ELEMENTA
GRAECI
GEOMETRICI

TOMUS
II

C O R S O

D I

MATEMATICHE

AD USO DEGLI ASPIRANTI

Alla Scuola d'Artiglieria e Genio di Modena

TOMO SECONDO

Contenente la Geometria di Euclide compilata dal P. D. Guido Grandi, ed un Saggio sui Limiti applicato principalmente ai Teoremi d' Archimede.

M O D E N A
Presso la Società Tipografica
MDCCCVI

AVVISO

Questi Elementi di Geometria contengono i primi sei libri della Piana, l'undecimo, il duodecimo, e il decimoterzo della Solida. Sonosi omessi, secondo l' uso più generale, il settimo, l' ottavo ed il nono, che trattano dei Numeri, e così il decimo che degl' Incommensurabili.

Gli enunciati delle proposizioni nel Grandi applicati solamente alle figure, non erano atti a custodirsi nella mente, nè ad esser narrati. È parso ben fatto premettere a questi gli astratti alla maniera del grande Autore: tralasciati unicamente quelli delle Prop. 35 e 39 del Lib. XI, e della 2 del XII; siccome assai malagevoli ad esporsi, e ad essere intesi, qualmente si vede in quelli originali di Euclide.

Inoltre il P. Grandi per amore di brevità ha fatto uso, massime dopo il libro IV, dei segni algebraici dinotanti uguaglianza, somma, sottrazione, ec. S' è stimato meglio sostituire il discorso ad imitazione di Euclide, affinchè la Gioventù esercitata nello stile geometrico degli Antichi

non perda la facoltà di esporre acconciamente le operazioni e le verità Geometriche. La scarsezza di valenti intagliatori in legno, e la disusanza di simili lavori, hanno ispirato il consiglio, anzi la necessità di far incidere in rame le figure tutte dell' Opera .

Dopo terminata la stampa non si sono risparmiati esami e collazioni, onde scoprire gli errori occorsi , i quali sfuggono in tante guise allo zelo e alla buona volontà dei Correttori . Mediante la tavola delle correzioni da farsi , è sperabile che ogni Studente abbia il libro emendato in modo, da non patire ritardo e confusione .

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO PRIMO

DEFINIZIONI.

I. Il *Punto* è un segno nella quantità, senza veruna parte.

II. La *Linea* è un' estensione in lungo senza veruna larghezza.

III. E se la linea è terminata, i suoi *Termini* saranno i due punti, in cui finisce.

IV. Dicesi *Retta* quella linea, che tra i suoi punti si distende egualmente (*a*).

(*a*) Così facendo colla penna un tratto AB (*Fig.* 1), ovvero DE, il segno A, da cui principia, e l' altro B, in cui termina, è un *Punto*, di cui non può determinarsi parte veruna, perchè se fosse divisibile, non sarebbe tutto il principio, nè tutto il fine di questo semplice tratto, il quale è una *Linea* AB distesa in lungo da un termine all' altro, ma senza larghezza, perchè quantunque la grossezza della punta della penna, da cui fu segnata, le

V. *Superficie* dicesi l' estensione in lunghezza, e in larghezza, senza veruna profondità.

VI. E se la superficie è terminata, i suoi *Estremi* sono le linee, in cui finisce.

VII. Dicesi *Piana* quella superficie, che giace distesa egualmente tra le sue linee (*a*).

VIII. L' *Angolo Piano* è ciò, che risulta dall' inclinazione di due linee, le quali nella superficie piana s' incontrino in un punto, e non sieno poste per diritto fra loro.

IX. Se le linee contenenti l' angolo saran-

abbia data qualche piccola estensione in largo, questa non dee attendersi, ma solamente l' estensione in lungo da un termine all' altro: in quella maniera, che misurandosi l' altezza di varie torri, non si fa conto della loro larghezza, ma solamente si considera l' estensione in lungo dal piano, sopra cui posano, ai loro vertici. Si denomina poi l' AB *Linea retta*, perchè ancora qualunque punto C, in cui può dividersi, è interposto direttamente fra i termini A B, nè veruno di quei punti intermedj diverte in alto o in basso, e però si distende egualmente essa linea fra i punti estremi; a differenza dell' altra linea DE (che chiamerebbesi *Linea curva*) la quale si vede piegata in un seno, e non distesa direttamente, come l' altra AB, qual' è la minima, che si possa descrivere fra i medesimi termini A B.

(*a*) Così l' estensione ABCD (*Fig.* 2), la cui lunghezza è AB, e la sua larghezza BC, è una *Superficie*, la quale, se non ritorna in sè stessa, come è quella di una palla rotonda, ma è terminata, ha per suoi *Termini*, o *Estremi* quelle linee, da cui è circondata; o sieno rette, come AB BC CD DA, da cui è confinata la superficie ABCD; o sieno parte rette, e parte curve, come la superficie ADEF, ovvero l' altra FBCE, di cui la curva FE è uno degli estremi; o da più curve, o da una curva sola, da cui fosse circoscritta. E se detta superficie ABCD, tra le sue linee estreme è così egualmente distesa, come un velo per ogni verso ben tirato, che in veruna parte non si avvalli, dicesi *Piana*, a differenza d' un' altra superficie GNLH (*Fig.* 3), che è come una vela gonfia dal vento, e da varie linee HI HM HK divisa, le quali non si trovano egualmente giacenti, ma alcune più alte, ed altre più basse.

no amendue rette, dirassi tale angolo *Rettilineo*.

X. Stando una linea retta sopra di un' altra in maniera, che non penda più da questa, che da quella parte, dirassi *Perpendicolare* alla linea soggetta.

XI. E ciascheduno degli angoli uguali, che di quà, e di là ne risultano, chiamerassi *Angolo Retto*.

XII. L' angolo poi maggiore del retto dirassi *Angolo Ottuso*; ed il minore del retto, *Angolo Acuto* (*a*).

XIII. *Figura* dicesi quell' estensione, che da uno, o più termini è circoscritta, i quali *Termini* sono gli estremi, da cui è confinata.

XIV. Delle figure comprese da linee curve, che *Curvilinee* si nominano, la più semplice è il *Cerchio*, o *Circolo*, che è una figura piana com-

(*a*) Le rette AC BC (*Fig.* 4), che s' incontrano per diritto nel punto C, non fanno un angolo, ma una medesima linea retta; le linee poi EC BC, di cui l' una è inclinata all' altra, costituiscono l' *Angolo piano* ECB (nominando qualunque angolo, si porrà sempre nel mezzo il punto, in cui le linee s' incontrano, e negli estremi l' uno, e l' altro termine di esse linee, come quì si è detto ECB, di cui la lettera di mezzo C indica il punto, in cui si fa l' angolo, e le altre due E B indicano gli estremi delle linee, che lo comprendono); ed è *Angolo Rettilineo*, essendo ambe le linee CE CB rette; che se fossero curve, si direbbe *Curvilineo*; se una retta, l' altra curva, *Mistilineo*. In quanto poi alla linea DC, che insiste nel punto C sopra la retta AB, non essendo più inclinata da una parte, che dall' altra, si chiama *Perpendicolare* essa DC alla soggetta AB; e ciascuno degli angoli, che risultano eguali dall' una, e dall'altra parte, DCA DCB, dicesi *Angolo retto*; ma l' angolo ECA, che comprende il retto DCA, e però è maggiore di esso, si dirà *Angolo ottuso*; e l' angolo ECB, che è una parte dell' angolo DCB, e però è minore del retto, si chiamerà *Angolo Acuto*.

presa da una sola linea curva, che ritorna in sè stessa (e chiamasi *Circonferenza*, o *Periferia*), e che ha un punto nel suo piano, da cui tutte le rette, che vanno alla curva, riescono uguali.

XV. Quel punto, da cui si spiccano le linee tutte uguali, dicesi *Centro*.

XVI. E qualunque retta linea, che passi per esso centro, e termini alla circonferenza da ambe le parti opposte, dicesi *Diametro*.

XVII. La Figura compresa da esso diametro, e dalla parte di circonferenza segata da esso, chiamasi *Semicircolo*, o *Mezzo cerchio* (*a*).

XVIII. Le figure poi contenute da linee rette chiamansi *Rettilinee*, delle quali la più semplice è quella, che da tre linee rette comprendesi, e si chiama *Trilatera Figura*, ovvero *Triangolo*; se poi si racchiude da quattro rette linee, si dirà *Figura quadrilatera;* e se da più di quattro, *Moltilatera*.

XIX. Di esse figure Trilatere quella, che ha tre lati uguali, chiamasi *Triangolo equilatero*.

XX. Quella poi, che ha due soli lati uguali, dicesi *Triangolo Isoscele*, o *Equicrure*.

XXI. E quella, che sarà compresa da tre la-

(*a*) Si descrive questa figura con un compasso di due gambe aperte a qualche intervallo, tenendo fissa nel punto C (*Fig.* 5) la punta di una gamba, e facendo girare l'altra nel piano, in cui si disegnerà la curva ADBF, che ritorna in sè stessa; così questa figura sarà un *Circolo*, o *Cerchio;* la curva, da cui è terminata, dirassi *Circonferenza*, o *Periferia;* il punto C sarà il *Centro*, e tutte le rette CE CD CF, ec. saranno eguali, e si diranno *Raggi* o *Semidiametri;* e tutta l'intera retta AB tradotta pel centro, si dirà *Diametro;* e la figura ADB *Semicircolo*, o *Mezzo cerchio*.

lati disuguali, si dirà *Triangolo Scaleno*.

XXII. Si possono ancora denominare dagli angoli, de' quali se uno in essa figura Trilatera è retto, si dirà *Triangolo Rettangolo*; se uno è ottuso, chiamerassi *Ottusiangolo*; se tutti acuti, dirassi *Acuziangolo* (*a*).

XXIII. Delle Figure poi Quadrilatere, quella che ha tutti i lati uguali, e ciaschedun angolo retto, si chiama *Quadrato*.

XXIV. Quella poi, che non ha tutti i lati uguali, ma ha ciascun angolo retto, dicesi *Rettangolo*.

XXV. Quella, che ha tutti i lati eguali, ma gli angoli non retti, chiamasi *Rombo*.

XXVI. Quella poi, che ha solamente i lati opposti, e gli angoli opposti eguali, ma non è equilatera, nè rettangola, si nomina *Romboide*.

XXVII. L' altre figure poi quadrilatere, che non hanno tali condizioni, si dicono *Trapezii* (*b*).

XXVIII. Si dicono tra loro *Parallele* quelle linee rette, che giacendo nella stessa superficie piana, ancora che si prolungassero in infinito verso qua-

(*a*) Essendo le rette linee AB BC AC (*Fig.* 6) eguali, il triangolo ABC dicesi *Equilatero*; e se i lati DE DF solamente sieno uguali, dicesi il triangolo DEF *Isoscele*, o *Equicrure*; ed essendo tutti i lati GH HI IG disuguali, sarà il triangolo HGI *Scaleno*. Se poi l' angolo KLM fosse retto, sarebbe KLM un triangolo *Rettangolo*; ed essendo l' angolo GHI ottuso, il triangolo GHI si dirà *Ottusiangolo*; ma essendo tutti gli angoli acuti, come in ABC, e in EDF, si dirà ciascuno di essi triangolo *Acuziangolo*.

(*b*) Si vede (*Fig.* 7) l' esempio del *Quadrato* nella figura ABCD e del *Rettangolo* nell' altra FGHE, siccome (*Fig.* 8) del *Rombo* nella IKLM, e della *Romboide* nella seguente NOPQ, e così del *Trapezio* nel quadrilatero RSTV (*Fig.* 9).

lunque parte, mai non converrebbero insieme (*a*).

DIMANDE.

I. Si ammetta, che da qualunque punto a qualsivoglia altro punto possa tirarsi una linea retta.

II. E qualsivoglia data linea possa prolungarsi in infinito, quanto sarà di bisogno.

III. E da qualunque punto, come centro, con qualsivoglia intervallo, che determini il raggio, cioè la distanza della circonferenza dal centro, si possa descrivere un cerchio.

ASSIOMI.

I. Quelle cose, che sono uguali ad una terza, sono ancora eguali fra loro.

II. Se alle cose uguali si aggiungono, o si levano altre eguali, o una medesima ad ambedue comune, ne risultano aggregati, o residui, uguali.

III. Se alle cose disuguali si aggiungono, o si detraggono cose eguali, o una stessa ad entrambi comune, rimangono gli aggregati, o i residui, disuguali, come prima.

(*a*) Tali sono le rette AB CD (*Fig.* 10), che tanto a destra, quanto a sinistra prolungate non concorrono in verun punto, anzi mantengono sempre la stessa distanza tra loro, e però diconsi *Parallele*: e così sono i lati opposti delle prime quattro specie di Quadrilateri, cioè del Quadrato, del Rettangolo, del Rombo, e della Romboide, i quali ancora generalmente diconsi *Parallelogrammi*, per avere ciascun pajo di lati opposti, tra loro paralleli (*).

(*) *Molti Autori intendono per* Trapezio *un quadrilatero, che ha due soli lati paralleli*.

IV. Le cose, che sono il doppio, o la metà di una medesima, o di eguali cose, sono pure tra loro uguali.

V. Le cose, che sovrapposte si combaciano esattamente, sono altresì uguali.

VI. Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è uguale a tutte le sue parti insieme.

VII. Tutti gli angoli retti sono tra loro uguali.

VIII. Se due linee rette sieno segate da una terza, in maniera, che da una parte ne risultino due angoli interni minori di due retti, e dall' altra banda maggiori, prolungate in infinito quelle due rette dalla banda, ove sono gli angoli minori, dovranno insieme concorrere (*a*).

IX. Due linee rette non comprendono interamente spazio veruno.

X. Incontrandosi due linee rette in un punto, si segano, e non vanno insieme per verun tratto di lunghezza, che possa essere un segmento comune ad ambedue, ma subito si separano l' una dall' altra (*b*).

(*a*) La verità, ed evidenza di questo Assioma si mostrerà dopo la Proposizione 28 del lib. I, e sarà allora più agevolmente intesa.

(*b*) *Avvertimento*. Alcune proposizioni della Geometria si chiamano *Problemi*, quando in esse si propone qualche cosa pratica da farsi. Altre si dicono *Teoremi*, ne' quali solamente si espone qualche verità speculativa da dimostrarsi. In ciascuna di tali proposizioni conviene distinguere il *Dato*, e il *Quesito*, perchè sempre, date alcune cose, si cerca, o di farne alcune altre ne' Problemi, o di mostrarne altre ne' Teoremi. Inoltre occorre per lo più di fare qualche operazione sopra il Dato, per eseguire il proposto ne' Problemi, o per fare strada alla dimostrazione di Teoremi, e questa dicesi *Costruzione*, a cui poscia segue la *Determinazione* del quesito, e indi la *Dimostrazione*, che è la parte prin-

PROPOSIZIONE I. PROBLEMA.

(*Dato*) Sopra una data retta linea terminata (*Quesito*) costituire un Triangolo equilatero.

Sia l' AB (*Fig.* 11) la data retta linea terminata: bisogna sopra la medesima costituire un triangolo equilatero.

(*Costruzione*) Dal centro A, coll' intervallo AB, descrivasi il cerchio BCD, e similmente dal centro B, coll' intervallo BA, descrivasi un altro cerchio ACE (*Dimanda* 3). E dal punto C, in cui s' incontreranno le loro circonferenze, agli estremi punti A B della data linea AB, si conducano le rette linee CA CB (*Dimanda* 1).

(*Determinazione*) Dico, che il triangolo ABC quindi resultante, sarà Equilatero.

(*Dimostrazione*) Essendo A il centro del cerchio BCD, l' AC sarà uguale all' AB (*Definizione* 14); ed essendo ancora B centro

cipale di tutte le proposizioni, finalmente la *Conclusione* di ciò, che si dovea fare, o dimostrare. Noi distingueremo ciascuna di queste parti nella Proposizione prima, che è il primo Problema; e nella quarta, che sarà il primo Teorema; per poterle distinguere, come potrà fare qualunque discreto, ed attento Lettore nell' altre proposizioni, in cui non accaderà darne veruno indizio, per essere più succinti.

Ne' titoli delle proposizioni problematiche si aggiungerà il vocabolo di *Problema;* e quello di *Teorema* si metterà solamente nel primo, e non nell'altre Proposizioni, che si supporranno tutte Teorematiche, quando non vi sia apposta la parola *Problema*.

Corollario poi dicesi ciò, che si deduce dal già dimostrato nella precedente proposizione.

del cerchio ACE, sarà pur la CB uguale all' AB. Dunque le due AC CB sono altresì uguali tra loro (*Assioma* 1); e però tutti tre i lati del triangolo ABC essendo uguali, sarà esso triangolo equilatero (*Defin.* 19).

(*Conclusione*) Adunque sopra la data retta linea AB si è formato il triangolo equilatero; il che si era proposto di fare.

PROPOSIZIONE 2. PROBLEMA.

Da un dato punto tirare una linea retta uguale ad un' altra data.

Sia il dato punto A (*Fig.* 12), e la data retta BC: bisogna dal punto A tirare una retta uguale alla data BC.

Tirisi (*Dimanda* 1) la retta AB, e sopra di essa formisi il triangolo equilatero ABD (*Proposiz. prec.*), i di cui lati DB, DA si prolunghino indefinitamente (*Dimanda* 2), e col centro B, all' intervallo BC, descrivasi il cerchio CH (*Dimanda* 3) segante il lato prolungato DB in G. Poscia col centro D all' intervallo DG si descriva l' altro cerchio GK (*Dim.* 3) segante il lato prolungato DA in L. Perchè dunque sono uguali le rette DG, DL (*Defin.* 14), come ancora le rette DB DA; levando queste da quelle, cioè DB da DG, e DA da DL, rimarranno uguali le residue EG, AL (*Assiom.* 2); ma ancora la BC è uguale alla BG (*Defin.* 14); dunque le rette AL, BC sono uguali (*Assiom.* 1): e però dal dato punto A si è condotta

l' AL uguale alla data retta linea BC. Il che erasi proposto di fare .

PROPOSIZIONE 3. PROBLEMA .

Date due linee rette disuguali, dalla maggiore tagliarne una parte uguale alla minore .

Sieno date le due rette disuguali AB C (*Fig.* 13), delle quali sia maggior la AB : bisogna dalla AB tagliare una parte uguale alla minore C .

Tirisi dal punto A la retta AD uguale alla C (*Proposiz. prec.*) , e col centro A descrivasi pel punto D il cerchio DF (*Dimanda* 3), che segherà la AB in E. Sarà dunque l'AE uguale all'AD (*Def.* 14), e però ancora alla data C (*Assiom.* 1). Il che si doveva fare .

PROPOSIZIONE 4. TEOREMA .

(*Dato*) Se due triangoli avranno un angolo uguale ad un angolo, ed intorno ad essi sieno i lati dell' uno uguali ai lati dell' altro, ciascuno a ciascuno

(*Quesito*) Sarà ancora la base dell' uno uguale alla base dell' altro, e gli angoli rimanenti d'un triangolo saranno uguali ai rimanenti dell'altro, e il triangolo sarà uguale al triangolo .

Sieno li due triangoli ABC DEF (*Fig.* 14), che abbiano l' angolo A uguale all' angolo D, ed intorno ad essi sieno i lati dell' uno uguali ai lati dell' altro, cioè l' AB uguale al DE e l' AC uguale al DF; dico, che ancora la base BC dell' uno sa-

rà uguale alla base EF dell' altro, e gli angoli rimanenti del triangolo BAC saranno uguali ai rimanenti del triangolo DEF, cioè l'angolo B all'angolo E, e l'angolo C all' angolo F, e il triangolo ABC uguaglierà il triangolo DEF.

(*Costruzione*) S' intenda applicarsi un triangolo sopra l' altro, di maniera che l'angolo A si soprapponga all' angolo D, e il lato AB si adatti sopra il lato DE.

(*Determinazione*) Quindi saranno uguali la base alla base, e gli altri due angoli agli altri due, l' uno all' altro, e il triangolo al triangolo.

