

Se il piano osculatore (§ 98.) insiste perpendicolarmente sul piano tangente, sarà (p. 2.ª §. 77. 2.° : 69. 3.°)

---

desimo, fa con esse, non solo saranno cognite le quantità k', S, ma e il valore numerico di $\cos(N\nu_1)$, mediante la

$$\cos(N\nu_1) = \cos(\nu_1 x)\cos(Nx) + \cos(\nu_1 y)\cos(Ny) + \cos(\nu_1 z)\cos(Nz),$$

e le (h^{VI} §. 110.); *perciò con questi dati conosceremo, in virtù della* (*g*), *anche il valore di r*.

Dal fin qui osservato rilevasi quanto appresso 1.° *Se due curve, tracciate sulla superficie* (h^{IV} §. 110.), *abbiano il medesimo piano osculatore, avranno pure il medesimo raggio di curvatura; giacchè in tal caso le tre quantità componenti il secondo membro della* (*g*), *saranno le stesse per ciascuna curva.* 2.° *Se due curve abbiano la medesima tangente, non avendo il medesimo piano osculatore, i raggi di curvatura saranno proporzionali ai coseni degli angoli, che le normali principali di esse curve faranno con la normale alla superficie data; giacchè in questo caso le sole k', S, del secondo membro della* (*g*), *manterranno lo stesso valore per ambedue le curve.*

(212) *Il raggio osculatore trovandosi, qualunque sia la curva, sempre dalla parte della sua concavità, vedesi che, nel caso delle curve piane, si potranno distinguere in esso due direzioni rispetto l' asse delle x, secondo che la curva opponga o no* (§. 85.) *a quest' asse la sua concavità; laonde, a tener conto di queste diverse direzioni, farà d' uopo valersi del segno che precede il valor numerico di r, e convenire in riguardare il positivo proprio di un caso, il negativo dell' altro.*

Quando però si tratti di curve a doppia curvatura, le direzioni di r saranno infinite, perchè le curve stesse rivolgono la concavità loro in infiniti modi nello spazio; perciò l' espressione del raggio dovrà in tal caso riguardarsi come puramente numerica, cioè > 0; *senza cioè potere attribuire verun significato geometrico ai segni, da cui per fatto di calcolo essa è preceduta.*

Per quello poi riguarda il segno di k', apparisce dai calcoli precedenti (§. 109.) *che questo venne di fatto supposto positivo, cioè che fu ritenuto* $k' > 0$; *ed in tale ipo-*

$$\cos(N\nu_1) = \pm 1 \quad (213),$$

e perciò

$$r = \mp \frac{k'}{S} \ldots (g').$$

Nella ipotesi fatta, poichè il centro del circolo di curvatura si trova in qualche punto della N, le coordinate v, u, t del medesimo, soddisfaranno alla prima delle (h^{VI}. §. 110.) : quindi (p. 1.^{a} §. 107.) avremo

$$\frac{(v-x)^2}{\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2} = \frac{(u-y)^2}{\left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2} = \frac{(t-z)^2}{\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2} =$$

$$\frac{(v-x)^2 + (u-y)^2 + (t-z)^2}{\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2};$$

---

tesi non avvi alcun dubbio che le S, cos(Nν_1), *non sieno di segno contrario. Però se* k' *fosse negativo* (p. 2.^{a} §. 184. *nota* 239.) *certo allora sarebbero le* S, cos(Nν_1), *affette dallo stesso segno.*

Adunque possiamo concludere che in qualunque caso conosceremo sempre il segno di cos(Nν_1), *giacchè conosciamo quello di* S; *per conseguenza conosceremo eziandio in qual senso dovrà esser diretto il raggio* r *sulla normale principale della curva proposta.*

(213) *La intersecazione del piano tangente nel punto* (x, y, z) *col piano osculatore nel medesimo, costituisce la tangente alla curva in quel punto; perciò la normale principale* ν_1 *formerà con la intersecazione stessa un angolo retto: dunque, poichè i nominati piani supponionsi perpendicolari fra loro, sarà* (p. 2.^{a} §. 77. 2.^{o}) *la* ν_1 *perpendicolare al piano tangente. Ma la* N *è normale a questo medesimo piano in quel punto stesso; dunque* (p. 2.^{a} §. 69. 3.^{o}) *le rette* ν_1, N, *che hanno in comune il punto* (x, y, z), *avranno eziandio ugual dirittura, e perciò* (p. 2.^{a} §. 119.) *sarà*

$$\cos(N\nu_1) = \pm 1,$$

come fu stabilito.

e conseguentemente (p. 2.^{a} §. 176.) sarà

$$\frac{x-v}{\frac{d\mu}{dx}}=\frac{y-u}{\frac{d\mu}{dy}}=\frac{z-t}{\frac{d\mu}{dz}}=\mp\frac{r}{k'}=\frac{1}{S}\ldots(g'').$$

116.

Se l' equazione alla superficie data sia risoluta rispetto alla z, cosicchè riducasi alla forma (h'. §. 108.), fatto

$$\mu=f(x\,,\,y)+z\,,$$

si avranno le

$$\frac{d\mu}{dx}=\frac{df}{dx},\quad \frac{d\mu}{dy}=\frac{df}{dy},\quad \frac{d\mu}{dz}=1\,,$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}=\frac{d^2f}{dx^2},\quad \frac{d^2\mu}{dy^2}=\frac{d^2f}{dy^2},\quad \frac{d^2\mu}{dz^2}=0\,,$$

$$\frac{d^2\mu}{dxdy}=\frac{d^2f}{dxdy},\quad \frac{d^2\mu}{dxdz}=0,\quad \frac{d^2\mu}{dydz}=0\,;$$

perciò sarà

$$\left.\begin{array}{l} k'=\sqrt{[1+(\frac{df}{dx})^2+(\frac{df}{dy})^2]}\,, \\ S=\frac{d^2f}{dx^2}\cos^2(\tau x)+\frac{d^2f}{dy^2}\cos^2(\tau y)+2\frac{d^2f}{dxdy}\cos(\tau x)\cos(\tau y)\,; \\ \text{e la } (g') \text{ si cangerà nella} \\ r=\mp\frac{\sqrt{[1+(\frac{df}{dx})^2+(\frac{df}{dy})^2]}}{\frac{d^2f}{dx^2}\cos^2(\tau x)+\frac{d^2f}{dy^2}\cos^2(\tau y)+2\frac{d^2f}{dxdy}\cos(\tau x)\cos(\tau y)} \end{array}\right\}(g''')$$

Ma (§. 94. a^{IV}. a''') abbiamo

$$\cos^2(\tau x)=\frac{dx^2}{ds^2}=\frac{dx^2}{dx^2+dy^2+df^2}=$$

$$\frac{dx^2}{dx^2+dy^2+(\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy)^2}=$$

$$\frac{1}{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$\cos^2(\tau y)=\frac{\frac{dy^2}{dx^2}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$\cos(\tau x)\cos(\tau y)=\frac{\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

dunque, esprimendo

$$y=\varphi(x),$$

la projezione della curva sul piano XAY, si avranno ancora le

$$\left.\begin{aligned}
S&=\frac{\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}\varphi'^2+2\frac{d^2f}{dxdy}\varphi'}{1+\varphi'^2+\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\varphi'\right)^2},\\
r&=\mp\frac{\left[1+\varphi'^2+\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\varphi'\right)^2\right]\sqrt{\left[1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]}}{\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}\varphi'^2+2\frac{d^2f}{dxdy}\varphi'}:\\
&\text{la formola } (g'') \text{ riducesi nella}\\
\frac{x-v}{\frac{df}{dx}}&=\frac{y-u}{\frac{df}{dy}}=z-t=\frac{1+\varphi'^2+\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\varphi'\right)^2}{\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}\varphi'^2+2\frac{d^2f}{dxdy}\varphi'}.
\end{aligned}\right\}(g^{IV})$$

117.

Propongasi ora la ricerca di una tale φ', cui debba corrispondere un massimo od un minimo di r.