(*Dimostrazione*) Imperocchè l'altro lato AC cadrà sopra il lato DF; altrimenti gli angoli A, e D non sarebbero uguali, contro l' ipotesi; e il punto B cadrà in E, e il C in F, essendosi supposti uguali i lati AB DE, AC DF; sicchè la base BC dovrà adattarsi sopra la base EF; altrimenti due linee rette comprenderebbero spazio, il che è assurdo (*Assiom.* 9); però combaciandosi amendue le basi, e ciaschedun angolo, e tutto il triangolo a tutto il triangolo, saranno uguali le basi, ed uguali gli angoli opposti ai lati uguali, ed ambidue gli spazi de' triangoli parimente saranno uguali (*Assiom.* 5).

(*Conclusione*) Se dunque due triangoli avranno le condizioni dette nella proposta, cioè un angolo uguale ad un angolo, ed i lati dell' uno uguali a quelli dell'altro, intorno al medesimo angolo, saranno pure le loro basi uguali, e gli altri angoli uguali, e le superficie dell'uno, e dell' altro triangolo saranno uguali. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 5.

In ogni triangolo equicrure, gli angoli interni sopra la base sono tra loro uguali; e prolungando ambi i lati uguali, gli angoli, che ne risultano sotto essa base, saranno pure tra loro uguali.

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 15) equicrure, che abbia il lato AB uguale al lato AC.

Piglisi qualunque punto F nel lato AB prolungato, e nell'altro lato AC si ponga ad AF uguale l'AG (*Prop.* 3); indi si tirino le rette CF BG. Essendo che il triangolo AFC ha lo stesso angolo A, che l'altro triangolo AGB, e sono i lati AF AG uguali, come ancora i lati AC AB; saranno pure tra loro uguali le basi FC GB, e altresì l'angolo F uguaglierà l'angolo G, e l'altro ACF sarà uguale all'altro ABG (*Prop.* 4): e perchè dalle linee uguali AF AG detratte le uguali AB AC, rimane la FB uguale alla GC (*Assiom.* 2), e si è provata la FC uguale alla GB, e gli angoli F G pure uguali; dunque nei triangoli FBC GCB l'angolo FCB uguaglierà l'angolo GBC, e l'angolo CBF sarà uguale all'angolo BCG (*Prop.* 4); onde dall'angolo ACF, e dall'angolo AEG, che si sono provati uguali, sottraendo gli angoli uguali FCB CBG, rimarranno uguali gli angoli residui ACB ABC (*Assiom.* 2); dunque nel triangolo equicrure sono uguali gli angoli interni sopra la base, e ancora prolungati i lati al di sotto di essa, gli angoli esteriori CBF BCG pure sono uguali, come si è provato. Il che è quanto doveva dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 6.

Viceversa, se in un triangolo sono uguali due angoli fra loro, ancora i lati opposti ad essi saranno uguali.

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 16), che abbia l'angolo ABC uguale all'angolo ACB; dico che ancora il lato AB è uguale al lato AC.

Altrimenti, se uno dei lati AB fosse maggiore dell'altro AC, tagliata la BD uguale all'AC (*Prop.* 3), e congiunta la CD, avranno li triangoli ACB DBC, intorno gli angoli C B uguali, ancora i lati uguali AC BD, e il lato BC comune e però uguale in entrambi; dunque sarebbero essi triangoli tra loro uguali (*Propos.* 4); il che è assurdo, perchè sarebbe il tutto uguale ad una sua parte (*Assiom.* 6). Non è dunque possibile, che detti lati AB AC fossero disuguali; ma erano ambidue uguali; il che ec.

PROPOSIZIONE 7.

Dai termini della medesima retta linea tirate due rette concorrenti in un punto, non si potranno dai medesimi termini condurre altre linee uguali alle prime, le quali dalla medesima banda concorrano in un punto diverso dall' altro.

Dai termini della medesima retta AB (*Fig.* 17 e 18, tirate due rette FD BD concorrenti nel punto D, non si potranno dai medesimi termini A B condurre altre linee AC BC uguali alle prime, co-

me la AC alla AD, e la BC alla BD, le quali dalla medesima banda concorrano in un punto C diverso dall' altro D .

Se ciò si supponesse possibile, o sarebbe il loro concorso C fuori del triangolo ADB, e il punto D fuori dell'altro ACB; oppure uno di detti concorsi C sarebbe dentro l' altro triangolo ADB. Nel primo caso, congiunta la CD, sarebbe ciascuno dei triangoli ACD BCD equicrure, supponendosi la AC uguale alla AD, e la BC uguale alla BD; dunque l' angolo ACD sarà uguale all' angolo ADC (*Propos.* 5): ma questo essendo parte dell' angolo BDC, sarà di esso minore (*Assiom.* 6); dunque ancora ACD sarà minore di BDC, e l'altro BCD molto minore del medesimo BDC, a cui dovrebbe essere uguale (*Propos.* 5). Dunque non possono le rette uguali alle prime convenire in C fuori del triangolo ADB. Nemmeno concorreranno nel secondo caso dentro di esso, perchè prolungate le linee BD BC in F, in E, saranno uguali (*Prop.* 5) gli angoli esterni ECD CDF, per l' uguaglianza dei lati BC BD, e nel triangolo ACD, per essere la AC uguale all' AD, saranno pure uguali gli angoli interni ACD ADC; dunque essendo ACD maggiore di ECD, sarebbe ancora ADC maggiore di CDF, cioè la parte maggiore del tutto, il che è assurdo (*Assiom.* 6). Dunque non possono le rette AC BC uguali alle due AD BD, condotte dagli stessi termini, concorrere dalla medesima banda in un punto diverso dal medesimo D. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 8.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, ed inoltre le basi uguali; avranno altresì uguali tutti gli angoli opposti ai lati uguali nell' uno, e nell' altro triangolo.

Sieno li due triangoli ABC DEF (*Fig.* 19), che abbiano li due lati AB AC uguali alli due lati DE DF, l' uno all' altro, cioè il lato AB uguale al lato DE, e il lato AC uguale al lato DF; ed abbiano la base BC uguale alla base EF: dico che gli angoli A B C sono uguali agli angoli D E F, l'uno all' altro, cioè quelli che sono opposti ai lati uguali.

Si soprapponga il triangolo ABC all'altro EDF; adattate insieme le basi uguali BC EF, gli altri lati uguali si adatteranno parimente insieme, concorrendo col vertice A nel punto D, altrimenti due linee uguali alle prime concorrerebbero in un punto diverso da quello, in cui concorrono le altre condotte dai medesimi termini, il che è impossibile (*Propos.* 7). Dunque si adatteranno tutti gli angoli, combaciandosi insieme A con D, B con E, C con F, essendo soprapposti i lati, che li comprendono; e però saranno i detti angoli uguali (*Assiom.* 5). Il che doveasi dimostrare.

PROPOSIZIONE 9. PROBL.

Dato un angolo rettilineo, dividerlo in due parti uguali.

Sia dato l' angolo rettilineo BAC (*Fig.* 20): bisogna dividerlo per mezzo.

Preso nel lato AB qualunque punto D, si tagli dall' altro lato AC la parte AE uguale all' AD, (*Propos.* 3), e congiunta la DE, sopra questa, dalla banda opposta all' angolo dato, si descriva un triangolo equilatero DFE (*Propos.* 1); indi si congiunga l'AF; questa dividerà l'angolo dato in due parti uguali; perchè ne' triangoli ADF AEF, essendo uguali i lati AD AE, il lato AF comune, e le basi FD FE altresì uguali; sarà pure l' angolo DAF uguale all' altro EAF (*Propos.* 8); dunque dalla retta AF è diviso per mezzo l' angolo dato BAC; il che ec.

PROPOSIZIONE 10. PROBL.

Data una retta terminata, dividerla in due parti uguali.

Sia data la retta linea terminata AB (*Fig.* 21): bisogna dividerla per mezzo.

Si faccia sopra di essa il triangolo equilatero ACB (*Prop.* 1), e dividasi per mezzo l' angolo C colla retta CE (*Prop.* 9). Ne' due triangoli ACE, BCE essendo il lato CA uguale al CB, ed il lato CE comune, e gli angoli compresi da essi, uguali tra loro; la base AE sarà uguale alla BE (*Prop.* 4); e però tutta l' AB è divisa ugualmente per mezzo; il che ec.

PROPOSIZIONE 11. PROBL.

A una data retta linea alzare da un punto dato in essa una perpendicolare.

Sia data la retta linea AB (*Fig.* 22) , e dato in essa il punto C: bisogna dal punto C condur una perpendicolare all' AB .

Preso nella medesima qualunque altro punto D, si ponga alla CD uguale la CE e sopra tutta la DE si formi il triangolo equilatero DFE, e congiunta la retta FC, sarà questa la perpendicolare ricercata. Perchè ne' triangoli DCF ECF essendo uguali i lati DC CE, il lato CF comune, e le basi DF FE uguali, sarà l' angolo DCF uguale all' angolo ECF (*Propos.* 8), e però amendue saranno retti (*Defin.* 10, 11), e la linea FC sarà perpendicolare alla AB alzata sopra di essa dal dato punto C; il che ec.

PROPOSIZIONE 12. PROBL.

Da un punto dato fuori d'una linea indefinitamente prolungata tirarvi sopra una perpendicolare .

Sia data la retta linea indefinita AB (*Fig.* 23), e C il punto dato, che non è in essa: bisogna dal punto C tirar una perpendicolare sopra la AB .

Si pigli dall' altra parte di essa linea qualunque punto D, e col centro C, all' intervallo CD, descrivasi un arco di cerchio (*Dim.* 3), il quale segherà la data retta in due punti G E; indi segata per mezzo la GE in H (*Prop.* 10), e tirata la CH, sarà questa la perpendicolare cercata. Poiche essendo la GH uguale all' HE, CH comune ai triangoli GHC EHC, e le basi CG CE raggi del cerchio uguali (*Defin.* 14) , sarà l' angolo CHG

uguale al CHE (*Prop.* 8) , onde l' uno , e l' altro è retto (*Defin.* 10 *e* 11) , e la CH è perpendicolare alla retta AB , tiratavi dal punto C dato fuori di essa ; il che ec. (*a*) .

PROPOSIZIONE 13.

Quando una linea retta insistendo sopra un' altra, faccia angoli o li farà amendue retti, o uguali a due retti .

La linea retta EC (*Fig.* 4) insistendo sopra la retta AB, faccia gli angoli ECA ECB; dico che gli angoli ECA ECB o sono amendue retti, o uguali a due retti .

Perchè se fosse la EC perpendicolare all' AB , certo ne risulterebbero di quà , e di là gli angoli retti : ma se è inclinata , si tiri dal medesimo punto C la perpendicolare CD alla data AB (*Prop.* 11); dunque gli angoli ACD BCD saranno retti; e perchè l' angolo BCD è uguale ai due angoli BCE ECD (*Assiom.* 6), pongasi comune l' angolo ACD : dunque li due BCD DCA sono uguali ai tre BCD ECD DCA, ma li due BCD DCA sono ambedue retti , dunque anche li tre BCD ECD DCA sono uguali a due retti ; il che dovea dimostrarsi.

(*a*) Essendosi fin quì minutamente citate le precedenti proposizioni , le dimande , gli assiomi , e le definizioni , stimo superfluo il seguitare in avvenire a citarle così minutamente ; però supponendole ormai notissime, lascerò, che i principianti le ritrovino da sè stessi, e solo si citeranno per qualche volta le nuove proposizioni, acciò si rendano familiari , onde poi sarà superfluo il rinfrescarne la memoria , avendone già fatta pratica , e si stimerebbe troppa puerilità il continuare di rammentarle ai Geometri già provetti .

PROPOSIZIONE 14.

Se a un medesimo punto d' una retta congiunte da destra, e da sinistra due rette comprenderanno con essa due angoli uguali a due retti; saranno esse linee per diritto fra loro, cioè faranno una sola retta linea.

Se al medesimo punto B (*Fig.* 24) della retta AB, congiunte da destra e da sinistra due rette DB CB comprenderanno con essa due angoli DBA CBA uguali a due retti; saranno esse linee DB CB per diritto fra loro, cioè faranno una sola retta linea CBD.

Altrimenti prolungata la CB, se cadesse fuori della retta BD, come in BE, sarebbero pure gli angoli EBA CBA uguali a due retti (*Propos.* 13), cioè alli due DBA CBA; dunque tolto il comune CBA, sarebbero gli angoli EBA DBA uguali, cioè il tutto alla parte, il che è impossibile; dunque le rette CB BD sono per diritto fra loro, e fanno una retta continua; il che ec.

PROPOSIZIONE 15.

Segandosi fra loro due rette in punto, gli angoli al vertice saranno uguali.

Le due rette AB CD (*Fig.* 25) si seghino nel punto E: dico l' angolo AEC esser uguale all' angolo BED, e l' angolo CEB all' angolo AED.

Perchè sopra l' AB stando la CE, farà gli angoli AEC CEB uguali a due retti (*Prop.* 13); e co-

sì ancora la BE sopra la CD fa gli angoli BED CEB uguali a due retti, e però uguali alli due AEC CEB; dunque tolto il comune CEB, resta l'angolo AEC uguale al BED. Similmente si proverà essere l'angolo CEB uguale al DEA, facendo pure ciascheduno di questi coll'angolo BED due angoli uguali a due retti; dunque le rette, che si segano, fanno gli angoli al vertice uguali; il che ec.

Corollario. Da ciò può comprendersi, che tutti gli angoli fatti intorno al punto del segamento da due, o più linee rette, sono uguali a quattro retti.

PROPOSIZIONE 16.

Di qualunque triangolo prolungando un lato, l'angolo esteriore, che ne risulta, è maggiore di qualunque delli due interni opposti.

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 26) ed un lato BC di esso si prolunghi in D: dico che l'angolo esteriore ACD è maggiore di qualunque dei due interni ed opposti BAC ABC.

Diviso il lato AC per mezzo in E, congiunta la BE si prolunghi in F, posta la EF uguale alla BE, indi si unisca la FC. Li triangoli AEB CEF avendo uguali gli angoli al vertice (*Prop.* 15) e i lati BE EA dell'uno essendo uguali ai lati FE EC dell'altro; ancora gli altri angoli corrispondenti (*a*) BAE FCE saranno uguali: ma l'angolo ACD è maggiore della sua parte FCE, dunque è maggiore dell'ango-

(*a*) *Corrispondenti* diconsi quegli angoli, che ne' triangoli sono opposti ai lati uguali.

lo opposto BAE . Similmente prolungando il lato AC in G, diviso il BC per mezzo in H, e congiunta l'AH, se si prolunga in I in modo, che l'HI riesca uguale all' AH , congiunta la IC, si proverà nei triangoli ABH GIH esser l'angolo ABH uguale all' ICH , di cui essendo maggiore l' angolo BCG , il quale uguaglia l'ACD, esso angolo ACD parimente sarà maggiore dell'ABH ; dunque l'angolo esterno ACD è maggiore di qualunque interno opposto BAC ABC, preso separatamente l' un dall' altro . Il che ec.

PROPOSIZIONE 17.

Due angoli di qualsivoglia triangolo sono sempre minori di due retti .

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 26): dico che due angoli del triangolo ABC, presi in qualunque modo, sono minori di due retti .

Del triangolo ABC prolungato il lato BC in D , l' angolo interno BAC è minore dell' esterno ACD (*Prop.* 16); e ponendo comune l' angolo ACB , saranno li due BAC , ACB , presi insieme , minori delli due ACD, ACB , uguali insieme a due retti (*Prop.* 13). Dunque li due interni BAC ACB sono minori di due retti. Similmente si proverà essere gli ABC ACB insieme presi minori di due retti ; dunque sono sempre due angoli d' un triangolo minori di due retti ; il che ec.

PROPOSIZIONE 18.

Al maggior lato di ciascun triangolo è sottoposto il maggior angolo .

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 27) , che abbia il lato AB maggiore del lato AC; dico che l'angolo ACB, opposto al primo lato, sarà maggiore dell' angolo ABC opposto al secondo .

Si tagli dal BA la parte AD uguale all'AC , e si unisca il CD . Sarà l'angolo ACD uguale all' ADC (*Prop.* 5), e questo è maggiore dell' interno ABC (*Prop.* 16); dunque l' angolo ACD , e molto più il tutto ACB, è maggiore dell' angolo ABC; il che ec.

PROPOSIZIONE 19.

Viceversa, al maggior angolo di ciascun triangolo è sottoposto il maggior lato .

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 27) , che abbia l'angolo ACB maggiore dell'angolo ABC : dico che ancor il lato AB opposto al primo sarà maggiore del lato AC opposto al secondo .

Perchè se i lati suddetti fossero uguali, ancora gli angoli ACB ABC sarebbero uguali; se l'AC fosse maggiore dell' AB , sarebbe l' angolo ABC maggiore dell'ACB (*Prop.* 18); dunque essendo l'ACB maggiore dell' ABC , bisogna che sia il lato AB maggiore dell' AC ; il che ec.

PROPOSIZIONE 20.

In ogni triangolo due lati qualunque, presi insieme , sono maggiori del terzo .

Sia il triangolo ADC (*Fig.* 27): dico che due lati del triangolo ADC presi insieme sono maggiori del terzo: cioè i lati AD DC maggiori del lato AC; i lati AD AC maggiori del lato DC; e i lati DC CA maggiori del lato AD.

Si prolunghi l'AD, e pongasi in essa la DB uguale alla DC. Congiunta la BC, sarà l'angolo DCB uguale all'angolo B (*Prop.* 5): ma l'ACB è maggior del DCB; dunque l'ACB è maggior dell'angolo B; e però nel triangolo ABC il lato AB sarà maggior dell'AC (*Prop.* 19): ma l'AB è uguale a' due lati AD DC; dunque sono questi maggiori del terzo AC. Similmente dimostreremo che i lati AD AC sono maggiori del lato DC, e i lati DC CA maggiori del lato AD; il che ecc.

PROPOSIZIONE 21.

Se dagli estremi d'un lato del triangolo si conducano dentro di esso due rette, queste saranno minori degli altri due lati, ma conterranno un angolo maggiore.

Dagli estremi B C (*Fig.* 28) del lato BC del triangolo ABC si conducano dentro di esso le rette BD CD: dico che le BD CD sono minori dei lati BA CA, ma conterranno l'angolo BDC maggiore dell'angolo BAC.

Si prolunghi la BD fino che concorra col lato AC in E: saran le due BA AE maggiori della BE (*Prop.* 20); posta comune l'EC, sono le BA AC maggiori delle BE EC: perchè poi le DE EC sono maggiori della CD, se si ponga comune la DB, sono

le BE EC maggiori delle ED CD; dunque le due BA AC sono maggiori delle due BD CD: ma l'angolo BDC è maggiore del CED (*Prop.* 16), ed è il CED maggiore del BAC; dunque il BDC è maggiore del BAC; il che dovevasi dimostrare.

PROPOSIZIONE 22. PROBL.

Date tre linee rette, due delle quali sieno maggiori della terza, formarne un triangolo.

Sieno ABC le tre rette date (*Fig.*29), due delle quali siano maggiori della terza, cosicchè le A B sieno maggiori della C, le A C maggiori della B, e le B C maggiori dell' A: bisogna formarne un triangolo.

Nella retta DH si distinguano le parti FG GH FD rispettivamente uguali alle date C B A, e fatto centro in F, coll' intervallo FD descrivasi il cerchio DK; e fatto centro in G, coll' intervallo GH si descriva l' altro cerchio HK; e dove questi cerchi concorrono in K, si conducano ai centri le rette KF KG: sarà nel triangolo FKG il lato FG uguale alla C; il lato GK uguale al GH, cioè alla B, ed il lato FK uguale all' FD, cioè all'A. Dunque si è fatto il triangolo colle date tre linee; il che ec.

PROPOSIZIONE 23. PROBL.

Alla data retta linea e al punto dato in essa, costituire un angolo uguale a un angolo dato.

Sia AB (*Fig.* 30) la data retta linea, A il punto dato in essa, ed FDE l' angolo dato: bisogna

all' AB e al punto A in essa costituire un angolo uguale al dato FDE .