Fatto per brevità

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{df}{dx}=a_1,\ \dfrac{df}{dy}=b_1,\ \dfrac{d^2f}{dx^2}=a_2,\ \dfrac{d^2f}{dy^2}=b_2,\ \dfrac{d^2f}{dxdy}=c_2, \\ \qquad \mp\dfrac{1+\varphi'^2+(a_1+b_1\varphi')^2}{a_2+b_2\varphi'^2+2c_2\varphi'}=\chi, \\ \text{sarà} \\ \qquad r=\chi\sqrt{[1+a_1^2+b_1^2]}:\end{array}\right\}(g^{\text{v}})$$

dalla penultima delle (g^{v}) abbiamo

$$\chi(a_2+b_2\varphi'^2+2c_2\varphi')\pm[1+\varphi'^2+(a_1+b_1\varphi')^2]=0\ldots(g^{\text{vi}});$$

e differenziato rispetto φ', si otterrà

$$\frac{d\chi}{d\varphi'}(a_2+b_2\varphi'^2+2c_2\varphi')+2\chi(b_2\varphi'+c_2)\pm2(\varphi'+a_1b_1+b_1^2\varphi')=0.$$

Ma rispetto ai valori massimi o minimi, che, variata la φ', riceve la r, l'ultima delle (g^{v}) somministra (§. 56.) la

$$\frac{dr}{d\varphi'}=\frac{d\chi}{d\varphi'}\sqrt{[1+a_1^2+b_1^2]}=0,$$

e perciò

$$\frac{d\chi}{d\varphi'}=0:$$

dunque

$$\left.\begin{array}{l}\chi(b_2\varphi'+c_2)\pm(\varphi'+a_1b_1+b_1^2\varphi')=0; \\ \text{e conseguentemente} \\ \qquad \varphi'=-\dfrac{c_2\chi\pm a_1b_1}{b_2\chi\pm b_1^2\pm1}.\end{array}\right\}(g^{\text{vii}})$$

Eseguita la sostituzione nella (g^{vi}), nascerà

$$(a_2\chi\pm a_1^2\pm1)(b_2\chi\pm b_1^2\pm1)-(c_2\chi\pm a_1b_1)^2=0\ (214);$$

la quale, poste le

---

(214) *Ordinata la (g^{vi}) rispetto φ', si elimini da essa, per mezzo della seconda (g^{vii}), la derivata medesima, ed avremo facilmente questa equazione; che, pure ordinata rispetto χ, ne porgerà tosto, mediante le (g^{viii}), l'equazione di secondo grado sopra espressa.*

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a_2^2 + b_1^2 = A, \quad \pm 2a_1 b_1 c_2 \mp (1 + a_1^2) b_2 \mp \\ \quad (1 + b_1^2) a_2 = B, \quad a_2 b_2 - c_2^2 = C, \end{array}\right\} (g^{VIII})$$

si cangerà nella

$$C\chi^2 - B\chi + A = 0.$$

Quindi

$$\chi = \frac{B \pm \sqrt{[B^2 - 4AC]}}{2C},$$

ed

$$r = \frac{B \pm \sqrt{[B^2 - 4AC]}}{2C} \sqrt{A} \ldots (g^{IX});$$

dei quali valori, uno somministra il massimo, l' altro il minimo di r.

118.

Quindi è agevole concludere, che se una data superficie venga secata da piani condotti per la normale N, di tutte le intersecazioni, due ve ne avranno, che nel punto (x, y, z) godranno, una della massima, l' altra della minima curvatura: siffatte intersecazioni, non che i corrispondenti raggi r, diconsi *principali*.

Eliminata χ dalle (g^{VII}), (g^{VI}), e posto

$$\left.\begin{array}{l} \pm c_2(1 + a_1^2) \mp a_1 a_2 b_1 = A_1, \\ \pm a_2(1 + b_1^2) \mp b_2(1 + a_1^2) = B_1, \\ \mp c_2(1 + b_1^2) \pm a_1 b_1 b_2 = C_1, \end{array}\right\} (g^{X})$$

si otterrà

$$C_1 \varphi'^2 - B_1 \varphi' + A_1 = 0,$$

donde

$$\varphi' = \frac{B_1 \pm \sqrt{[B_1^2 - 4A_1C_1]}}{2C_1} \ldots (g^{XI}).$$

Questi due valori di φ' esprimono (§. 73.) le tangenti degli angoli, che l' asse AX fa con le rette tangenti nel punto (x, y) le projezioni sul piano XAY delle intersecazioni principali: rappresentando siffatti valori con φ'_1, φ'_2, sarà

$$\varphi'_1 \varphi'_2 = \frac{4A_1C_1}{4C_1^2} = \frac{A_1}{C_1}.$$

Essendo la posizione del piano XAY arbitraria, si collochi per modo esso piano, da coincidere con quello tangente: le rette che nel punto (x, y, z) sono tangenti alle intersecazioni principali, coincideranno con le rette tangenti nel punto (x, y) le projezioni sul piano XAY delle stesse intersecazioni, e presso il punto (x, y, z) sarà

$$z = f(x, y) = 0, \quad \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0;$$

conseguentemente si avranno le

$$\frac{df}{dx} = a_1 = 0, \quad \frac{df}{dy} = b_1 = 0, \quad A_1 = \pm c_2, \quad C_1 = \mp c_2.$$