Tirata sotto l' angolo dato qualunque retta FE si faccia un triangolo con tre linee uguali alle date FE FD DE (*Prop.* 22.), in maniera che le due AB AC uguaglino le due ED DF , e la BC sia uguale alla FE: è manifesto, che l' angolo BAC sarà uguale all'angolo dato FDE (*Prop.* 8). Dunque sarà fatto ciò , che era proposto .

PROPOSIZIONE 24.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati , l' uno all' altro rispettivamente , ma l' angolo maggiore dell' angolo, quello che è contenuto dai lati uguali , avranno la base altresì maggior della base .

Siano ABC DEF (*Fig.* 30) li due triangoli , che abbiano i due lati AB AC uguali alli due DE DF , l' uno all' altro , cioè il lato AB uguale al lato DE , e il lato AC uguale al lato DF , e l' angolo BAC maggior dell' angolo EDF : dico che ancora la base BC è maggiore della base EF .

Nella linea AB costituiscasi al punto A l' angolo BAG uguale all'EDF (*Prop.* 23), e fatta la AG uguale alla DF , si congiunga la BG , la quale sarà uguale all' EF (*Prop.* 4) , e se il punto G cade nella retta BC, è chiaro , che sarà la BG minore della BC , essendo una sua parte ; se cade sopra , essendo le due AG BG minori delle due AC BC (*Prop.* 21), ed essendo uguale l' AG all' AC , perchè ciascuna di esse uguaglia la BF, dovrà es-

sere la BG minor della BC; se poi il punto G riesce al di sotto, congiunta la CG. sarà il triangolo ACG equicrure, onde l' angolo ACG sarà uguale all'AGC (*Prop.* 5): ma l' angolo BGC è maggiore dell'AGC, e conseguentemente dell'ACG, e molto più del BCG; dunque la BC è maggiore della GB (*Prop.* 19). Però sempre essendo la BC della BG maggiore, sarà pure maggiore della EF; il che ec.

PROPOSIZIONE 25.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, ed abbiano la base maggior della base, avranno ancora l' angolo maggior dell' angolo, quello ch' è contenuto dai lati uguali.

Sieno ABC DEF (*Fig.* 30) li due triangoli, i quali abbiano i due lati AB AC uguali ai due DE EF, l' uno all' altro, cioè il lato AB uguale al lato DE e il lato AC uguale al lato DF, e la base BC maggior della base EF: dico che ancora l' angolo BAC è maggiore dell' angolo EDF.

Perchè se ancora li due angoli BAC EDF fossero uguali, sarebbero le basi BC EF uguali (*Prop.* 4); e se fosse il BAC minor dell' EDF, sarebbe la BC minor della EF contro l' ipotesi (*Prop.* 24). Dunque l' angolo BAC è maggiore dell' EDF.

PROPOSIZIONE 26.

Se due triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, l' uno all' altro, ed abbiano un lato ugua-

le ad un lato, quello che è posto, o fra gli angoli uguali, o sotto uno di essi, avranno ancora gli altri lati uguali agli altri lati, l'uno all' altro, e l'angolo rimanente all' angolo rimanente.

Siano ABC DGE (*Fig.* 31) i due triangoli, i quali abbiano i due angoli B C uguali alli due DGE GED, l'uno all'altro, cioè l' angolo B uguale all'angolo DGE, e l'angolo C all' angolo GED. Abbiano inoltre un lato, l' intercetto fra i detti angoli B C, uguale al lato GE contenuto dagli altri due DGE GED, oppure un lato AB opposto ad uno di essi angoli C uguagli il lato DG opposto all' angolo E, uguale ad esso C: dico che avranno gli altri lati uguali agli altri lati, l' uno all' altro, e l' angolo rimanente all' angolo rimanente.

Imperocchè quando il BC uguaglia il GE, se non fosse ancor il CA uguale all' ED, sia uno di essi, per esempio l'ED, maggiore dell' altro CA, e tagliandone l'EH uguale all' AC, congiunta la GH, riuscirebbe l' angolo EGH uguale all' angolo B (*Prop.*4): ma questo supponevasi uguale al DGE; dunque la parte EGH sarebbe uguale al tutto DGE, il che è impossibile; erano dunque uguali ancora i lati CA ED, e conseguentemente ancora il BA era uguale al GD, e l'angolo A all' angolo GDE, e tutto il triangolo a tutto il triangolo. Se poi solamente si supponesse il lato AB uguale al DG, sarebbe ancora il BC uguale al GE; altrimenti se fosse uno di essi, per esempio il GE, maggiore del BC, posto il GI uguale al BC, sarebbe l' angolo GID uguale al BCA: ma il GID è

maggiore del GED (*Prop.* 16); dunque il BCA non sarebbe eguale al GED, contro l' ipotesi; bisogna dunque, che ancora i lati BC GE sieno uguali, e però ancora il lato AC al DE, e l' angolo A all' angolo GDE. Il che ec.

PROPOSIZIONE 27.

Se due rette linee sono segate da un' altra, in maniera che gli angoli alterni riescano uguali fra loro, esse linee saranno parallele.

Se le due rette AB CD (*Fig.* 32) sieno segate dalla EF, in modo che gli angoli alterni AEF EFD siano uguali: dico che le AB CD sono parallele.

Perchè, se prolungate convenissero in un punto G, dovrebbe l' angolo esterno AEF essere maggiore dell' interno DFE (*Prop.* 16): ma gli è uguale; dunque non convengono esse rette AB CD in veruna parte; e però sono parallele (*Defin.* 28). Il che ec.

PROPOSIZIONE 28.

Parimente, se una retta cadendo sopra due rette fa l' angolo esterno uguale all' interno opposto dalla medesima parte, ovvero gli angoli interni dalla medesima banda uguali a due retti, le linee rette saranno parallele fra loro.

Sopra le due rette AB CD (*Fig.* 33) cadendo la retta EF faccia l' angolo esterno AGE uguale all' interno opposto dalla medesima parte CHG;

ovvero gli angoli interni e dalla stessa banda AGH GHC uguali a due retti: dico che la linea AB è parallela alla CD.

Imperocchè in tal caso sarebbe l' angolo HGB, il quale uguaglia l'AGE (*Prop.* 15), uguale al CHG alterno: siccome essendo gli HGB AGH uguali a due retti (*Prop.* 13), se sono pur gli AGH CHG uguali a due retti bisognerà, che l'HGB sia uguale al detto CHG alterno; dunque le rette AB CD in qualunque di questi due casi debbono essere parallele (*Prop.* 27). Il che ec. (*a*).

(*a*) *Avvertimento.* Servendosi Euclide nella seguente Proposizione del suo Assioma, da noi posto nel numero VIII, in cui dicesi, che *se due linee rette sieno segate da una terza in maniera, che da una parte ne risultino due angoli interni minori di due retti, e dall' altra banda maggiori, prolungate in infinito quelle due rette dalla banda, ove sono gli angoli minori, dovranno insieme concorrere;* ed avendo ivi indicato, di doverne in questo luogo dimostrare la verità, ed evidenza di questo Assioma, ne addurrò quì una pruova addotta dal P. Clavio, esposta però più brevemente, che sia possibile.

I. Si osservi in prima (*Fig* 34), che se sopra la retta BH eretta una perpendicolare BP, la retta PX con essa BP farà un angolo acuto BPX, le altre perpendicolari RQ TS erette sopra la medesima BH, ed alla stessa PX terminate, vanno decrescendo; poichè condotta la BQ perpendicolare sopra la PX (che cadrà dalla banda dell' angolo acuto, dovendo li due angoli BPQ BQP essere minori di due retti (*Prop.* 17), e non un retto ed un ottuso nel triangolo QBP) indi sopra la BH condotta la perpendicolare QR, e la RS perpendicolare alla PX, e la ST perpendicolare alla BH ec. è manifesto, che sarà la BP maggior della BQ, e questa maggiore della QR, e la QR maggior della RS, e la RS maggior della ST ec. (*Prop.* 19), essendo opposte all' angolo retto, che è il maggior angolo in qualunque dei triangoletti.

II. Similmente facendo la retta PX sopra la ST perpendicolare alla BH l' angolo ottuso TSP, le altre perpendicolari QR PB ec. condotte sopra la stessa BH, dalla banda di questo angolo ottuso, si fanno sempre maggiori, essendo la SR maggior della ST, e

PROPOSIZIONE 29.

Segandosi due linee parallele da una retta, saranno li due angoli interni da qualunque parte,

la RQ maggior della RS, e la QB maggior della RQ, e la BP maggiore della QB, come nel §. antecedente.

III. Quindi ne segue, che essendo sopra la retta BT alzate due perpendicolari TS BZ tra loro uguali, connessa la retta SZ, farà gli angoli SZB ZST ambedue retti; perchè se uno di essi fosse acuto, oppure ottuso, le dette perpendicolari ZB ST non sarebbero uguali, ma decrescerebbero, o si farebbero maggiori l' una dell' altra, come ne' §§. precedenti si è dimostrato.

IV. Ciò supposto, se la retta AP sega le due PD AL in maniera, che gli angoli APD PAL riescano minori di due angoli retti, dico, che prolungate le rette PD AL dovranno verso quella parte concorrere. Imperocchè verso l' angolo acuto APD tirata la perpendicolare AB dal punto A sopra la PD, si prenda nell' AL qualunque punto E, e sopra l' AB si tiri la perpendicolare EF; indi presa l' EK uguale all'AE, e prodotta l' EM uguale all'EF; congiunta la KM sarà ancor essa uguale alla AF, e l'angolo EMK uguale al retto AFE, giacchè li due lati EKEM sono uguali alli due AE EF intorno gli angoli uguali al vertice E; però presa la FG uguale all' AF sarà uguale all' MK; e congiunta la GK farà pure angoli retti con l' AG, come si cava da ciò, che si è dimostrato al *num.* III, mentre le rette MK FG sono uguali, e perpendicolari alla retta FM.

V. Quindi se all' AK si prenderà uguale la KL, ed all' AG sia uguale la GH, prolungata la GK in N in modo, che la KN uguagli la GK; congiunta la LN si proverà similmente uguale all' AG, e l'angolo N retto come l' AGK, e congiunta la LH sarà pur perpendicolare all' AH: e ponendosi la LC uguale all' AL, e l' HI uguale all'AH, congiunta la CI sarà pure alla medesima AI perpendicolare.

VI. E perchè presa la FG uguale all'AF, e la GH uguale all'AG, e l'HI uguale all'AH, e così proseguendo, verrà una volta l'AI maggiore dell' AB, e così la retta BD rimarrà inclusa dentro il triangolo AIC; dunque prolungata la BD dovrà uscire fuori dello spazio finito di questo triangolo; e non potendo concorrere con la base IC, perchè essendo li due angoli DBI CIB uguali a due retti, le rette BD IC sono parallele (*Prop.* 28); dunque converrà la

uguali a due retti, e l' esteriore uguale all' interno opposto dalla medesima parte, e gli alterni tra loro uguali.

La linea retta EF (*Fig.* 33) cada sopra le due parallele AB CD: dico che farà gli angoli interni AGH CHG uguali a due retti, l'angolo esterno BGE uguale all' interno opposto dalla medesima parte GHD, e gli alterni DHG AGH tra loro uguali.

Perchè, se gl' interni AGH CHG non fossero uguali a due retti, o sarebbero essi, o li susseguenti BGH DHG, minori di due retti; onde non sarebbero le rette AB CD parallele, ma converrebbero insieme (*Assiom.* 8). Dunque debbono essere li due angoli interni uguali a due retti; ed a due retti essendo pure uguali tanto li due EGB BGH, quanto li due AGH BGH (*Prop.* 13), sarà qualunque di queste coppie uguale alli due interni DHG BGH; e però tolto il comune BGH. rimarrà il DHG uguale sì all' esterno BGE (*Assiom.* 2), come all' alterno AGH (*Prop.* 15); il che ec.

PROPOSIZIONE 30.

Quelle rette che sono parallele ad una terza, saranno pure tra loro parallele.

Sia l' una e l' altra linea retta AB CD (*Fig.* 35) parallela all'EF: dico che ancora la AB è parallela alla CD.

BD col lato AC in V; e però le rette PBD AL segate dall' AP, o dall' AB ad angoli minori di due retti, prolungate verso quella banda, necessariamente insieme converranno in V. Il che dovea dimostrarsi.

Perchè segandosi tutte e tre da una retta GK ne' punti G H K, l'angolo AGK sarà uguale all'alterno GHF (*Prop* 29), e questo uguale all' interno opposto DKH. Dunque li due AGK DKH, che sono alterni tra le due rette AB CD, saranno uguali; e però queste rette saranno parallele tra loro (*Prop.* 27), essendo ciascuna parallela alla medesima terza EF ; il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 31. PROBL.

Per un dato punto tirare una linea parallela ad un' altra linea data .

Sia H (*Fig.* 33) il dato punto, e AB la data retta : bisogna pel punto H tirare una parallela all' AB .

Si tiri da esso punto sopra la data linea AB qualunque retta HG; indi all' angolo AGH si faccia uguale l' angolo GHD (*Prop.* 23); sarà la retta DHC parallela alla data AB, il che doveva eseguirsi .

PROPOSIZIONE 32.

In qualunque triangolo prolungandosi un lato, sarà l'angolo esterno uguale alli due interni opposti presi insieme : e li tre angoli d' un triangolo sono uguali a due retti .

Sia ABC (*Fig.* 36) un triangolo, ed un lato BC di esso si prolunghi in D : dico che l' angolo esterno ACD è uguale ai due interni opposti CAB CBA, presi insieme : e che li tre angoli interni ABC BCA CAB del triangolo sono uguali a due retti .

Si

Si tiri dal punto C la retta CE parallela all' AB (*Prop.* 31): sarà l'angolo ACE uguale all' alterno CAB, e l'esterno ECD uguaglierà l' interno opposto ABC (*Prop.* 29): dunque l'angolo ACD è uguale a tutti due gl' interni opposti CAB CBA; e tanto a quello che a questi due aggiunto l' angolo rimanente interno BCA, sono li tre angoli interni CAB CBA BCA uguali alli due ACD BCA, li quali uguagliano due retti (*Prop.* 13). Però li tre angoli interni di qualunque triangolo uguagliano due retti; il che ec.

PROPOSIZIONE 33.

Quelle rette, che congiungono dalle stesse parti le rette parallele, ed uguali, riescono ancor esse uguali, e parallele.

Sieno uguali e parallele le rette AB CD (*Fig.* 37), e le congiungano dalle medesime parti le rette AC BD: dico che le AC BD sono uguali e parallele fra loro.

Si connettano colla retta CB agli angoli opposti. Saranno intorno agli angoli ABC BCD uguali (*Prop.* 29), essendo alterni di due parallele, il lato AB uguale al lato CD, ed il lato CB comune; dunque le basi AC BD sono uguali (*Prop* 4), e gli altri angoli corrispondenti BCA CBD pure saranno uguali; e però essendo alterni, le stesse rette AC BD sono parallele (*Prop.* 27). Dunque ec.

PROPOSIZIONE 34.

Nei quadrilateri, li cui lati opposti sono paralleli, e però chiamansi *Parallelogrammi*, gli opposti lati sono sempre uguali, e gli angoli opposti uguali; e da un angolo all'altro opposto tirata una retta, che dicesi *Diametro*, rimane detto spazio diviso in due triangoli uguali da essa retta.

Sia il parallelogrammo ABDC (*Fig.* 37), il cui diametro sia BC: dico che del parallelogrammo ABDC il lato AB è uguale al lato opposto CD, e il lato AC è uguale al lato opposto BD; che l'angolo BAC è uguale all' angolo opposto CDB, e l' angolo ABD è uguale all' angolo opposto ACD; e che il diametro BC divide in due triangoli uguali ABC DCB il parallelogrammo ABDC.

Imperocchè tali triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato comune BC, essendo gli alterni ABC BCD uguali, e gli alterni BCA CBD pure uguali (*Prop.* 29); onde le basi AC BD saranno uguali, ed ancora gli angoli opposti A D saranno uguali, e gli altri due ABD, ACD; e tutto il triangolo ABC all' altro DCB (*Prop.* 26): e però il parallelogrammo è diviso per mezzo dal diametro BC; il che ec.

PROPOSIZIONE 35.

Li parallelogrammi, sopra la stessa base, e fra le medesime parallele descritti, sono tra loro uguali.

Sieno li parallelogrammi ABCD BCFE (*Fig* 38) descritti sulla stessa base BC, e tra le medesime parallele BC AF : dico che il parallelogrammo ABCD è uguale al parallelogrammo BCFE.

Imperocchè il lato AD, e il lato EF essendo uguali al medesimo opposto BC (*Prop.* 34), sono uguali tra loro; e posta comune la DE, sarà l'AE uguale alla DF; e l'AB uguaglia la DC, e l'angolo BAE è uguale al CDF. Dunque il triangolo ABE è uguale all'altro CDF (*Prop.* 4); e tolto il comune DGE, saranno uguali i trapezii ADGB CGEF; indi aggiunto all'uno, ed all'altro il triangolo BGC, sarà il parallelogrammo ABCD uguale all'altro BCFE; il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 36.

Se poi li parallelogrammi fossero descritti tra le stesse parallele e sopra uguali basi, saranno pur tra loro uguali.

Siano li parallelogrammi ABCD EFGH (*Fig.* 39) descritti tra le stesse parallele AH BG e sopra basi uguali BC FG, saranno pure tra loro uguali.

Perchè tirate le rette BE CH, riusciranno ancora esse parallele (*Prop.* 33), essendo le parallele BC EH uguali, giacchè tanto questa, che quella è uguale all'FG; dunque il BCHE è un parallelogrammo uguale all'ABCD, per esser sulla stessa base BC, ed uguale pure all'EFGH (*Prop.* 35), perchè sulla medesima base EH, e fra le stesse parallele AH BG : però li detti parallelogrammi ABCD EFGH sono tra loro uguali; il che ec.

PROPOSIZIONE 37.

Li triangoli costituiti sulla medesima base, e tra le stesse parallele, sono pure tra loro uguali.

Sieno li triangoli BDC BEC (*Fig.* 39) sulla medesima base BC e tra le stesse parallele BC AE: dico che il triangolo BDC è uguale al triangolo BEC.

Imperocchè tirata la BA parallela alla CD, e la CH parallela alla BE, ne risultano due parallelogrammi ABCD EBCH, li quali sono sulla stessa base, e fra le medesime parallele, e però sono tra loro uguali (*Prop.* 35). Dunque li triangoli BDG BEC, che sono la metà di essi parallelogrammi (*Prop.* 34), sono pure tra loro uguali (*Assiom.* 4); il che ec.

PROPOSIZIONE 38.

Li triangoli costituiti sopra uguali basi, e fra le stesse parallele, sono pure tra loro uguali.

Sieno BCD FHG (*Fig.* 39) li triangoli costituiti sopra le uguali basi BC FG, e fra le stesse parallele BG DH: dico che il triangolo BCD è uguale al triangolo FHG.

Condotta la retta BA parallela alla CD, e la FE parallela alla GH, riescono due parallelogrammi ABCD EFGH sopra basi uguali costituiti, e fra le medesime parallele, che però sono fra loro uguali (*Prop.* 36); dunque ancora detti triangoli BCD FHG, che sono le loro metà (*Prop.* 34), sono pure tra loro uguali (*Assiom.* 4); il che ec.

PROPOSIZIONE 39.

Se due triangoli costituiti sopra la stessa base, verso la medesima parte, sono uguali tra loro, la retta che congiunge i loro vertici riesce parallela alla base.

Siano i due triangoli uguali BAC BDC (*Fig.* 40) costituiti sopra la stessa base BC, verso la medesima parte; dico che la retta AD che congiunge i loro vertici A D è parallela alla base BC.

Altrimenti, se non le fosse parallela, si tiri l' AE parallela alla BC, la quale seghi il lato BD sopra o sotto il vertice D, nel punto E. Congiunta la retta CE, riuscirebbe il triangolo BEC uguale al BAC (*Prop.* 37), e però uguale all' altro triangolo BDC, onde la parte sarebbe uguale al tutto; il che è impossibile (*Assiom.* 6). Dunque l' AD era parallela alla base BC, come dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 40.

Similmente, se sopra due porzioni uguali d'una medesima linea, sieno costituiti verso la medesima parte due triangoli uguali, la retta che congiunge i loro vertici sarà parallela alla retta sulla quale sono costituiti i triangoli.

Siano li triangoli uguali BAC EDF (*Fig.* 41) costituiti sulle due uguali parti BC EF della linea EF, e dalla stessa banda: dico che la retta AD la qual unisce i loro vertici è parallela alla BF, su cui son costituiti i triangoli uguali.

Se tale non fosse, tirata l' AH parallela alla BF segherebbe il lato ED in H, sopra o sotto il vertice D; e congiunta la FH, sarebbe il triangolo EHF uguale all'ABC (*Prop.* 38), e però uguale all' EDF, il che è assurdo (*Assiom.* 6). Dunque non altra linea, che l' AD condotta dal punto A, può essere parallela alla BF; il che ec.

PROPOSIZIONE 41.

Se il parallelogrammo ed il triangolo hanno la stessa base e sono fra le stesse parallele, sarà il parallelogrammo doppio del detto triangolo.

Il parallelogrammo ABCD (*Fig.* 39) ed il triangolo BEC abbiano la stessa base BC, e siano nelle medesime parallele BC AE: dico che il parallelogrammo ABCD è doppio del triangolo EBC.

Imperocchè tirata la retta BD, saranno li triangoli BDC BEC uguali (*Prop.* 37); dunque essendo l' ABCD doppio del BDC (*Prop.* 34), sarà pure doppio del BEC; il che ec,

PROPOSIZIONE 42. PROBL.

Ad un dato triangolo fare un parallelogrammo uguale, con un angolo uguale ad un dato.

Sia l' ABC (*Fig* 42) il triangolo dato, e sia D il dato angolo: bisogna fare un parallelogrammo uguale al dato triangolo, con un angolo uguale al dato D.

Dal punto A condotta la retta AG parallela alla base BC (*Prop.* 31), e questa divisa per mezzo in

E (*Prop.* 10), si faccia l' angolo CEF uguale al dato D (*Prop.* 23), e condotta la CG parallela all' EF, sarà il parallelogrammo FECG uguale al dato triangolo ABC. Poichè tirata la retta AE, essendo uguali le basi BE EC, sono uguali li triangoli BAE EAC (*Prop.* 38), e però è l' ABC doppio del triangolo AEC, di cui essendo ancora doppio il parallelogrammo FECG (*Prop.* 41), sarà dunque al triangolo ABC uguale il detto parallelogrammo, con l' angolo CEF uguale al dato D; come era da farsi.

PROPOSIZIONE 43.

In ogni parallelogrammo i complementi di que' parallelogrammi, che sono d' intorno al diametro, sono uguali fra loro.

Nel parallelogrammo ABCE (*Fig.* 43), condotto il diametro AC, e per qualunque punto G di esso condotte le rette IGF HGK parallele a' lati AB BC, saranno li parallelogrammi BIGK HGFE (che si chiamano *Complementi*) tra loro uguali.

Imperocchè essendo tutto il triangolo ABC uguale all' AEC, ed il triangolo AKG uguale all' AFG, ed il triangolo GIC uguale al GHC (*Prop.* 34), sarà il rimanente spazio BIGK uguale al rimanente HGFE; il che ec.

PROPOSIZIONE 44. PROBL.

Ad una data retta, in un angolo dato, applicar un parallelogrammo uguale ad un dato triangolo.

Sia la GF (*Fig.* 43) la data retta, L il triangolo dato, e D il dato angolo: bisogna alla data retta GF, in un angolo uguale al D, applicare un parallelogrammo uguale al dato triangolo L.

Si faccia un parallelogrammo IGKB uguale al triangolo L, nell' angolo IGK uguale al dato D (*Prop.* 42), e posta la data GF per diritto al lato IG, si compisca il parallelogrammo KGFA, e si tiri il diametro AG, che prolungato concorrerà col lato BI in C (*Assiom.* 8), e condotta la CE parallela all'AB, si prolunghino ad essa le rette KG AF in H, E; sarà il parallelogrammo HGFE un complemento uguale all'altro IGKB (*Prop.*43): e però uguale al dato triangolo L, ed applicato alla data retta GF, con l' angolo HGF uguale all' IGK, e però uguale al dato angolo D; il che dovea farsi.

PROPOSIZIONE 45. PROBL.

Ad una data retta applicare un parallelogrammo, uguale ad un dato rettilineo, con un angolo uguale a un dato.

Sia ABCD (*Fig.* 44) il dato rettilineo, ed E il dato angolo: bisogna sulla data retta FG applicare un parallelogrammo uguale al rettilineo ABCD con un angolo uguale all' E.

Si risolva il rettilineo in triangoli ABD BCD, (ed in più altri, se avesse più lati). Indi nel dato angolo E facciasi, applicato alla retta FG il parallelogrammo FGHI uguale al triangolo ABD (*Prop.* 44), e prolungata la retta GH, si formi

nell' angolo IHL, applicato alla retta HI, il parallelogrammo LHIK uguale all'altro triangolo BCD (e così si prosiegua, se vi sono altri triangoli annessi). È manifesto, che tutto il parallelogrammo GFKL applicato alla retta GF, nell' angolo FGH uguale all' E, sarà uguale a tutto il dato rettilineo, essendo la prima sua parte uguale al primo triangolo, e la seconda al secondo, ec. Il che ec.

PROPOSIZIONE 46. PROBL.

Sopra una data retta linea descrivere il suo quadrato.

Sia la AB (*Fig.* 47) la data retta linea; bisogna dalla AB descrivere il suo quadrato.

Si alzi dal punto A sopra la data AB la perpendicolare AD (*Prop.* 11) uguale alla medesima AB, e si tirino la DC parallela all' AB, e la BC parallela all' AD. Saranno i lati opposti uguali, ed ancora gli angoli opposti uguali, essendo questo pure un parallelogrammo (*Prop.* 34). Dunque essendo uguali le AB AD, saranno pure tutti i lati uguali, e tutti gli angoli retti, perchè le parallele avendo gli angoli interni uguali a due retti (*Prop.* 28), siccome è retto l' angolo BAD, così pure è retto l' ABC, e così il CDA; però l' ABCD è un quadrato (*Defin.* 23), il che dovea farsi sopra la data AB.

PROPOSIZIONE 47.

In qualunque triangolo rettangolo, il quadrato

descritto sopra il lato opposto all' angolo retto, uguaglia li due quadrati descritti sopra gli altri due lati contenenti l' angolo retto .

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 45), che abbia retto l' angolo BAC: dico, che il quadrato descritto dalla retta BC è uguale ai quadrati, che si descrivono dalle BA AC .

Si tiri la retta ALM parallela a' lati BD CE, e condotte le rette FC AD, posto comune l' angolo ABC agli angoli retti uguali FBA DBC, sarà l' angolo FBC uguale all'angolo ABD, ed il lato FB essendo uguale al lato AB , ed il lato CB uguale al BD, saranno li triangoli FBC ABD uguali ; ma essendo la CA per diritto con la GA, mercè i due angoli retti BAC BAG, il triangolo FBC ha la stessa base col quadrato ABFG, ed è tra le medesime parallele; onde l' ABFG è il doppio del triangolo FBC (*Prop.* 41) , e similmente il parallelogrammo BLMD è doppio del triangolo ABD; dunque il quadrato ABFG è uguale al BLMD. Parimente condotte le rette IB AE , si proveranno uguali i triangoli ICB ACE , di cui il doppio sarà uguale, cioè il quadrato ACIH uguaglierà l' LMEC; e però li due quadrati de'lati AB AC saranno uguali al quadrato del lato BC opposto all' angolo retto ; il che era da dimostrarsi .

PROPOSIZIONE 48.

Viceversa, se il quadrato d' un lato d' un triangolo uguaglia li quadrati degli altri due lati l' angolo compreso dagli altri due lati sarà necessariamente un angolo retto .

Il quadrato che si descrive dal lato BC (*Fig.* 46) del triangolo BAC sia uguale ai quadrati, che si descrivono dagli altri due lati BA AC: dico che l' angolo BAC è retto.

Imperocchè dal punto A tirata la perpendicolare AD sopra il lato AC, e facendo l' AD uguale alla AB, congiunta poscia la CD, sarà il quadrato di essa CD uguale alli due quadrati delle AC AD (*Prop.* 47), cioè delle AC AB, essendo fatta l' AD uguale all' AB. Dunque il quadrato della CD è uguale al quadrato della BC, ed il lato CD eguale al lato BC ne' triangoli ADC ABC; in cui il lato pure AD uguaglia il lato AB, ed il lato AC è comune ad entrambi; dunque l' angolo retto CAD è uguale all' angolo CAB (*Prop.* 8); e però questo è retto, ond' esso triangolo CAB è rettangolo, come dovea dimostrarsi.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO SECONDO.

DEFINIZIONI.

Ogni parallelogrammo rettangolo dicesi contenuto da' que' due lati, che sono d' intorno all' angolo retto (*a*).

II. In ogni rettangolo ABCD (*Fig.* 48) preso uno de' rettangoli intorno al diametro, come l'AEFH, con li due complementi FB FD, cioè lo spazio ABIFGD, si chiamerà *Gnomone*.

PROPOSIZIONE I.

Se di due rette, l' una sia segata in più parti, il rettangolo compreso dalle due rette linee, è ugua-

(*a*) Così quando si nominerà il *Rettangolo* ABC (*Fig.* 47), (o sieno le due linee AB BC distinte, o congiunte insieme, o l' una parte dell' altra) dovrà intendersi il parallelogrammo ABCD fatto da tali lati AB BC congiunti insieme ad angolo retto, a' quali lati sono pure uguali gli opposti CD DA paralleli a' due primi. Ed intanto dicesi esso rettangolo contenuto da essi lati, perchè se in parti uguali l' uno, e l' altro s' intenda diviso, per esempio l' AB in 4 parti, e il BC in 3; il prodotto del numero delle parti dell'AB nel numero delle parti del BC compone il numero de' quadratelli, i quali compiscono la superficie di tale rettangolo: come 4 moltiplicato in 3 farà dodici quadratini di ciascuna particella de' lati, li quali riempiono il rettangolo ABCD.

le a tutti insieme que' rettangoli contenuti dalla non segata, e da ciascun segamento dell' altra.

Sieno le due rette AB C (*Fig.* 49), e l'AB sia segata in più parti AE EF FB; dico essere il rettangolo compreso da essa C e dall' intiera AB, ugual ai rettangoli insieme, contenuti dalla medesima C e da ciascuna di tali parti AE EF FB.

Imperocchè alla stessa AB posta ad angolo retto la BD uguale alla C, e compiuto il rettangolo ABDG, si tirino da' punti E F, che dividono essa AB, le rette EH FI parallele alla BD. È manifesto che l'ABDG uguaglia li rettangoli in esso compresi FBDI EFIH AEHG; ma quello è contenuto dall' AB, e dalla BD uguale alla C; e questi altri si contengono dalle parti FB FE AE, e dalle rette FI EH uguali alla BD, e però uguali alla stessa C. Dunque il rettangolo contenuto dall' intiera AB e dalla C uguaglia i rettangoli insieme fatti dalla stessa C, e da ciascuna delle parti AE EF FB dell' intiera AB; il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 2.

Segandosi una retta in due parti, il quadrato di tutta la retta uguaglia i rettangoli compresi dalla medesima retta e da ciascheduna sua parte.

La retta linea AB (*Fig.* 50) sia segata in due parti AD BD: dico che il quadrato ABGF di tutta l' AB è uguale ai rettangoli compresi da essa AB e da ciascheduna sua parte AD BD.

Perchè tirata la DH parallela al lato AF, resta esso quadrato diviso appunto in due rettango-

li l' uno FADH contenuto dall' AF (che uguaglia l' AB) e dalla parte AD; l' altro DBGH, contenuto dalla BG (pure uguale all' AB) e dall' altra parte DB; sicchè essendo il tutto uguale a tutte le sue parti insieme, il quadrato della AB uguaglia i rettangoli dalle AB AD, e dalle AB BD; il che ec.

PROPOSIZIONE 3.

Essendo pure segata una retta comunque, il rettangolo da tutta la linea e da una parte uguaglia il quadrato di questa parte col rettangolo contenuto da ambe le parti.

Sia segata comunque la linea AB (*Fig.* 51) nel punto D; dico che il rettangolo compreso da tutta l'AB e dalla parte AD uguaglia il quadrato di essa AD col rettangolo contenuto da ambe le parti AD BD.

Si alzi perpendicolarmente all'AB la retta AF uguale alla parte AD, e compiuto il rettangolo AFGB, contenuto da tutta l' AB, e dalla parte AD, si tiri la DH parallela all'AF: sarà l'FADH il quadrato dalla AD, e l'HDBG il rettangolo contenuto dalle parti AD BD (essendo l'HD uguale all' AD). Dunque essendo il rettangolo dalle AD AB, cioe l' AFGB, uguale a questi due spazj, è manifesto, che uguaglia il quadrato della AD, ed il rettangolo ADB. Il che ec.

PROPOSIZIONE 4.

Essendo una retta divisa comunque, il quadrato di tutta la retta è uguale a' quadrati delle parti, ed ai due rettangoli contenuti da esse parti.

Sia AB (*Fig.* 52) la retta linea divisa comunque in C: dico che il quadrato di tutta l' AB è uguale ai quadrati delle parti AC CB ed ai due rettangoli contenuti da esse parti AC CB.

Descrivasi esso quadrato ABDE, e tirato il diametro BE venga segato in G dalla CF parallela al lato BD, e si tiri pel G la HGI parallela all' AB. Essendo i lati AB AE uguali, l'angolo AEB uguaglia l'angolo ABE (5. I), a cui pure è uguale l'HGE (29,I); dunque sono gli angoli GEH HGE uguali, e però l'EHGF è il quadrato della HG, cioè dell'AC: così il CGIB si mostrerà essere il quadrato della CB; come ancora può dedursi dall' essere tutta la FC uguale all' AB, e la parte FG uguale all' AC, e però la rimanente CG uguale alla CB. Li due complementi ACGH FGID son uguali, e contenuti da lati uguali alle parti AC CB. Dunque essendo il quadrato ABDE uguale alli spazj EHGF CGIB ACGH FGID, è manifesto, essere uguale a' quadrati delle parti AC CB, ed a' due rettangoli contenuti da esse parti; il che era da dimostrarsi.

Corollario. Li rettangoli, che si fanno intorno il diametro d' un quadrato, sono quadrati, come si è dimostrato l' EHGF esser quadrato della AC, e l' IBCG il quadrato della BC.

PROPOSIZIONE 5.

Se una retta è divisa in parti uguali, ed in disuguali, il quadrato della metà di essa è uguale al rettangolo delle parti disuguali, col quadrato del segmento intermedio.

La retta AC (*Fig.* 53) sia divisa in uguali parti nel punto B ed in disuguali nel punto D; dico, che il quadrato della metà di essa AC è uguale al rettangolo delle parti disuguali AD DC col quadrato del segmento intermedio BD.

Si descriva il quadrato di essa BC, il quale sia BCEF, e tirato il diametro CF, si conduca la DH parallela alla CE, la quale seghi il diametro in G, e si tiri pel punto G la retta IGLK concorrente co' lati CE BF in I, L, e con la AK parallela a' detti lati, in K. Sarà il rettangolo GIEH uguale al BDGL (43. I), e posto comune il quadrato DGIC, sarà il DCEH uguale al rettangolo BGIL, ovvero al rettangolo ABLK, uguale a questo, per essere sopra basi uguali CB AB; e di nuovo posto comune il rettangolo BDGL, sarà il Gnomone HGLBCE uguale al rettangolo ADGK, il quale è contenuto dalla retta AD, e dalla DG uguale alla DC; onde apposto ad entrambi il quadrato LGHF, che è quadrato della BD, sarà il Gnomone con tale quadrato, cioè il quadrato intiero BCEF, uguale al rettangolo ADC delle parti disuguali, col quadrato della parte intermedia BD; il che doveasi dimostrare.

PRO-

PROPOSIZIONE 6.

Se a una retta divisa per mezzo, si aggiunga per diritto un' altra retta; il rettangolo di tutta la composta e dell' aggiunta, col quadrato della metà, uguaglia il quadrato della composta della metà e dell' aggiunta.

La retta linea AC sia divisa per mezzo in B (*Fig.* 54), e ad essa si aggiunga per diritto la CD; dico il rettangolo da tutta la composta AD e dall' aggiunta CD, col quadrato della metà BC, uguagliar il quadrato della BD composta della metà e dell' aggiunta.

Perchè descritto il quadrato BDHF, e tirato il diametro DF, da cui si seghi in I la CE parallela alla BF, e per lo punto I tirata la GK parallela alle rette DA HF; sarà il rettangolo ABLK uguale al rettangolo BCIL, per essere posti sopra le uguali basi AB BC (36. I); ed è il BCIL uguale all' altro complemento GIEH (43. I): dunque l' ABLK uguaglia il GIEH, e posto comune il rettangolo BDGL, sarà tutto il rettangolo ADGK (cioè il contenuto dalla composta AD, e dall' aggiunta DC uguale alla DG) uguale al Gnomone BLIEHD: dunque posto comune il quadrato LIEF (che è il quadrato della metà BC) riesce il rettangolo ADC, col quadrato della BC, uguale al detto Gnomone collo stesso quadrato, cioè a tutto il quadrato BDHF; il che ec.

PROPOSIZIONE 7.

Essendo una retta segata comunque, i quadrati di tutta, e di una sua parte, sono uguali al doppio del rettangolo di tutta e della sua parte col quadrato della rimanente.

La retta AB (*Fig.* 55) sia segata comunque in C: dico che i quadrati di tutta l' AB e d' una sua parte CB sono uguali al doppio rettangolo dalle AB CB, col quadrato della rimanente AC.

Si descrivano essi due quadrati ABDE CBKI, e condotto nel primo il diametro BE segante la IC prolungata in G, si conduca per G la HL parallela ai lati AB ED, e continuata la CG convenga col lato ED in F. Essendo uguali i complementi AHGH LGFD (43. I), ed i quadrati CGLB ICBK fatti sopra lo stesso lato CB, sarà il rettangolo ABLH (contenuto dalle BA BC) uguale al rettangolo LGFD, insieme col quadrato ICBK; e però il Gnomone AHGFDB col quadrato ICBK uguaglia il doppio del rettangolo dalle AB BC. Posto comune dunque il quadrato HGFE, che è il quadrato dell' AC, sarà tutto il quadrato ABDE, col quadrato CBKI, uguale al doppio rettangolo ABC, col quadrato della AC; il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 8.

Se una retta sia segata comunque, il rettangolo quattro volte compreso da tutta la retta e da una sua parte, insieme col quadrato dell' altra parte,

è uguale al quadrato di tutta la retta insieme colla parte predetta, come fosse una linea sola.

La retta AB (*Fig.* 56) sia segata comunque in C: dico, che il rettangolo quattro volte compreso dalle AB BC, insieme col quadrato dell' AC, è uguale al quadrato delle AB BC come fossero una linea sola.

Si prolunghi la retta AB nel punto D e si ponga la BD uguale alla BC. Descritto il quadrato ADKG, e condotte le BI CH parallele al lato AG, si seghino col diametro DG in N P, e per questi punti sieno tirate le ENM FPL, parallele ai lati AD GK. È manifesto, essere il rettangolo ABNE uguale all' NMKI (43. I), a cui pure è uguale l'ONIH, (per essere le basi ON NM tra loro uguali, come lo sono le CB BD): ed ai rettangoli uguali EOPF PQHI aggiunto il quadrato BM o l' uguale OQ, sarà il rettangolo EOPF insieme col quadrato BM uguale al rettangolo ONIH, ed a ciascun degli uguali NMKI ABME, contenuto dall'AB, e dalla BC, che uguaglia la BN, ovvero la BD. Dunque il Gnomone AFPHKD è quadruplo del rettangolo delle AB BC; e posto comune il rettangolo FPHG, che è il quadrato della AC, sarà tutto il quadrato ADKG uguale alli quattro rettangoli delle AB BC, col quadrato della rimanente AC; il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 9.