Quindi sarà

$$\varphi'_1 \varphi'_2 + 1 = 0:$$

cioè le intersecazioni principali saranno (p. 2.^{a} §. 172. I.° 4.°) perpendicolari fra loro. Del resto ivi si dicono due curve una perpendicolare all' altra, ove le rispettive tangenti formano insieme un angolo $= 90°$.

119.

Le superficie curve (*h'*. §. 108.), $z = f(x, y)$, ivi diconsi combaciarsi, ove hanno comune il piano tangente, e le sezioni principali poste negli stessi piani normali, non che dotate degli stessi raggi principali di curvatura: pertanto non cangeranno la φ' (g^{XI}), ed il corrispondente r (g^{IX}), se da una superficie si passi all'altra. Ma non cangia (§. 108.) l'espressione

$$\sqrt{[1 + a_1^2 + b_1^2]};$$

dunque dovrà dirsi altrettanto della χ (g^{V}), e conseguentemente (§. 108.) della

$$a_2 + b_2\varphi'^2 + 2c_2\varphi' \quad (215);$$

---

(215) *Le superficie curve, osculatrici l' una dell' altra nel punto* (x, y, z), *dovendo in questo avere il piano tangente comune, dovranno i coefficienti* $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ *della equazione (h. §. 108.) restare gli stessi nel passaggio da una superficie all' altra; e siccome abbiamo dalle* (g^{V} §. 117.)

sarà cioè

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}\varphi'^2+2\frac{d^2f}{dxdy}\varphi'=\frac{d^2\mathrm{f}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{f}}{dy^2}\varphi'^2+2\frac{d^2\mathrm{f}}{dxdy}\varphi' \text{(216)}.$$

Prendasi $\varphi'=0$; avremo

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^2\mathrm{f}}{dx^2};$$

laonde saranno le

$$\frac{d^2f}{dy^2}\varphi'^2+2\frac{d^2f}{dxdy}\varphi'=\frac{d^2\mathrm{f}}{dy^2}\varphi'^2+2\frac{d^2\mathrm{f}}{dxdy}\varphi',$$

$$\frac{d^2f}{dy^2}\varphi'+2\frac{d^2f}{dxdy}=\frac{d^2\mathrm{f}}{dy^2}\varphi'+2\frac{d^2\mathrm{f}}{dxdy}.$$

Prendasi di nuovo $\varphi'=0$; si otterrà

$$\frac{d^2f}{dxdy}=\frac{d^2\mathrm{f}}{dxdy}:$$

$$\frac{df}{dx}=a_1, \quad \frac{df}{dy}=b_1,$$

così l' espressione

$$\sqrt{[1+a_1^2+b_1^2]}$$

rimarrà la stessa nel passaggio medesimo: inoltre poichè (g^{v} §. 117.) *abbiamo*

$$r=\chi\sqrt{[1+a_1^2+b_1^2]},$$

così è chiaro che dovrà dirsi altrettanto della quantità χ: *da ultimo facilmente si comprenderà, tanto in vigore della*

$$\mp\frac{1+\varphi'^2+(a_1+b_1\varphi')^2}{a_2+b_2\varphi'^2+2c_2\varphi'}=\chi$$

(§. 117. g^{v}), *quanto delle precedenti osservazioni, che la quantità*

$$a_2+b_2\varphi'^2+2c_2\varphi'$$

pur essa non cangerà nell' indicato passaggio.

(216) *Questa equazione dovendo verificarsi per qualunque valore di* φ', *lo dovrà pur anche nella ipotesi di* $\varphi'=0$, *quindi ecc....*

siegue rispetto al punto di combagiamento, che oltre ad aversi (§. 108.) le

$$\left.\begin{array}{l} f=\mathrm{f}, \quad \dfrac{df}{dx}=\dfrac{d\mathrm{f}}{dx}, \quad \dfrac{df}{dy}=\dfrac{d\mathrm{f}}{dy}, \\ \text{si avranno pure le} \\ \dfrac{d^2f}{dx^2}=\dfrac{d^2\mathrm{f}}{dx^2}, \quad \dfrac{d^2f}{dy^2}=\dfrac{d^2\mathrm{f}}{dy^2}, \quad \dfrac{d^2f}{dxdy}=\dfrac{d^2\mathrm{f}}{dxdy} \quad (217). \end{array}\right\} (g^{\mathrm{XII}})$$

120.