Una retta essendo segata in parti uguali, [illegible] disuguali; saranno li quadrati delle parti disuguali

il doppio del quadrato della metà di tutta, e del quadrato della linea intermedia.

Sia l' AC (*Fig.* 57) segata in parti uguali nel punto B, ed in disuguali nel punto D: dico che i quadrati delle parti disuguali AD DC sono doppj de' quadrati, che si fanno dalle AB BD.

Si alzi dal punto B ad angoli retti la BE uguale all' AB, e congiunte le rette AE CE, si tiri la DF perpendicolare anch' essa all' AD, cioe parallela alla BE, e posta la FG parallela alla BD, si congiunga l'AF. Essendo i lati AB BE uguali intorno l' angolo retto B, saranno uguali i due angoli BAE BEA (5. I), che uguagliano un altro retto (32 I), e però saranno semiretti. Similmente gli angoli BEC BCE per la stessa ragione sono semiretti; dunque è retto l' angolo AEC composto di due semiretti: e saranno ancora semiretti gli angoli FEG DFG, che uguagliano ciascheduno delli due BGF BEC (29. I); dunque la EG uguaglia la GF, cioè la BD, e la DF uguaglia la DC. Per tanto li due quadrati delle AD DC sono uguali alli due delle AD DF, cioè al quadrato della AF (47. I), ovvero alli due quadrati delle AE EF. Ed è il quadrato dell' AE doppio del quadrato dell' AB, essendo uguale ad ambidue li quadrati delle AB BE tra loro uguali; ed il quadrato della EF è parimente doppio del quadrato della BD, uguagliando li due quadrati delle EG GF uguali ciascuno a quello della BD. Dunque i quadrati delle parti disuguali AD DC sono doppj del quadrato della [redacted] AB e del quadrato della parte intermedia BD; il che ec.

PROPOSIZIONE IO.

Se ad una retta divisa per mezzo si aggiunga per diritto un' altra retta, li quadrati che si fanno da tutta con l'aggiunta, e dall' aggiunta sono doppj dei quadrati che si fanno dalla metà, e dalla composta della metà e dell' aggiunta.

Sia la linea AC (*Fig.* 58) divisa per mezzo in B, e ad essa si aggiunga per diritto la retta CD: dico che li due quadrati dalle AD CD sono doppj dei quadrati che si fanno dalle AB BD.

Alzata la BE perpendicolare alla AB, ed uguale alla stessa, si congiungano le AE EC; e tirata la DF parallela all' EB concorra colla EC in F, e si tiri la FG parallela alla BD, che convenga colla EB in G; indi congiungasi l' AF. È manifesto, essere l' angolo AEC retto; essendo semiretti gli angoli AEB BEC, come ancora gli altri DCF DFC CFG (*Prop. prec.*); e però la DF è uguale alla DC, e l' EG uguale alla FG, cioè alla BE; onde il quadrato della EF è doppio del quadrato della ED, ed il quadrato della AE è doppio del quadrato dell' AB, a' quali essendo uguale il quadrato della AF, per essere l'angolo AEF retto, e lo stesso essendo uguale a' quadrati delle AD DF (per essere ancora retto l'angolo ADF) cioè a' quadrati delle AD DC; è manifesto, che questi due quadrati delle AD DC sono uguali al doppio del quadrato della AB, ed al doppio del quadrato della BD; il che ec.

PROPOSIZIONE II. PROBL.

Segare una data retta linea talmente, che il rettangolo da essa e dalla parte minore riesca uguale al quadrato della rimanente parte maggiore.

Sia data l' AB (*Fig.* 59) : bisogna segar la AB in modo che il rettangolo di essa e della sua parte minore sia uguale al quadrato della rimanente parte maggiore .

Descritto il quadrato di tutta l' AB, il quale sia l' ABDE, si divida per mezzo in F un lato AE contiguo ad essa AB; e congiunta la retta BF , si prolunghi la FA verso G in maniera, che sia la FG uguale all' FB; indi sopra l' eccesso AG si descriva il quadrato AGIC, il cui lato IC prolungato seghi i lati AB ED in C , ed in H. Dico essere il punto C quel segamento della retta AB, che si ricercava . Perchè essendo l' AE divisa per mezzo in F , ed aggiuntavi l' AG , sarà il rettangolo EGA (cioè l' EGIH, per essere la GI uguale alla GA) insieme col quadrato della AF, uguale al quadrato della FG (6. II), cioè al quadrato della FB, che uguaglia quello della FG, o ai due quadrati delle AB AF, che uguagliano esso quadrato della FB (47. I); però tolto il comune quadrato della AF , rimane il rettangolo EGIH uguale al quadrato ABDE, e tolto il comune ACHE, resta il quadrato ACIG uguale al rettangolo DBCH , cioè il quadrato della AC uguale al rettangolo ABC; il che era il quesito .

PROPOSIZIONE 12.

Ne' triangoli ottusiangoli, il quadrato del lato opposto all' angolo ottuso è maggiore de' quadrati degli altri due lati; e li supera di due rettangoli contenuti da quello di essi lati sopra cui prolungato cade la perpendicolare condotta dal vertice dell' angolo ad esso opposto, e da quella linea intercetta fra la perpendicolare e l' angolo ottuso.

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 60) che abbia l'angolo B ottuso: dico che il quadrato del lato AC opposto all' angolo ottuso è maggiore de' quadrati degli altri due lati AB BC, e li supera di due rettangoli contenuti da uno di essi lati CB, e dalla porzione BD intercetta fra l' angolo B, e la perpendicolare AD tirata, sopra il lato CB prolungato, dall' angolo A opposto ad esso.

Imperocchè il quadrato della AC uguaglia li due quadrati delle AD CD (47. I): ma il quadrato della CD è uguale a' quadrati delle CB BD, ed a' due rettangoli CBD (4. II): dunque il quadrato della AC è uguale a' quadrati delle AD BD CB, ed a' due rettangoli CBD. Essendo adunque li due quadrati delle AD BD uguali al quadrato della AB, ne segue, che il quadrato della AC è uguale a' quadrati delle AB CB, ed a' due rettangoli CBD; il che ec.

PROPOSIZIONE 13.

In ogni triangolo il quadrato del lato opposto all'

angolo acuto è minore de' quadrati degli altri due lati; da' quali è superato per due rettangoli compresi da quello di essi lati sopra cui cade la perpendicolare condotta dal vertice dell' angolo ad esso opposto, e da quella linea intercetta fra la perpendicolare e l' angolo acuto .

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 61) : dico che il quadrato del lato AC opposto all'angolo acuto B è minore de' quadrati de' lati AB CB, da' quali è superato per due rettangoli compresi dalle BC BD .

Imperocchè il quadrato della CB col quadrato della DB è uguale a due rettangoli CBD ed al quadrato della CD (7. II). Si ponga comune il quadrato della perpendicolare AD, saranno i quadrati delle CB BD AD uguali ai due rettangoli CBD, col quadrato della CD , e col quadrato della AD : ma li due quadrati delle BD AD uguagliano il quadrato della AB; e li due quadrati delle CD AD sono uguali al quadrato dell'AC (47. I) . Dunque li quadrati delle AB CB sono uguali al quadrato della AC con due rettangoli CBD; e però il quadrato della AC è minore de' due quadrati delle AB CB della quantità dei rettangoli CBD; il che ec.

PROPOSIZIONE 14. PROBL.

Ritrovare un quadrato uguale ad un dato rettilineo .

Sia A (*Fig.* 62) il dato rettilineo : bisogna costruir un quadrato uguale al rettilineo A .

Si costruisca un parallelogrammo rettangolo BDEF uguale al dato rettilineo A (45.I), e si pro-

lunghi la BD in G, sicchè sia la DG uguale al lato DE, poscia divisa per mezzo la BG in C, dal centro C descrivasi col raggio CB il semicircolo BHG, a cui si stenda il lato DE, il quale concorra colla periferia in H. Dico essere il quadrato della DH uguale al dato rettilineo A. Imperocchè congiunta la CH, sarà il quadrato della CH uguale a' due quadrati delle CD DH (47. I). Ma il raggio CH uguaglia il raggio CG: dunque i due quadrati delle CD DH uguagliano il quadrato della CG. Ma per essere la BG segata pel mezzo in C, e non pel mezzo in D, esso quadrato della CG uguaglia il rettangolo BDG, col quadrato della CD (5. II.). Dunque il quadrato della CD col quadrato della DH è uguale al quadrato della CD col rettangolo BDG, e però il quadrato della DH uguaglia esso rettangolo BDG, o BDEF; ma questo si era fatto uguale al rettilineo A: dunque al medesimo rettilineo è uguale il quadrato della DH, che dovea ritrovarsi.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO TERZO.

DEFINIZIONI.

Una linea retta dicesi *Tangente* il Cerchio, se incontrandosi in qualche punto della sua circonferenza, benchè si prolunghi, non la sega.

II. Similmente si dicono *Toccarsi* le circonferenze de' Cerchj, quando in qualche punto convengono, ma non si segano.

III. Diconsi *egualmente* dal centro *distanti* quelle rette linee, sopra di cui le perpendicolari condotte da esso centro si trovano uguali.

IV. *Segmento* di cerchio chiamasi quella porzione, che da un arco di esso, e dalla corda cioè da una retta al medesimo sottesa, è contenuto.

V. *Angolo del Segmento* si nomina quello, che dal termine dell'arco della sua periferia, e dalla corda sottoposta comprendesi.

VI. *Angolo* poi *nel Segmento* dicesi qualunque di quelli, che dalle rette condotte da ambi i termini d'una corda a qualunque punto dell'arco sono contenuti.

VII. Lo stesso angolo si dice *insistere* sopra l'arco circolare opposto, il quale viene determinato

da quelle linee rette, che comprendono l' angolo.

VIII. *Settore* si chiama lo spazio compreso da due raggi del cerchio, e dall' arco da essi intercetto.

IX. *Segmenti simili* diconsi quelli, che comprendono angoli uguali, contenuti dalle rette tirate da qualunque punto dell' arco a' termini della corda.

PROPOSIZIONE I. PROBL.

Trovare il centro d' un dato cerchio.

Sia il cerchio dato ABC (*Fig.* 63): bisogna trovar il centro del cerchio ABC.

Si tiri dentro di esso qualunque retta AC, e dividasi per mezzo in F (10. I); indi si alzi sopra di essa una perpendicolare FB, la quale seghi la circonferenza ne' punti B H (11. I); e divisa pure essa BH per mezzo in E, dico essere questo punto E il centro ricercato. Imperocchè se fosse fuori della linea BH, come in G, tirate le linee GA GC sarebbero uguali; e congiunta la GF, essendo comune a' triangoli GFA GFC, in cui pure i lati AF FC sono uguali, sarebbe anco l'angolo AFG uguale al GFC (8. I); e però ambedue retti. Dunque l'angolo AFG sarebbe uguale all' angolo AFE, che si era pure fatto retto dalla perpendicolare FB (*Assiom.* 7); il che è assurdo (*Assiom.* 6): dunque il centro non è fuori della retta BH, nè può essere altrove, che nel mezzo di essa; e però in E è il centro ricercato.

Corollario. Condotta dunque nel cerchio qualunque linea CA, e dal punto di mezzo F eretta la perpendicolare, in essa deve sempre essere il centro del cerchio.

PROPOSIZIONE 2.

La retta che congiunge due punti della periferia d' un cerchio, giace tutta dentro al medesimo cerchio.

Sia il cerchio ABE (*Fig.* 64), e nella periferia di esso si prendano li due punti A B: dico che la retta che li congiunge giace tutta dentro al medesimo cerchio.

Imperocchè tra' punti A B preso qualunque punto D in essa linea, ed al centro C congiunte le rette CA CB CD, o saranno gli angoli ADC BDC retti; o l' uno acuto, l' altro ottuso. Sia per esempio l'ADC ottuso, o retto; gli altri angoli saranno in esso triangolo acuti (17. 1), e però il lato AC sarà maggiore del CD (19. 1): ma segandosi la circonferenza da essa CD in F, la CF uguaglia il raggio AC: dunque essendo la DC minore del raggio CF, il punto D è più accosto al centro, che non è la periferia del cerchio; e però qualunque punto D della retta AB si prova esser nel circolo: dunque giace tutta la linea AB dentro al medesimo; il che ec.

PROPOSIZIONE 3.

Se nel cerchio una retta che passa pel centro,

sega per mezzo un' altra retta, che non passa pel centro, la segherà ad angolo retto: e viceversa se la sega ad angolo retto, ivi la divide pel mezzo.

Sia il cerchio ABC (*Fig.* 65), ed in esso la retta BD, che passa pel centro, divida per mezzo la retta AC, che non passa pel centro: dico che la segherà ad angoli retti. E viceversa, se la sega ad angoli retti, la dividerà ivi ancor per mezzo.

Perchè ne' triangoli AEF CEF essendo il lato EF comune, se ancora il lato AF uguaglia il CF, e la base AE è uguale all' altra EC, gli angoli AFE CFE saranno uguali (8. I). e però retti; e se sono questi retti, essendo ancora gli angoli EAF ECF uguali (5. I), ed il lato EF comune, sarà ancora il lato AF uguale all' FC (26. I); il che ec.

PROPOSIZIONE 4.

Se nel cerchio due linee, che non passano pel centro, si segano fra loro, non saranno ivi ambedue divise pel mezzo.

Sia il cerchio ADBC (*Fig.* 66), e in esso le due rette AB CD, non condotte pel centro, si seghino fra loro nel punto F: dico che entrambe non si segano per mezzo.

Dal centro E si conduca la EF. Se fosse l' AB divisa pel mezzo in F, le sarebbe l'EF perpendicolare (3. III); e se pure la CD si dividesse per mezzo nel medesimo punto F, sarebbe a questa ancora perpendicolare la stessa EF: dunque l' angolo retto AFE uguaglierebbe il retto CFE, onde il tutto sarebbe uguale alla parte; il che è impossi-

bile (*Assiom.* 6) . Dunque non si segano l'una e l' altra pel mezzo fuori del centro. Il che era da dimostrarsi .

PROPOSIZIONE 5.

Se due cerchj si seghino, non avranno il medesimo centro.

Li due cerchj AB CD (*Fig.* 67) si seghino in B C : dico che essi non avranno il centro medesimo .

Imperocchè congiunta al segamento la retta EB, e tirata qualunque altra EAD, che seghi ambedue le circonferenze, ove sono distinte, in A D; se fosse il punto E centro d' ambi i cerchj . sarebbe l' EB uguale tanto all' EA , che all' ED , onde queste due sarebbero uguali tra loro (*Assiom.* 1), essendo uguali ad una terza : il che è impossibile, perchè il tutto non può essere uguale ad una sua parte (*Assiom.* 6) . Dunque tali cerchj non hanno un centro comune E ; il che era da dimostrarsi .

PROPOSIZIONE 6.

Parimente se due cerchj si toccassero , non potrebbero avere un centro comune .

Li due cerchj AB CD (*Fig.* 68) si tocchino di dentro nel punto B: dico , che detti cerchj non hanno il centro medesimo .

Perchè giunta al contatto l' EB, e tirata l' altra EAD, ne seguirebbe lo stesso assurdo , come nell'

antecedente. Dunque è verissima ancora questa proposta.

PROPOSIZIONE 7.

Se nel diametro d'un cerchio si prenda un punto, che non sia centro del cerchio, e da quello si tirino alla circonferenza altre rette, la massima linea sarà quella, in cui è il centro del cerchio, e la rimanente sarà la minima. Delle altre poi la più vicina a la massima sarà sempre maggiore della più lontana; e due linee sole si possono tirare tra loro uguali dal punto medesimo dall' una e dall' altra parte della minima.

Sia il cerchio ADB (*Fig.* 69), il cui diametro sia AB, ed in esso si prenda un punto G, che non sia il centro, e questo sia E; e dal punto G si tirino alla circonferenza alcune rette GF GD: dico, che la GA è la massima, e la GB la minima. Delle altre poi la GF è maggiore della GD.

Si faccia l'angolo EGH uguale all' angolo EGF: tirati dal centro E i raggi EF ED EH, essendo l' EF uguale all' EA, posta comune la EG, sarà la GA uguale a' due lati GE EF, i quali sono maggiori del terzo GF (20. I); dunque la GA è maggiore della GF. Similmente si mostrerebbe maggiore di qualunque altra GD, che però è la massima di tutte, come in primo luogo dovea dimostrarsi.

Secondo: essendo ne' triangoli GEF GED il lato GE comune, ed il lato EF uguale all' ED. ma l' angolo GEF maggiore del GED, sarà la base

GF maggiore dell' altra GD (24. I); e però la retta più prossima alla massima GA è maggiore della più lontana .

Terzo : quindi la GB direttamente opposta alla massima GA, e però più remota da essa di qualunque altra , è la minima di tutte , essendo qualunque GD maggiore di essa , perchè le GD GE sono maggiori dell' ED , e però maggiori dell' EB ; onde tolta la comune GE , rimane la GD maggiore della GB (*Assiom.* 3) .

Quarto: essendo fatti uguali gli angoli al centro GEH GEF contenuti da lati uguali, essendo la GE comune , e l' EH uguale all' EF, le basi GH GF saranno pure uguali (4. I): ma se si tirasse da esso punto G qualunque altra linea alla circonferenza, sarebbe più vicina, o più lontana dalla massima, che non sono queste due. Dunque due sole linee uguali si possono tirare da un punto , che non sia centro , alla circonferenza, una di qua , e una di là dalla massima ; il che ec.

PROPOSIZIONE 8.

Se fuori d' un cerchio si prenda un punto, e da quello sian tirate alla circonferenza delle linee rette, una delle quali passi pel centro; di quelle che cadono nella circonferenza concava la massima è quella che passa pel centro; e delle altre , la più vicina a quella, che passa pel centro , è sempre maggiore della più lontana ; ma di quelle che cadono nella circonferenza convessa , la minima è quella, che continuata passa pel centro ; e delle

al-

altre, la più vicina alla minima è sempre minore della più lontana; e due sole linee potranno tirarsi uguali alla circonferenza dall' una e dall' altra parte della minima.

Sia il punto G (*Fig.* 70) preso fuori del cerchio AFDB: primieramente condotta pel centro la retta GEA fino al concavo della circonferenza, sarà questa la massima di tutte. Secondo, la GF più vicina alla massima sarà maggiore della GD più lontana. Terzo, la GB terminata al convesso della periferia, che continuata passa pel centro, è la minima di tutte. Quarto, di tutte le rette terminate al convesso, sempre la G*f* più vicina alla minima è minore della G*d* più lontana. Quinto, due sole linee uguali, una di qua e una di là dalla massima e dalla minima, potranno tirarsi da esso punto G al concavo, o al convesso della circonferenza, facendo al centro gli angoli uguali GEH GED, ovvero li GE*h* GE*d*.

Il primo, ed il secondo si prova come nell' antecedente; il terzo si dimostra ancora, perchè essendo le E*d* *d*G maggiori della EG (20. I), tolti li raggi uguali E*d* EB, rimane la G*d* maggiore della GB, e così qualunque altra G*f* sarà maggiore della GB; e però questa è la minima di tutte.

Il quarto si prova, perchè le due G*d* *d*E sono maggiori delle due G*f* *f*E (11. I); ma le *d*E *f*E sono uguali; dunque la G*d* è maggiore della G*f*, e però le più vicine alla minima GB sopra il convesso del cerchio sono minori delle più lontane.

Il quinto si prova, come il quarto della proposizione precedente.

PROPOSIZIONE 9.

Se da un punto dentro al circolo si possono tirare alla circonferenza più di due linee uguali, sarà quello il centro di esso cerchio.

Sia nel cerchio ADF (*Fig.* 71) il punto E, da cui si tirino alla circonferenza più di due linee uguali EA ED EF: dico esser E il centro di esso cerchio.

Imperocchè da un punto, che non fosse centro, non si potrebbono tirare, se non se due linee uguali, come si è dimostrato (7. III).

PROPOSIZIONE 10.

Due cerchj non possono segarsi, se non in due soli punti.

Si seghino insieme li due cerchj ACBF ABCD (*Fig.* 72): dico che non possono segarsi che in due soli punti.

Perchè se si segassero in tre punti A B C, condotte dal centro E di uno di essi cerchj le EA EB EC a' segamenti, ed essendo queste uguali, dovrebbe essere il punto E centro ancora dell' altro cerchio (9. III); il che è impossibile (5. III).

PROPOSIZIONE 11.

Se due cerchj si toccano al di dentro, la retta, che congiunge i loro centri, prolungata passerà pel contatto de' cerchj.

I due cerchj ABG DBF (*Fig.* 73) si tocchino al

di dentro in B; dico che la retta che congiunge i loro centri E C, prolungata passerà pel contatto B di essi cerchj.

Altrimenti, se fosse del cerchio ABG il centro *e*, che congiunto col centro C del cerchio DBF segasse le circonferenze, ove sono disgiunte, in D A; tirate al contatto le rette CB *e*B, essendo la CD uguale alla CB, posta comune la C*e*, sarà la D*e* uguale alle due BC C*e*; e però maggiore della B*e* (20. I), cioè dell' altro raggio *e*A, e così la parte *e*D maggiore del tutto *e*A; il che è impossibile (*Assiom.* 3). Dunque il vero centro del cerchio ABG era E, che unito col centro del cerchio DBF manda la linea EC al contatto B; il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 12.

Ancora toccandosi due cerchj per di fuori, la retta, che congiunge i loro centri, passerà pel contatto.

Sieno i due cerchj ABG DBF (*Fig.* 74), che si tocchino al di fuori nel punto B. Dico, che la retta che congiunge i loro centri E C passerà pel contatto B.

Imperocchè se non fosse E il centro del cerchio ABG, ma un altro punto *e*, sicchè congiunta la *e*C segasse le periferie in A D, tirata la *e*B sarebber le *e*B BC uguali agli altri due raggi *e*A CD, e però que' due lati *e*B BC riuscirebbero minori del terzo C*e*; il che è impossibile (20. I). Dunque il centro debb' essere in E nella retta EC, che passa pel contatto B; il che ec.

PROPOSIZIONE 13.

Due cerchj, che si toccino dentro o fuori, avranno il loro contatto in un sol punto.

Siano (*Fig.* 75) i due cerchj B*db* BDG, che si tocchino fuori nel punto B, ovvero i due B*db* F*gb*, che si tocchino dentro in *b*: dico, che il punto del loro contatto è un solo, B nel primo caso, *b* nel secondo.

Si congiungano i loro centri E C colla retta CE, che passerà pel contatto B (12. III), ma se si toccassero in altro punto D, si congiunga ancora la CD. Perchè dunque la CB passa pel centro E del cerchio B*db*, sarà la CB la minima di quelle, che dal punto C si conducono alla periferia del detto cerchio, il cui centro E (8. III); dunque non sarebbe la CD uguale alla CB, e però non sarebbero amendue raggi del cerchio, il cui centro C; quindi non si toccano essi cerchi in altro punto, che in B.

Che se poi li due cerchj si toccheranno interiormente, ne' due punti b, d, *congiunta la* dc, *le due* cb cd *sono uguali: aggiungasi la* cE *di comune, saranno le due linee* dc cE *uguali alla* bE, *e per conseguenza uguali anche alla* dE: *il che è assurdo* (20. *I*). *Dunque non potevano i due cerchj, che toccansi interiormente, toccarsi se non se nel solo punto* b; *il che ec.*

PROPOSIZIONE 14.

Nel cerchio le corde uguali sono ugualmente distanti dal centro; e se sono da esso egualmente distanti, sono tra loro uguali.

Nel cerchio ABD (*Fig.* 76) se le corde AC BD sono uguali: dico, che saranno ugualmente distanti dal centro E; e se sono da esso ugualmente distanti, dico che son tra loro uguali.

Tirate dal centro E le perpendicolari EF EG sopra le corde AC BD, saranno queste divise pel mezzo (3. III), onde sarà l' AF uguale alla BG, se tutta l'AC era uguale a tutta la BD; e congiunti i raggi EA EB, i cui quadrati sono uguali, saranno altresì i quadrati delle AF FE uguali a' quadrati delle BG EG, perchè uguagliano i quadrati de' raggi opposti agli angoli retti F G (47. I); dunque essendo uguali i quadrati delle AF BG, debbono essere uguali i rimanenti quadrati delle EF EG (*Assiom.* 2), e però ancor esse perpendicolari sono uguali, onde le corde uguali AC BD sono ugualmente distanti dal centro E (*Defin.* 3). Viceversa le corde che saranno ugualmente distanti dal centro, dovranno essere uguali, perchè i due quadrati delle AF FE uguagliando gli altri due delle BG GE, essendo tanto questi che quelli uguali al quadrato del raggio; però siccome il quadrato della EF uguaglierà il quadrato della EG, ancora i quadrati rimanenti delle AF BG saranno uguali; ed essendo le AF BG la metà delle rette AC BD (3. III), ancora le intere AC BD riescono uguali; il che ec.

PROPOSIZIONE 15.

Delle rette inscritte in un circolo la massima è il diametro, e dell' altre la più vicina al centro è maggiore della più lontana.

Delle rette inscritte nel cerchio ACIK (*Fig.* 77) la massima è il diametro LM, e dell' altre la più vicina IK al centro è maggiore della più lontana AC.

Tirate dal centro sopra le rette AC IK le perpendicolari EF EH, si prolunghi questa in G, sicchè sia la EG uguale all' EF, e si tiri la BGD parallela all' IK, cui parimente sarà perpendicolare la EG; onde la DB riuscirà uguale all'AC (14.III): e congiunti i raggi EI EK ED EB, essendo li due lati IE KE uguali a' due BE DE, ma l'angolo IEK maggiore del BED; dunque la base IK è maggiore dell' altra BD (24. I): e però è maggiore la IK più vicina al centro, della più lontana AC, che uguaglia la BD: ed il diametro è vicino più di tutti al centro; dunque è maggiore di qualunque altra retta non condotta pel centro; e però è la massima di tutte, uguagliando sempre i due raggi, come gli EI EK, i quali sono maggiori della base IK (20. I); onde è manifesto ciò, che dovea provarsi.

PROPOSIZIONE 16.

Quella retta che nel termine d' un diametro, è ad esso perpendicolare, sarà tangente del cerchio, rimanendo tutta negli altri punti esteriore

alla circonferenza: nè potrà inserirsi veruna linea retta tra la stessa tangente e la circonferenza; e però l'angolo del semicircolo è maggiore di qualsivoglia angolo acuto; e l'angolo rimanente è minore.

La retta EAD (*Fig.* 78) tirata pel termine A del diametro AH, e perpendicolare ad esso diametro, sarà tangente del cerchio ABH, rimanendo tutta negli altri punti esteriore alla circonferenza: nè potrà inserirsi veruna retta LA tra la stessa tangente AE e la circonferenza: e l'angolo CAF del semicerchio sarà maggiore di qualsivoglia angolo acuto LAH: e l'angolo del contatto FAE è minore di qualsivoglia angolo rettilineo LAE.

Tirata dal centro C a qualunque altro punto D della retta EAD, che nel punto A tocca la circonferenza, la retta CD, questa opposta all'angolo retto CAD sarà maggiore del raggio CA opposto all'angolo acuto CDA (19. I), e però maggiore del raggio CB; dunque il punto D è fuori della circonferenza: e così qualunque altro punto di essa linea EAD rimane fuori del cerchio; che però solamente in esso punto A resta toccato dalla retta EAD. Che poi non possa, tra la circonferenza e la tangente, inserirsi al contatto A veruna retta LA, è manifesto, perchè condotta dal centro C la perpendicolare CG sopra essa LA, sarà la CG minore della CA, come opposta quella ad angolo minore (32. I) del retto CGA, cui si oppone questa: dunque il punto G della retta LA essendo più vicino al centro C che il punto A, sarà dentro il cerchio; e però la retta LA sega il circolo, e non resta interposta fra la circonferenza, e la tangente;

onde l'angolo CAF del semicircolo eccede qualunque angolo acuto LAC, e l' angolo FAE del contatto è minore di qualsivoglia piccolissimo angolo EAL; il che era da dimostrarsi .

PROPOSIZIONE 17. PROBL.

Da un dato punto condurre una tangente a un dato cerchio .

Sia il dato punto E (*Fig.* 79), e il dato cerchio ABF : bisogna dal punto E condurre una tangente al cerchio ABF .

Congiunta al centro C del dato cerchio la retta EC segante la periferia in B, si descriva dal centro C, col raggio CE, un altro cerchio EDG, e posta perpendicolare alla EC la BD, la quale concorra colla periferia di questo secondo cerchio in D, si tiri la CD segante la prima data circonferenza in A ; congiunta l' EA sarà essa la tangente. Imperocchè i triangoli ECA DCB avendo intorno il comune angolo C i lati CE CA uguali ai CD CB , non solo le loro basi EA BD saranno uguali, ma ancora gli angoli corrispondenti (16. I); e però l' angolo EAC sarà retto, come l' angolo DBC. Dunque essendo l' AE perpendicolare al termine del diametro ACF, sarà essa AE tangente (16.III); il che dovea eseguirsi .

PROPOSIZIONE 18.

Se una retta tocca il cerchio, e sia condotta dal

centro al contatto un' altra retta, farà questa con essa tangente angolo retto.

La linea AE (*Fig.* 80) tocchi il cerchio ABF nel punto A : dico, che condotta dal centro C al contatto la retta CA, farà la CA con essa tangente angolo retto.

Se no, si conduca la CD perpendicolare ad essa tangente; sarà dunque l'AC maggiore della CD (29. I): ma la CB uguaglia la CA; dunque sarebbe la parte CB maggiore del tutto CD; il che è assurdo (*Assiom.* 6).

PROPOSIZIONE 19.

Toccandosi il cerchio da una retta, se dal contatto si alza una perpendicolare ad essa tangente, passerà per lo centro del cerchio.

La linea AE (*Fig.* 80) tocchi il cerchio ABF in A, e da A si conduca la AH ad angoli retti all'AE: dico che nell' AH è il centro del cerchio ABF.

Altrimenti se fosse il centro in G fuori della retta AH, tirata la GA farebbe ancor essa angolo retto con l' AE (18. III); dunque gli angoli GAE CAE sarebbero uguali (*Assiom.* 7), ed il tutto riuscirebbe uguale alla parte; ciò ch' è impossibile (*Assiom.* 6); il che ec.

PROPOSIZIONE 20.

L'angolo, ch' è al centro del cerchio, è doppio dell'angolo che è alla circonferenza, quando hanno la medesima circonferenza per base.

Dai punti A B (*Fig.* 81) dell' arco AB si conducano due raggi al centro C, e due linee a qualche punto D E F della circonferenza DEF, sarà l' angolo ACB doppio di qualsivoglia degli angoli ADB AEB AFB.

Nel triangolo CEB sono gli angoli AEB CBE uguali (5. I): ma l' angolo esterno ACB è uguale ad ambidue gl' interni opposti AEB CBE (32. I); dunque l' ACB è doppio dell' AEB. Quanto all' angolo ADB, congiunta la retta DC, e prolungata in G, sarà l' angolo GCB uguale a' due interni tra loro uguali CDB CBD, e però è doppio il GCB del CDB. Così l' angolo GCA sarà doppio del CDA, uguagliando ancor esso li due interni tra loro uguali CDA CAD; dunque il rimanente ACB è doppio del rimanente ADB. Se poi nell' angolo AFB la retta FC prolungata in H seghi l' angolo centrale ACB, tanto sarà l' esterno ACH doppio dell' interno AFC, quanto il rimanente HCB doppio del CFB; dunque tutto l'angolo ACB sarà pure doppio dell' angolo intiero AFB; il che ec.

PROPOSIZIONE 21.

Gli angoli nello stesso segmento, è insistenti sul medesimo arco, sono tra loro uguali.

Gli angoli ADB AEB AFB (*Fig.* 81), che sono nello stesso segmento AFEDB, ed insistenti sul medesimo arco AB, sono tra loro uguali.

Imperocchè ciascuno di essi è la metà dell' angolo ACB fatto al centro (20. III): dunque riescono tra loro uguali.

PROPOSIZIONE 22.

Ogni quadrilatero inscritto in un circolo ha gli angoli opposti uguali a due retti.

Sia il cerchio ADEB (*Fig.* 82), e sia in esso inscritto il quadrilatero ABCD: dico, che gli angoli di esso opposti sono uguali a due retti.

Si conducano le diagonali AC BD. Sarà l' angolo ABD uguale all' angolo ACD (21. III), e l' angolo DBC uguale all' angolo DAC: dunque tutto l' angolo ABC uguaglia li due DCA DAC; e posto comune l'angolo ADC, sono li due angoli opposti ABC ADC del detto quadrilatero uguali a tutti tre gli angoli del triangolo ADC, i quali sono uguali a due retti (32. I). Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 23.

Sopra la stessa retta non possono essere descritti verso la medesima parte due segmenti simili, e disuguali.

Sulla retta AC (*Fig.* 83) non si possono costituire dalla medesima parte due segmenti simili e disuguali ADC ABC.

Mercecchè condotta da un termine C dell'AC la retta CBD, segante le due circonferenze in B D, e congiunte all' altro termine A le rette BA DA; se fossero i segmenti simili, sarebbero gli angoli ADC ABC uguali (*Defin.* 9): il che è impossibile, essendo l' uno esterno, l'altro interno opposto

del triangolo ADB (16. I): dunque non possono tali segmenti essere simili .

PROPOSIZIONE 24.

Simili porzioni di cerchj, descritte sopra linee uguali tra loro, sono porzioni uguali .

Le simili porzioni di cerchj ADC BEF (*Fig.* 84) siano descritte sopra linee uguali AC BF: dico che la porzione ADC è uguale alla porzione BEF .

Altrimenti soprapponendosi l' una all' altra , e adattandosi la base AC all' altra uguale BF, riuscirebbero sopra la stessa linea descritti due segmenti simili e disuguali , il che è impossibile (23.III); dunque è necessario , che dette porzioni sieno uguali ; il che ec.

PROPOSIZIONE 25. PROBL.

Data una porzione di cerchio , trovarne il centro per poter compire tutto il circolo .

Sia data la porzione EAF (*Fig.* 85) d' un cerchio : bisogna trovarne il centro , per compir tutto il circolo .

Divisa la corda EF pel mezzo in D, le si conduca la perpendicolare DH; e tirata altra qualsivoglia corda EA , dentro la stessa porzione , dividasi per mezzo in B ; e le si conduca la perpendicolare BC concorrente in C con l'altra DH . Dico essere C il centro ricercato; di maniera che congiunta la CE, si potrà con questo raggio compire il cerchio EAH; dovendo essere il centro di questo circolo in qua-

lunque di dette perpendicolari seganti per mezzo le corde EF EA (1. III. *coroll.*), e però nel loro concorso C; il che ec.

PROPOSIZIONE 26.

Ne' cerchi uguali gli angoli uguali fatti al centro, o fatti alla circonferenza, insistono ad archi uguali.

Siano cerchj uguali gli AKBD EIFH (*Fig.* 86), e ai centri loro siano gli angoli uguali ACB EGF, e alle circonferenze siano gli uguali angoli ADB EHF: dico, che gli archi AKB EIF, ai quali insistono, sono uguali fra loro.

Si conducano le corde AB EF; queste saranno uguali, essendo basi di due triangoli ACB EGF, che intorno gli angoli uguali C G hanno i lati uguali CA GE, CB GF (4. I): dunque essendo le rette AB EF uguali, ed i segmenti ADB EHF simili per l'uguaglianza degli angoli in essi contenuti (*Defin.* 9), onde sono porzioni di cerchio uguali (24. III); però ancora i rimanenti archi AB EF sono uguali; il che ec.

PROPOSIZIONE 27.

Ne' cerchj uguali gli angoli fatti sopra archi uguali, al centro, od alla circonferenza, saranno uguali.

Siano cerchj uguali gli AKBD EIFH (*Fig.* 86); e gli angoli ACB EGF ai centri loro, e gli angoli ADB EHF alle loro circonferenze insistano sopra

gli archi uguali AKB EIF; dico che l'angolo ACB è uguale all'angolo EGF, e l'angolo ADB all'angolo EHF.

Imperocchè se non fosse l'angolo ACB uguale all'EGF, suppongasi uguale all'EGI: dunque sarebbe l'arco AKB uguale all'EI (26.III), e non all'EIF, contro l'ipotesi: pertanto sono uguali gli angoli ACB EGF al centro, e così ancora gli altri ADB EHF fatti alla circonferenza (20.III), di cui sono doppj quegli altri fatti al centro. Il che ec.

PROPOSIZIONE 28.

Le corde uguali in cerchj uguali ne segano archi uguali, il maggiore al maggiore, ed il minore al minore.

Le corde uguali AB EF (*Fig.* 86) ne' cerchj uguali AKBD EIFH ne segano archi uguali, il maggiore ADB al maggiore EHF, ed il minore AKB al minore EIF.

Gli angoli ACB EFG al centro saranno uguali, essendo i lati, e le basi uguali in tali triangoli (8. I); dunque l'arco AB sarà uguale all'altro EF (26. III), e però ancora il rimanente ADB al rimanente EHF; il che ec.

PROPOSIZIONE 29.

Nei cerchj uguali sono gli archi uguali segati da corde uguali.

Ne' cerchj uguali AKBD EIFH (*Fig.* 86) si sot-

tendano agli archi uguali AKB EIF le corde AB EF : dico che le AB EF sono uguali .

Essendo gli archi AKB EIF uguali , ancora gli angoli al centro ACB EGF saranno uguali (27.III). Dunque per esser uguali i lati di detti triangoli , le basi pure AB EF sono uguali ; il che ec.

PROPOSIZIONE 30. PROBL.

Dato un arco circolare dividerlo pel mezzo .

Sia AEB (*Fig*. 87) il dato arco circolare : bisogna dividerlo per mezzo .

Si divida la corda AB pel mezzo in D , e vi si alzi la perpendicolare DE : dico , che questa segherà l' arco pel mezzo in E . Poichè giunte le rette AE BE saranno basi uguali de' triangoli ADE BDE , in cui il lato DE è comune , ed i lati AD BD sono uguali intorno ad angoli retti (4. I) : ma le corde uguali in cerchj uguali , e però ancora nel medesimo cerchio , corrispondono ad archi uguali (28. III) . Dunque sono uguali gli archi AE BE , ne' quali è diviso l' arco dato AEB dalla retta DE . Il che ec.

PROPOSIZIONE 31.

L' angolo fatto nel semicircolo è retto ; l' angolo fatto nel maggiore segmento è acuto ; e l' angolo fatto nel segmento minore è ottuso .

L' angolo ADB (*Fig*. 88) fatto nel semicircolo BEA è retto ; l' angolo BAD nel maggior segmento BFAD è acuto; e l' angolo BED nel segmento minore BED è ottuso .

Congiunta al centro la retta DC, e prolungata all' altra parte del circolo in F, essendo tanto l'angolo ACF doppio dell' ADF, che l' angolo FCB doppio dell'FDB (20. III), saranno gli angoli ACF FCB doppj dell' angolo ADB: ma que' due sono uguali a due retti (13. I); dunque quest' angolo fatto nel semicircolo è retto. Quindi nel triangolo ADB l' angolo A, che è descritto nel segmento maggiore BFAD è acuto, essendo l' altro ADB retto (17. I). E perchè nel quadrilatero BEDA i due angoli opposti BAD BED sono uguali a due retti (22 III), essendo il BAD acuto, l'altro BED nel segmento minore sarà ottuso. Il che ec.

PROPOSIZIONE 32.

Se in uno stesso punto della circonferenza una retta tocca il cerchio, e un' altra lo sega; l' angolo della tangente e della segante uguaglia quello, che si descriverebbe nell' alterno segmento.