Lo scambievole avvicinamento delle superficie (h'), $z=\mathrm{f}(x,y)$ circa il punto (x, y, z), ove queste si combaciano, può desumersi dal valore della quantità infinitesima

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-\mathrm{f}(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\ \ldots\ (g^{\mathrm{XIII}}):$$

certo se il numero c esprime l'ordine della infinitesima (g^{XIII}), le superficie medesime si avvicineranno fra loro circa il punto (x, y, z) più di tutte quelle altre (p. 1.^{a} §. 121.), rispetto le quali trovasi l'ordine della stessa (g^{XIII}) corrispondere ad un numero $< c$.

Sieno le infinitesime Δx, Δy ambedue di ordine primo, e (§. 39.) pongasi

$$\Delta x=\beta dx, \quad \Delta y=\beta dy,$$

affinchè la (g^{XIII}) si cangi nella

$$f(x+\beta dx,\ y+\beta dy)-\mathrm{f}(x+\beta dx,\ y+\beta dy),$$

che rappresenteremo con $\psi(\beta)$: ora (§. 29.) annullandosi β, la prima fra le derivate

$$\psi'(\beta), \quad \psi''(\beta), \quad \psi'''(\beta), \ \ldots$$

a non annullarsi, sarà di ordine $=c$, ovvero immediatamente $>c$. Avranno luogo pertanto le

$$\psi(\mathrm{o})=0, \quad \psi'(\mathrm{o})=0, \quad \psi''(\mathrm{o})=0, \quad \psi'''(\mathrm{o})=0, \ \ldots$$

ovvero (§. 47.) le

---

(217) *Le prime tre delle* (g^{XII}) *costituiscono le condizioni pel contatto di prim' ordine: tutte poi le stesse* (g^{XII}) *le costituiscono per quello di secondo.*

$$f(x, y) - \mathrm{f}(x, y) = 0, \quad df(x, y) - d\mathrm{f}(x, y) = 0,$$
$$d^2f(x, y) - d^2\mathrm{f}(x, y) = 0, \quad d^3f(x, y) - d^3\mathrm{f}(x, y) = 0, \ldots,$$

e conseguentemente

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y) = \mathrm{f}(x, y), \quad df(x, y) = d\mathrm{f}(x, y), \\ d^2f(x, y) = d^2\mathrm{f}(x, y), \quad d^3f(x, y) = d^3\mathrm{f}(x, y), \ldots, \end{array}\right\} (g^{XIV})$$

sino all' ordine $= c$, ovvero immediatamente $< c$ (218). La

---

(218) *Eseguendo le differenziazioni che si trovano indicate nelle* (g^{XIV}), *avremo* (§. 46.) *le seguenti*

$$f = \mathrm{f}, \quad \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = \frac{d\mathrm{f}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{f}}{dy}dy,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2f}{dxdy}dxdy + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 =$$
$$\frac{d^2\mathrm{f}}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2\mathrm{f}}{dxdy}dxdy + \frac{d^2\mathrm{f}}{dy^2}dy^2,$$

$$\frac{d^3f}{dx^3}dx^3 + \frac{3d^3f}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{3d^3f}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3f}{dy^3}dy^3 =$$
$$\frac{d^3\mathrm{f}}{dx^3}dx^3 + \frac{3d^3\mathrm{f}}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{3d^3\mathrm{f}}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3\mathrm{f}}{dy^3}dy^3,$$

ecc. . . .