Se nello stesso punto B (*Fig.* 89) della circonferenza BEDA la retta GH tocca il cerchio, e la BD lo sega: l' angolo della tangente e della segante uguaglia quello, che si descriverebbe nell' alterno segmento, cioè l' angolo DBH è uguale all' angolo, che si costituisce nel segmento DAB, e l' angolo DBG a quello che si costituisce nel segmento DEB.

Si tirino le rette BE ED, pel centro C la linea BCA, e congiungasi l' AD; sarà l' angolo CBH retto (18. III), ed essendo ancora retto nel semicircolo l' angolo ADB (31. III), gli altri due ABD BAD

BAD saranno uguali pure ad un retto (32. I), e però uguali a' due ABD DBH ; dunque tolto il comune ABD, rimane l' angolo BAD uguale al DBH. E perchè l' angolo BED con l' opposto BAD del quadrilatero ADEB uguaglia due retti (22. III), come ancora il DBH col DBG compisce due retti (13. I) ; sarà l' angolo BED uguale al DBG . Il che ec.

PROPOSIZIONE 33. PROBL.

Sopra una data retta descrivere una porzione di circolo, la qual riceva un angolo uguale a un dato .

Sia data la retta BD (*Fig.* 90), e l' angolo dato sia l' F : bisogna sopra la BD descrivere una porzione di circolo, la qual riceva un angolo uguale al dato F .

Si faccia l'angolo DBH uguale all' angolo F (23. I) , e divisa la BD pel mezzo in E, si alzi l' EC perpendicolare ad essa , e dal punto B si tiri pure la BA perpendicolare alla BH; e convenendo queste due perpendicolari nel punto C , col raggio CB descrivasi un cerchio, che passerà ancora pel punto D, essendo la congiunta CD uguale alla CB , per essere basi de' triangoli rettangoli CED CEB, ne' quali il lato EC è comune, ed i lati ED EB uguali ; e sarà esso circolo toccato dalla BH (16. III) ; però l' angolo DBH , cioè il dato F , per la costruzione, sarà uguale all' angolo DAB (32. III), che si costituisce nel segmento alterno BAD . Il che ec.

PROPOSIZIONE 34. PROBL.

Da un dato cerchio tagliare una porzione capace d' un angolo uguale a un dato.

Sia il dato cerchio ADB (*Fig.* 90), e il dato angolo l' F: bisogna dal cerchio ADB togliere una porzione capace d' un angolo uguale al dato F.

Si tiri la retta BH, che tocchi in B il dato cerchio, e si faccia l' angolo HBD uguale al dato F; è manifesto, che la porzione BAD sarà capace dell' angolo dato (33. III). Il che ec.

PROPOSIZIONE 35.

Se dentro al cerchio due corde si segano, il rettangolo delle parti dell' una uguaglia quello delle parti dell' altra.

Nel cerchio AEBG (*Fig.* 91) si seghino in F le due rette AB EG: dico, che il rettangolo delle parti dell' una uguaglia quello delle parti dell' altra, cioè il rettangolo AFB è uguale al rettangolo EFG.

Se si segassero nel centro, sarebbe ciò manifesto, essendo le parti di tali linee tanti raggi uguali del medesimo cerchio; ma essendo il loro concorso F diverso dal centro C, si tirino da esso centro C le perpendicolari CD CH sopra dette linee, che da queste saranno segate pel mezzo (3. III), e si congiungano le CF CE CB. Il rettangolo AFB col quadrato della DF sarà uguale al quadrato della DB (5. II); e posto comune il quadrato della

CD, sarà il rettangolo AFB con i due quadrati delle DF CD, cioè col quadrato della CF (47. I), uguale ai due quadrati delle DB CD, cioè al quadrato del raggio CB, o dell' altro raggio CE; e questo pure essendo uguale a' quadrati delle EH CH, come al rettangolo EFG col quadrato della FH (5. II e 3. III), e col quadrato della CH, che è quanto dire al rettangolo EFG col quadrato della CF; sarà dunque il rettangolo AFB col quadrato della CF uguale al rettangolo EFG col medesimo quadrato della CF: onde tolto il comune quadrato della CF, rimane il rettangolo AFB uguale all' altro EFG, Il che ec.

PROPOSIZIONE 36.

Da un punto fuori del cerchio tirata una tangente, ed una segante, sarà il quadrato della tangente uguale al rettangolo di tutta la segante, e della sua parte esteriore.

Dal punto F (*Fig.* 92) fuori del cerchio AIHE tirata la tangente FH ed una segante FBA; dico, che sarà il quadrato della tangente FH uguale al rettangolo AFB di tutta la segante AF e della sua parte esteriore FB.

Condotta dal centro C sopra la segante la perpendicolare CD, che dividerà per mezzo la parte interna AB (3. III), e congiunti i raggi CB CH; essendo il quadrato della FD uguale al rettangolo AFB col quadrato della BD (6. II); aggiuntovi il quadrato della CD, saranno i due quadrati delle FD CD, cioè il quadrato della CF, o i due quadrati delle FH CH (47. I) (essendo l' angolo CHF

retto (18. III)) uguali al rettangolo AFB, co' quadrati delle BD CD, cioè col quadrato del raggio CB. Essendo adunque il quadrato della tangente FH col quadrato del raggio CH uguale al rettangolo AFB col quadrato del raggio CB; tolti gli uguali quadrati di detti raggi, rimane il quadrato della tangente FH uguale al rettangolo AFB da tutta la segante FA e dalla parte esterna FB; il che ec.

Corollario 1. Quindi se da un medesimo punto F si tireranno due tangenti FH FI al medesimo circolo, queste saranno uguali, essendo ciascheduno de'loro quadrati uguale al medesimo rettangolo AFB della segante condotta dallo stesso punto F, e della sua parte esterna.

Corollario 2. E se più seganti FBA FGE si conducano da un punto F allo stesso cerchio, saranno i rettangoli AFB EFG tra loro uguali, essendo ciascheduno di essi uguale al quadrato della tangente FH.

PROPOSIZIONE 37.

Se il rettangolo d' una segante e della sua parte esteriore sia uguale al quadrato d' una retta condotta alla periferia del circolo dal punto d' origine della segante, la retta sarà tangente il cerchio.

Nel cerchio AIHE (*Fig.* 92), se il rettangolo compreso dalle AF FB sarà uguale al quadrato della retta FI condotta al cerchio dal punto d' origine F della segante AF, dico che la FI è tangente il cerchio AIHE.

Imperocchè tirata la tangente FH, il cui quadrato uguaglia il rettangolo AFB (36. III), e però ancora è uguale al quadrato della FI, conseguentemente saranno le rette FH FI uguali. Condotti i raggi CH CI sono pure uguali; e congiunta al centro la retta FC, è questa lato comune a' due triangoli FHC FIC; dunque l' angolo FIC uguaglia l' angolo FHC (8. I); il quale è retto (18. III): pertanto essendo pure l' angolo FIC retto, questa FI sarà tangente (16. III. *coroll.*). Il che dovea dimostrarsi.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO QUARTO.

DEFINIZIONI.

La figura rettilinea si dice *Inscritta* nella figura rettilinea, quando ciascun angolo della figura inscritta tocca ciascun lato della figura, nella quale è inscritta.

II. Similmente si dice la figura rettilinea esser *Circoscritta* alla figura rettilinea, quando ciascun lato della figura circoscritta tocca ciascun angolo della figura, a cui è circoscritta.

III. Dicesi *Inscritta* nel circolo una figura rettilinea, quando ciascun angolo di essa tocca la circonferenza.

IV. Ed allora il cerchio dicesi *Circoscritto* ad essa figura rettilinea.

V. *Circoscritta* poi al cerchio dicesi la figura rettilinea, se ciascun lato di essa tocca la di lui circonferenza.

VI. Ed in tal caso dicesi il cerchio *Inscritto* in detta rettilinea figura.

VII. La linea retta si dice inscriversi nel cerchio, quando i suoi termini sono nella circonferenza del cerchio.

PROPOSIZIONE 1. PROBL.

In un dato cerchio inscrivere una retta uguale ad una data, non maggiore del diametro di esso.

Sia ADB (*Fig.* 93) il dato cerchio, il cui diametro AB, ed F la data retta, non maggior dell' AB: bisogna nel cerchio ADB inscrivere una retta uguale alla data.

Col centro A, e l' intervallo AE uguale all' F descrivasi un altro cerchio, che seghi in D quello già dato. È chiaro, che congiunta l'AD sarà uguale al raggio AE, e però alla data F. Il che dovea farsi.

PROPOSIZIONE 2. PROBL.

Nel dato cerchio inscrivere un triangolo equiangolo ad un altro dato.

Sia il dato cerchio l' ABD (*Fig.* 94), e il triangolo dato l' IGH: bisogna nel cerchio ABD inscrivere un triangolo equiangolo all' IGH.

Si tiri al cerchio in qualche punto A la tangente EAF (17. III), e si faccia l' angolo FAD uguale all' angolo IGH, e l'angolo EAB uguale all' altro IHG, e congiungansi i punti D B, in cui queste rette segano il cerchio, con la retta DB. Dico, che il triangolo ABD sarà il ricercato: imperocchè l' angolo ABD uguaglia l' angolo DAF (32. III), e però è uguale all' angolo IGH; l' angolo ADB uguaglia l'angolo EAB, e però è uguale all'

angolo GHI; dunque ancora il terzo BAD uguaglia il terzo GIH (32. I); sicchè tutto il triangolo ABD inscritto nel circolo è equiangolo al dato triangolo IGH. Il che ec.

PROPOSIZIONE 3. PROBL.

A un dato cerchio circoscrivere un triangolo equiangolo ad un altro dato.

Sia ABD (*Fig.* 95) il dato cerchio, ed IHK il dato triangolo: bisogna al cerchio ABD circoscrivere un triangolo equiangolo al dato IHK.

Prolungato uno de' lati HK dall' una, e dall' altra parte in M L, si faccia al centro C del dato cerchio l' angolo ACD uguale all'angolo IKL, indi l'angolo DCB uguale all' altro esterno IHM; poi si tirino a'punti A D B le tangenti AG DE BF, le quali concorreranno e formeranno un triangolo EFG circoscritto al cerchio, ed equiangolo a quello dato. Imperocchè congiunta la BD, per esempio, riescono gli angoli BDE DBE minori dei due retti CDE CBE fatti dal raggio colle tangenti, le quali però concorrono insieme (*Assiom.* 8). Perchè poi tanto gli angoli del triangolo BCD, che quelli dell'altro BED sono uguali (32. I) a due retti, gli angoli del quadrilatero CBED, uguagliano quattro retti; ed essendo i due CDE CBE retti, saranno gli altri due BCD BED uguali a due retti, e però uguali a' due angoli IHM IHK: ma l' angolo BCD fu fatto uguale all' IHM; dunque l' altro BED è uguale all' IHK. Similmente essendo gli angoli ACD AGD uguali a due retti, e però

agli altri due IKL IKH ; ed essendosi fatto l'ACD uguale all' IKL ; l' altro AGD è uguale all' IKH ; per il che anche il terzo AFB uguaglia il terzo HIK . Sarà dunque il triangolo EFG circoscritto al dato cerchio ed equiangolo al dato triangolo IHK . Il che ec.

PROPOSIZIONE 4. PROBL.

In un dato triangolo inscrivere un cerchio .

Sia EFG il dato triangolo (*Fig.* 96) : bisogna nel triangolo EFG inscrivere un cerchio .

Si dividano pel mezzo gli angoli FEG FGE colle rette EC GC concorrenti in C , e da esso punto C si tirino le perpendicolari CA CB CD sopra a' tre lati del triangolo EFG ; saranno queste uguali , perchè ne' triangoli CED CEB essendo gli angoli DEC BEC uguali , ed ancora i retti CDE CBE uguali, ed il lato EC comune ; ancora gli altri lati CB CD sono uguali (26. I) : e così ancora ne' triangoli CDG CAG si proverà la CD uguale alla CA . Dunque tutte tre le dette perpendicolari sono uguali ; onde col centro C , e con l' intervallo CA descritto un cerchio passerà per i punti A B D , e sarà toccato da' lati di questo triangolo FEG , che sono rispettivamente ad angoli retti a' raggi CA CB CD (16. III) : e però sarà inscritto detto circolo nel dato triangolo . Il che ec.

PROPOSIZIONE 5. PROBL.

Ad un dato triangolo circoscrivere un circolo .

Sia ABD (*Fig.* 97) il dato triangolo: bisogna al triangolo ABD circoscrivere un cerchio.

Si taglino pel mezzo i due lati AB BD ne' punti E F, e si alzino perpendicolari ad essi le EC FC, concorrenti in C; e congiunto il punto C con tutti tre gli angoli A B D, il cerchio descritto con qualunque de' raggi CA CB CD, i quali saranno uguali, sarà circoscritto al dato triangolo. Imperocchè essendo l' AE uguale all' EB, e l' EC comune a' triangoli rettangoli AEC BEC, la base CA sarà uguale alla CB; e similmente ne' triangoli BFC DFC, per essere uguali, ed intorno ad angoli retti, i lati BF FC DF FC, la CB sarà uguale alla CD (4. I); dunque il cerchio passa per li punti A B D, e però è circoscritto al dato triangolo ADB. Il che era da farsi.

PROPOSIZIONE 6. PROBL.

In un dato cerchio inscrivere un quadrato.

Sia AEBD (*Fig.* 98) il dato cerchio: bisogna in esso inscrivere un quadrato.

Si tirino pel centro C due diametri AB DE, che ad angoli retti si seghino in esso centro, e si congiungano le rette AE AD BE BD; dico, che il quadrilatero AEBD sarà il quadrato inscritto nel dato cerchio. Imperocchè di tutti i triangoli ACE ACD BCE BCD tutti i lati intorno agli angoli retti sono uguali; e però le basi loro AE AD BE BD parimente si uguagliano (4. I); e gli angoli AEB EBD BDA DAE essendo ne' semicircoli, sono retti (31. III); dunque il quadrilatero AEBD è il

quadrato (*Defin.* 29), che dovea inscriversi nel cerchio dato.

PROPOSIZIONE 7. PROBL.

A un dato cerchio circoscrivere un quadrato.

Sia AEBD (*Fig.* 99) il dato cerchio: bisogna ad esso circoscrivere un quadrato.

Tirati, come nella precedente, i diametri AB DE, che nel centro C si seghino ad angolo retto, si tirino per li punti A B le FI GH parallele al diametro DE, e per li punti D E le FG HI parallele al diametro AB; queste parallele faranno a' termini de' diametri angolo retto (29. I), e però saranno tangenti (16. III); e tutti i lati GH HI IF FG saranno uguali al diametro del cerchio, e però uguali tra loro: gli angoli pure G H I F, in cui convengono esse tangenti, saranno retti, perchè nel parallelogrammo FABG l' angolo G uguaglia l' opposto FAC (34. I), che è retto; l' angolo F uguaglia l' angolo opposto GBC, che pure è retto; e così nel parallelogrammo ABHI si mostrano pure gli altri angoli H I essere retti; dunque l'FIHG è un quadrato circoscritto al dato cerchio, come era proposto di farsi.

PROPOSIZIONE 8. PROBL.

In un dato quadrato inscrivere un cerchio.

Sia il dato quadrato l' FGHI (*Fig.* 99): bisogna in esso inscrivere un cerchio.

Dividansi pel mezzo i lati ne' punti A E B D,

e condotte le rette AB ED, che si segheranno in C, e saranno parallele a' detti lati, congiungendo i termini di linee parallele ed uguali (33. I): però tutte le rette CA CE CB CD, uguagliando la metà de' lati di esso quadrato, saranno uguali fra loro; onde col centro C, e con uno di questi raggi CA descritto un cerchio, passerà per gli altri punti E B D, e rimarrà toccato da' lati di esso quadrato, essendo qualunque angolo BAI CEH ec. retto, come uguale all' angolo H, ovvero al G, opposti ne' parallelogrammi ABHI DEHG ec. (34. I). Dunque il detto circolo riesce inscritto nel dato quadrato; il che ec.

PROPOSIZIONE 9. PROBL.

Ad un dato quadrato circoscrivere un cerchio.

Sia il dato quadrato l' AEBD (*Fig.* 98): bisogna ad esso circoscrivere un cerchio.

Si tirino le diagonali AB DE concorrenti in C; e perchè qualunque triangolo AEB EBD BDA DAE è isoscele per l' uguaglianza de' lati del quadrato, tutti gli angoli BAE EBA ecc. sono uguali (5. I) tra loro, e sono semiretti, essendo retto l' angolo AEB, e gli altri due uguali ad un altro retto (32. I). Dunque tutti gli angoli semiretti CAE CEA CEB CBE CBD CDB GDA CAD essendo uguali, le rette CA CE CB CD pure sono uguali (6. I); e però fatto centro in C, con l' intervallo CA descritto un cerchio passerà per li punti A E B D; onde sarà questo il cerchio, che dovea circoscriversi al dato quadrato.

PROPOSIZIONE 10. PROBL.

Costruire un triangolo isoscele, li cui angoli alla base sieno ciascuno il doppio dell' angolo al vertice.

Dividasi una retta AB (*Fig.* 100) nel punto D, in maniera che il rettangolo ABD uguagli il quadrato della AD (11. II), e col raggio AB descritto un circolo BEF, s' inscriva in esso dal punto B una retta BE uguale all' AD, e si congiunga l'AE; sarà il triangolo ABE isoscele, per l' uguaglianza de' raggi. Tirata la ED, e circoscritto un cerchio al triangolo ADE, sarà la BE tangente, per essere il di lei quadrato, come quello dell' AD, uguale al rettangolo ABD (37. III); e però l' angolo DEB sarà uguale all' angolo EAD (32. III). Dunque posto comune l' angolo DEA, sarà l' angolo AEB uguale a' due angoli EAD DEA, cioè all' angolo esterno BDE (31. I): ma ancora l' angolo ABE uguaglia l' angolo AEB (5. I); dunque gli angoli BDE ABE sono uguali, e però il lato DE uguaglia il lato EB (6. I), cioè il lato AD: dunque ancora l' angolo DEA uguaglia l' angolo EAD (5. I); e però sarà l' angolo AEB doppio dell' angolo EAB. Il che ec.

PROPOSIZIONE 11. PROBL.

In un dato cerchio inscrivere un Pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia DFGHI (*Fig.* 101) il dato cerchio: bisogna

in esso inscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo .

Fatto un triangolo isoscele ABE , di cui ciaschedun angolo sopra la base sia il doppio dell' angolo A al vertice (10. IV) , si inscriva nel cerchio il triangolo DGH equiangolo allo stesso ABE (2. IV) : poi divisi pel mezzo ambi gli angoli alla base DGH DHG colle linee GI HF (9. I) , si congiungano le rette GF FD DI IH . Dico , che queste con la GH costituiscono un Pentagono equilatero , ed equiangolo inscritto nel dato circolo . Imperocchè ciascuno degli angoli alla base HG di quel triangolo DHG , equiangolo all' ABE , essendo il doppio dell' angolo GDH , divisi quelli pel mezzo , ne riusciranno uguali tutti li cinque angoli DGI IGH GHF FHD GDH ; e però gli archi , sopra di cui essi angoli insistono , saranno uguali (26. III) ; e così ancora le rette a detti archi sottese DI IH HG GF FD ; onde questo Pentagono è equilatero : ed essendo l' arco DI uguale all' arco FG, posto comune l' arco IHG , sarà l' arco DIHG uguale all' arco IHGF ; e però l' angolo DFG uguale all' angolo FDI (27. III) , e così degli altri : dunque esso Pentagono è ancora equiangolo ; il che ec.

PROPOSIZIONE 12. PROBL.

Ad un dato cerchio circoscrivere un Pentagono equilatero , ed equiangolo .

Sia IFH (*Fig.* 102) il dato cerchio : bisogna ad esso circoscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo.