Ora osservando che queste formole debbono sussistere, qualunque sia il valore finito, che vogliasi attribuire ai differenziali dx, dy : *sarà facile dalla prima, seconda, e terza delle medesime ottenere le* (g^{XII}), *e dalla quarta le ultime stabilite in fine di questo paragrafo.*

Poichè i criteri pel combagiamento delle curve, tanto riferite ad un piano, quanto allo spazio, furono anche dedotti (§. 92. 4.° o^{XIV}. §. 107. 3.° a_9) *dalla proprietà dell' infinitesimi, esposta in principio di queste istituzioni* (§. 29.); *così, per una plausibile uniformità di metodo, i criteri* (g^{XII}, §. 119.) *pel combagiamento scambievole delle superficie, sono in questo ultimo paragrafo dedotti pure dalla proprietà medesima. E siccome, a far meglio comprendere la teorica delle curve osculatrici, già facemmo di essa* (*note* 178 : 206.) *qualche* prima, la seconda, e la terza delle (g^{xiv}) somministrano (§. 46.) le formole (g^{xii}) rispetto al punto di combagiamento; la quarta offre (§. 46.) le

---

applicazione, così per lo stesso fine termineremo questa nota, con fare altrettanto della teorica pel combagiamento delle superficie.

Suppongasi che la superficie rappresentata dall' equazione (h') sia piana, l' equazione medesima si ridurrà (p. 2.a §. 180. I.°) nella seguente

$$(1) \ldots t = av + a'u + b.$$

La (1) contenendo tre sole costanti arbitrarie a, a', b, non potrà generalmente il piano da essa rappresentato, avere fuorchè un contatto di prim' ordine con la superficie totalmente cognita

$$z = \mathrm{f}(x, y);$$

giacchè in tal caso possiamo soddisfare solo alle prime tre delle (g^{xii}).

Volendo pertanto determinare l' equazione del piano avente un contatto di prim' ordine con la data superficie curva, osserveremo che dalla (1) abbiamo le

$$\frac{dt}{dv} = a, \quad \frac{dt}{du} = a';$$

e che la stessa (1) dovrà essere soddisfatte dalle coordinate x, y, z del punto comune alle due superficie; dunque le relazioni seguenti

$$z = ax + a'y + b,$$

$$\frac{dz}{dx} = a, \quad \frac{dz}{dy} = a',$$

che discendono dalle prime tre delle (g^{xii}), serviranno a determinare i valori delle costanti a, a', b, in funzione delle coordinate del punto di contatto, e sostituiti nella (1) daranno la

$$(2) \ldots t - z = \frac{dz}{dx}(v - x) + \frac{dz}{dy}(u - y),$$

equazione (§. 100. h.) del piano tangente la superficie data nel punto x, y, z.

$$\frac{d^3f}{dx^3}=\frac{d^3\text{f}}{dx^3},\quad \frac{d^3f}{dy^3}=\frac{d^3\text{f}}{dy^3},$$

$$\frac{d^3f}{dxdy^2}=\frac{d^3\text{f}}{dxdy^2},\quad \frac{d^3f}{dydx^2}=\frac{d^3\text{f}}{dydx^2};$$

e così appresso.

Esempio.

Abbiasi per la superficie data quella di una ellissoide, la sua equazione sarà (p. 2.^{a} §. 221.) *la seguente*

$$(3)\ \ldots\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

dalla quale abbiamo

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{c^2y}{b^2z},$$

e, sostituendo questi valori nella (2), *avremo la*

$$t-z=-\frac{c^2x}{a^2z}(v-x)-\frac{c^2y}{b^2z}(u-y).$$

Liberando questa, e l'equazione (3), *dai loro denominatori, avremo dalle medesime, insieme combinate, la*

$$b^2c^2xv+a^2c^2yu+a^2b^2zt=a^2b^2c^2.$$

Se il punto di contatto non fosse dato sulla superficie proposta, ed in vece si conoscesse la posizione di un altro punto, preso fuori della medesima, pel quale dovesse passare il piano tangente richiesto, allora esprimendo con α, β, γ *le coordinate di quest' ultimo punto, siccome debbono esse verificare l'ultima equazione, quando si pongano in luogo delle* v, u, t *nella medesima, perciò sarà*

$$b^2c^2\alpha x+a^2c^2\beta y+a^2b^2\gamma z=a^2b^2c^2,$$

nella quale dovranno le x, y, z, *considerarsi come variabili. Questa equazione pertanto è quella di un piano su cui debbonsi tutti trovare i punti di contatto cercati; perciò il numero de' medesimi sarà infinito; e siccome dovranno essi tutti stare sulla ellissoide proposta, il luogo loro sarà la intersecazione di questa col piano medesimo.*

FINE DELLA SEZIONE PRIMA PARTE TERZA.