Si inscriva nel cerchio il pentagono IDFGH (*prop. prec.*), e dal centro C condotti a qualunque angolo i raggi CI CD CF ec. si tirino a' medesimi le perpendicolari AB BE EK KL LA, che saranno tangenti il circolo. Dico essere il poligono da esse compreso un pentagono equilatero ed equiangolo, circoscritto al cerchio. Imperocchè essendo le AI AH tangenti, saranno uguali (36. III. *coroll.*); ed essendo uguali i raggi CI CH, e retti gli angoli CIA CHA, congiunta la CA, sarà l'angolo ACI uguale all' ACH, e l' IAC uguale all' HAC (4. I); dunque congiunta ancora la CB, si proverà similmente l' angolo BCD uguale al BCI, e l' angolo DBC uguale all' IBC; pertanto l'ACI è la metà dell' HCI, e l'IAC la metà dell'IAH, e parimente il BCI è la metà dell' ICD, e l'IBC la metà dell' IBD; onde essendo l' angolo HCI uguale all' ICD per l' uguaglianza de' lati HI ID (28. III), sarà l' angolo ACI uguale al BCI, ed essendo retti gli angoli AIC BIC, e comune il lato IC a' triangoli ACI BCI, gli altri lati, e gli altri angoli saranno uguali; però l' AI essendo uguale all' IB, il lato AB è doppio dell' AI. Similmente si proverà il lato AL esser doppio dell' AH; dunque essendo l' AI uguale all' AH, ancora l' AB sarà uguale all' AL; e così tutti i lati si proveranno uguali, ed essendo l' angolo CBI uguale al CAI, anche i loro doppj DBI HAI saranno uguali, e così tutti gli altri angoli di questo pentagono; il quale sarà equilatero, ed equiangolo, circoscritto al dato cerchio, come dovea farsi.

Corollario. Nella stessa maniera, qualunque fi-

gura equilatera, ed equiangola sia inscritta nel cerchio, tirate da qualsivoglia angolo le tangenti, si proverà essere similmente la figura circoscritta equilatera, ed equiangola.

PROPOSIZIONE 13. PROBL.

In un dato pentagono equilatero, ed equiangolo inscrivere un circolo.

Sia ABEKL (*Fig.* 102) il dato pentagono equilatero ed equiangolo: bisogna in esso inscrivere un circolo.

Si dividano pel mezzo i due angoli prossimi LAB ABE (9. I.) colle rette AC BC concorrenti in C, e da esso punto C si tirino sopra ciascheduno lato le perpendicolari CH CI CD CF CG; queste saranno uguali, e però descritto il cerchio col raggio CH passerà per tutti i punti H I D F G, e sarà toccato dai lati del dato pentagono, cui sono perpendicolari essi raggi; onde gli sarà inscritto. Imperocchè nei triangoli ABC CBE essendo uguali i lati AB BE, ed il lato BC comune, e gli angoli ABC CBE uguali, sarà la CA uguale alla CE, e l' angolo CEB uguale al CAB, e però ancor esso la metà dell' angolo BEK. Similmente ne' triangoli CAB CAL si proverà la CL uguale alla CB, e l' angolo CLA uguale al CBA, e però ancor esso la metà dell' angolo ALK; e così pure sarà della retta CK, diviso pel mezzo l' angolo EKL; e paragonando i triangoli HAC IAC, in cui l'angolo CAH uguaglia il CAI. e gli angoli ne' punti H I son retti, ed il lato AC comune, gli altri lati CH CI saran-

ranno uguali, e parimente si proverà la CI uguale alla CD, e la CF uguale alla CD, e la CG uguale alla CF: dunque tutte queste perpendicolari sono raggi uguali, e però il cerchio passa per tutti quei punti, e riesce inscritto al dato pentagono, come dovea farsi.

Corollario. Così in qualunque figura equilatera, ed equiangola divisi pel mezzo due angoli prossimi, e dal concorso delle linee dividenti condotte le perpendicolari a' lati riescono uguali, e condotte agli altri angoli dello stesso concorso altre rette, sono tutte uguali, e dividono pel mezzo gli altri angoli, come si è provato in questo pentagono, onde al medesimo modo gli si può inscrivere un cerchio.

Proposizione 14. Probl.

A un dato pentagono equilatero, ed equiangolo circoscrivere un cerchio.

Sia IHGFD (*Fig.* 102) il dato pentagono equilatero ed equiangolo: bisogna ad esso circoscrivere un cerchio.

Divisi per mezzo due angoli prossimi colle rette IC HC concorrenti in C, le linee condotte dal punto C a tutti gli altri angoli saranno uguali (*cor. prec.*). Dunque col raggio CI descritto il cerchio HIDFG passerà per tutti li detti angoli, e sarà circoscritto al dato pentagono. Il che ec.

Corollario. Nella stessa maniera potrà circoscriversi un cerchio a qualunque altra figura equilatera, ed equiangola.

PROPOSIZIONE 15. PROBL.

In un dato cerchio inscrivere un Esagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato cerchio l'AEF (*Fig.* 103): bisogna in esso inscrivere un esagono equilatero ed equiangolo.

Condotto un diametro AD pel centro C, si applichino nel cerchio le due corde AB AG uguali al raggio AC (1. IV), e congiunte al centro le rette BC GC si prolunghino alla periferia sino ai punti F E; indi tirate le BE ED GF FD, rimarrà inscritto nel cerchio un esagono equilatero, ed equiangolo. Perchè essendo i triangoli ABC AGC equilateri, ciascuno degli angoli di essi ACG ACB sarà un terzo di due retti; onde ancora il BCE, che con gli altri due compisce due retti, sarà un altro terzo di due retti; e però saranno uguali i detti tre angoli, come gli opposti al loro vertice ECD DCF FCG (*15.* I): quindi tutti gli archi opposti a detti angoli, e le rette ad essi sottese sono uguali (26 e 19. III); dunque l' ABEDFG è un esagono equilatero, ed ancora equiangolo, perchè gli angoli GAB ABE BED ec. insistono a quegli archi uguali.

Corollario. Da ciò è manifesto, che il lato dell' esagono è uguale al semidiametro del cerchio.

E se per li punti A B E D F G condurremo linee, che tocchino il cerchio, sarà circoscritto al cerchio un esagono equilatero ed equiangolo, al modo stesso che del pentagono s' è detto; e in simil ma-

niera ancora nel dato esagono inscriveremo, e ad esso circoscriveremo un circolo.

PROPOSIZIONE 16. PROBL.

In un dato cerchio inscrivere un quindecagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato cerchio AEHD (*Fig.*104): bisogna in esso inscrivere un quindecagono equilatero ed equiangolo.

Inscrivasi nel dato cerchio il lato AE (2. IV) del triangolo equilatero, e il lato AF del pentagono equilatero (11. IV) inscritti in esso. Dunque delle quindici parti della circonferenza ne conterà cinque l'arco AE, e tre sole l'arco AF, e nel residuo FE vi saranno due di dette parti quintedecime; onde diviso l'arco FE pel mezzo in K (30.III). saranno le EK KF parti quintedecime, ed applicando intorno alla circonferenza linee rette uguali a ciascheduna delle corde EK KF, sarà compiuto il quindecagono equilatero, ed equiangolo; insistendo qualunque angolo FKE di esso sopra tredici di quelle quintedecime parti.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO QUINTO.

DEFINIZIONI.

Parte Aliquota si chiama una grandezza minore di un' altra grandezza maggiore, quando quella misura questa esattamente.

II. *Moltiplice* si dice poi questa maggior grandezza di quella minore, da cui alquante volte è misurata.

III. *Proporzione*, o talvolta *Ragione* (*), si dice la relazione di due grandezze del medesimo genere in ordine alla loro quantità, comparate l' una con l' altra.

IV. *Proporzionalità* ovvero *Analogia* dicesi la somiglianza di alcune Proporzioni.

V. Quelle grandezze si dicono *aver proporzione*, le quali moltiplicate possono superarsi l' una con l' altra.

VI. Si dice *simile*, ovvero *uguale*, anzi la *medesima* essere la *Proporzione* di una prima grandezza ad una seconda, e quella di una terza ad

(*) I Moderni usano *ragione*.

una quarta, quando prese due ugualmente moltiplici della prima e della terza, ed altre due, secondo qualunque numero, ugualmente moltiplici della seconda e della quarta, se il moltiplice della prima uguaglia il moltiplice della seconda, o sia maggiore di esso, o minore; parimente il moltiplice della terza uguagli il moltiplice della quarta, o sia rispettivamente maggiore, o minore di esso.

VII. E queste grandezze, che avranno simile proporzione, si chiameranno *Proporzionali*.

VIII. Ma se il moltiplice della prima superasse il moltiplice della seconda, e l' ugualmente moltiplice della terza come quello della prima, non eccedesse quello della quarta, ugualmente moltiplice come l' altro della seconda; si dirà la *Proporzione* della prima grandezza alla seconda *maggiore* di quella della terza alla quarta.

IX. La *Proporzionalità*, o *Analogia* dee consister in tre termini, di cui il medio si prende due volte, una per conseguente della prima proporzione, l' altra per antecedente della seconda ch' è uguale alla prima.

X. Quando tre grandezze saranno proporzionali, la prima alla terza si dirà avere *duplicata Proporzione* di quella, che è tra la prima e la seconda; o dell'altra uguale, che è tra la seconda e la terza.

XI. Se saranno quattro grandezze continuamente proporzionali, avrà la prima alla quarta *Triplicata Proporzione* di quella, che ha la prima alla seconda, o la seconda alla terza, o la terza alla quarta. Se saranno cinque, la prima all' ultima avrà *Proporzione Quadruplicata* di quella, che

ha la prima alla seconda, e di qualunque altra intermedia; e così sempre crescendo i termini, la proporzione dell' estreme è moltiplice di quella di due prossime, secondo il numero di essi termini, detrattane l' unità.

XII. Delle quantità proporzionali si dicono *Omologi* gli antecedenti fra loro, ed i conseguenti pure tra loro comparati (*a*).

(*a*) Altre definizioni della Proporzione *Permutata*, *inversa*, *ec.* si omettono, perchè dalle proposizioni, che ne parlano susseguentemente, meglio s' intenderanno.

Quanto alla similitudine, o ugualità delle proporzioni, definita al num. VI, per gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, che convengono con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, secondo qualunque altra moltiplicazione, in uguagliarsi, avanzarsi, o mancarsi l' uno dall' altro; si avverta, che sebbene nelle quantità commensurabili, le quali esprimere si possono col numero delle parti uguali, che sono nell' una, e nell' altra, si può definire più chiaramente l' ugualità delle proporzioni con la definizione, che il medesimo Euclide dà nel suo Libro VII de' numeri proporzionali, a cui altra proprietà non assegna, se non che il primo sia ugualmente moltiplice del secondo, come il terzo del quarto; o la medesima parte, o altrettante parti sia qualunque antecedente del suo conseguente: tuttavolta nelle quantità incommensurabili, di cui non può assegnarsi veruna misura comune, che sia alcune volte in una, ed alquante altre volte nell' altra, non potrebbe assegnarsi tale definizione di proporzionalità; e perciò si adatta quella condizione più universale degli ugualmente moltiplici de' termini antecedenti, che convengano nell' ugualità, nell'eccesso, o nel difetto con altri ugualmente moltiplici de' conseguenti.

Le quantità, che si paragonano in proporzione, debbono essere del medesimo genere, secondo la definizione terza; onde non può paragonarsi una linea ad una superficie, o ad un corpo, nè un peso ad un tempo, nè un moto ad un suono, ec.; bensì tutte le linee fra loro, tutte le superficie tra loro, ogni corpo ad un altro, i pesi tra loro, i tempi fra loro, ec. Però non è da attendersi un genere specialissimo, e subalterno, con cui differiscono le linee rette dalle curve, e le superficie piane dalle rotonde, ec. ma solamente il genere più universale di cui

PROPOSIZIONE I.

Se siano quante si vogliano grandezze ugualmente moltiplici di altrettante ciascuna di ciascuna; quante volte è moltiplice una di una, tante volte saranno moltiplici tutte insieme l' antecedenti di tutte insieme le conseguenti.

Siano quante grandezze si vogliono AD FI LO (*Fig.* 105) ugualmente moltiplici di altrettante E K P ciascuna di ciascuna: dico, che quante volte è moltiplice una di una, cioè per esempio, l'AD della E, tante volte saranno moltiplici tutte insieme l' antecedenti AD FI LO di tutte insieme le conseguenti E K P.

Imperocchè divisa l'AD nelle parti AB BC CD uguali all' E, potrà dividersi ancora la FI in altrettante parti FG GH HI uguali alla K; e così la

allora sono le grandezze, quando qualunque di esse moltiplicata può superare l' altra, secondo la definizione quinta. Così il diametro di un cerchio, quadruplicato eccede la di lui circonferenza, e però si possono insieme paragonare una retta, ed una periferìa; anzi qualunque altra curva di diversa specie: ed una superficie piana ad una sferica, o conica; e qualsivoglia corpo prismatico a qualunque rotondo. Ma quanto alla proporzionalità, o analogìa delle proporzioni, possono essere i due primi termini dello stesso genere, e gli altri due o del medesimo, o di genere diversissimo: così può essere un corpo ad un altro nella stessa proporzione, che una linea ad un' altra linea; ovvero che una superficie ad un'altra superficie; o come un angolo rettilineo ad un altro pur rettilineo; o come un peso ad un altro peso; o come la velocità di un moto a quella di un altro ec.; e così qualunque grandezza ad un'altra grandezza dello stesso genere può paragonarsi, come un numero ad un altro numero.

LO nelle parti LM MN NO uguali alla P: dunque le AB FG LM insieme uguagliano le E K P; similmente le BC GH MN uguagliano le E K P; e così pure le CD HI NO; dunque quante volte una delle antecedenti AD è moltiplice della E, altrettante volte tutte le antecedenti AD FI LO sono moltiplici di tutte le conseguenti E K P. Il che ec.

PROPOSIZIONE 2.

Se la prima grandezza è moltiplice della seconda come la terza è moltiplice ugualmente della quarta; ed una quinta sia ancora moltiplice della seconda, come una sesta è moltiplice ugualmente della quarta; saranno la prima e la quinta insieme, ugualmente moltiplici della seconda, come la terza e la sesta insieme, sono moltiplici della quarta.

La prima grandezza AC (*Fig.* 106) sia moltiplice della seconda D, come la terza GE è moltiplice ugualmente della quarta H; e la quinta CB sia ancora moltiplice della seconda D, come la sesta GF è ugualmente moltiplice della quarta H: dico che la prima e la quinta insieme AB sono moltiplici della seconda D, come la terza e la sesta insieme EF sono moltiplici della quarta H.

Imperocchè il numero delle parti uguali alla D, che sono nella prima AC, uguagliando il numero delle parti uguali all' H, che sono nella terza EG; ed ancora il numero delle parti uguali alla D, che sono nella quinta CB, uguagliando il numero delle parti uguali all' H, che sono nella

sesta GF; però il numero delle parti uguali alla D, che sono nelle AC CB, uguaglia il numero delle parti uguali a l' H, che sono nelle EG GF; dunque l' aggregato delle AC CB ugualmente è moltiplice de la seconda D, come l' aggregato delle EG GF è moltiplice della quarta H. Il che ec.

PROPOSIZIONE 3.

Se la prima sia moltiplice del'a seconda come la terza della quarta; e si prendano poi le ugualmente moltiplici della prima e della terza; queste pure per ugualità saranno ugualmente moltiplici, una della seconda, e l'altra della quarta.

Se la grandezza B (*Fig.* 107) è moltiplice della C, come un' altra E della F, e sia l' IA moltiplice della B, come la MD della E; dico che sarà pure l' IA moltiplice della C, come l' MD della F.

Si dividano le grandezze IA MD; quella nelle parti AG GH HI uguali alla B; questa nelle parti DK KL LM uguali alla E. Essendo adunque l'AG moltiplice della C, come la DK della F; ed ancora le GH HI moltiplici della C, come le KL LM della F, sarà tutta l' AI moltiplice della C, come tutta la DM della F (2. V). Il che ec.

PROPOSIZIONE 4.

Se la prima alla seconda ha la medesima ragione che la terza alla quarta, ancora le ugualmente

moltiplici della prima e della terza paragonate con le ugualmente moltiplici della seconda e della quarta, avranno la medesima ragione fra loro.

Essendo nella stessa proporzione la A alla B come la C alla D (*Fig.*108); prese le due grandezze E F ugualmente moltiplici degli antecedenti A C, ed altre grandezze G H ugualmente moltiplici de' conseguenti B D; dico che saranno parimente proporzionali la E alla G come la F alla H.

Imperocchè prese due altre K I ugualmente moltiplici delle E F, saranno queste pure ugualmente moltiplici delle A C (3.V); e similmente prese le M N ugualmente moltiplici delle G H, saranno esse pure ugualmente moltiplici delle B D (3. V): dunque se la K uguaglia la M, ancora la I uguaglierà la N; se è maggiore, sarà maggiore; e se minore, minore. Dunque sarà la E alla G, come la F alla H. Il che ec.

Corollario. Quindi si osservi, che qualunque volta sono quattro grandezze proporzionali, ancora *invertendo*, cioè presi i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti, saranno pure proporzionali, cioè se la A sta alla B come la C alla D, sarà ancora la B alla A come la D alla C; giacchè per la definizione sesta tutti gli ugualmente moltiplici degli antecedenti A C si accordano in uguagliare, superare, o mancare dagli ugualmente moltiplici de'conseguenti B D; dunque ancora gli ugualmente moltiplici de'B D presi per antecedenti, si debbono accordare con gli ugualmente moltiplici degli A C presi per conseguenti; e però ancora invertendo sono le grandezze proporzionali.

PROPOSIZIONE 5.

Se una grandezza è moltiplice ugualmente d'un' altra, come la porzione tolta da una della porzione tolta dall' altra: sarà la rimanente moltiplice della rimanente, come tutta di tutta.

Se la grandezza AB (*Fig.* 109) è moltiplice della grandezza CD, come la parte AE, levata dalla prima, è moltiplice della parte CF, levata dalla seconda; ancora la rimanente EB sarà moltiplice ugualmente della residua FD, come tutta l' AB di tutta la CD.

Pongasi l'AG ugualmente moltiplice della FD, come l' AE della CF; dunque sarà la GE moltiplice della CD, come l' AE della CF (1. V): ma è l' AB moltiplice della CD, come l' AE della CF; dunque la GE uguaglia l' AB, e tolta la comune AE sarà l' AG uguale all' EB; dunque ancora la rimanente EB è moltiplice della residua FD, come tutta l' AB di tutta la CD, e come la parte levata AE della parte levata CF. Il che ec.

PROPOSIZIONE 6.

Se due grandezze siano ugualmente moltiplici di due altre grandezze; e da quelle sieno tolte grandezze ugualmente moltiplici di queste; le rimanenti saranno o uguali alle medesime, o di esse ugualmente moltiplici.

Se le due grandezze AB CD (*Fig.* 110) sono ugualmente moltiplici delle due E F, e da quelle

si traggano le due AG CH, ancor' esse egualmente moltiplici di queste E F, saranno le rimanenti GB HD o uguali alle medesime E F, o ugualmente moltiplici di esse.

Essendo il numero delle parti contenute nell' AB, uguali all' E, uguale al numero delle parti contenute nella CD, uguali all' F, detratto dal primo il numero delle parti E contenute nell' AG, e dal secondo il numero uguale delle parti F, contenute nella CH; il rimanente numero delle parti E contenute nella GB uguaglierà pure il numero delle parti F contenute nell'HD (*Assiom.* 2); e però se la GB è uguale all'E, contenendola una volta sola, ancora l' HD sarà uguale all' F, contenendola pure una sola volta, ma se la GB resterà alquanto moltiplice dell' E, ancora la HD rimarrà ugualmente moltiplice dell' F. Il che ec.

PROPOSIZIONE 7.

Le grandezze uguali tra loro hanno la medesima ragione alla medesima grandezza; e la medesima grandezza alle grandezze uguali ha la medesima ragione.

Se sieno due grandezze A B (*Fig.* 111) tra loro uguali, avranno a qualunque terza C la medesima ragione; ed ancora paragonata la C ad ambedue avrà la stessa proporzione ad esse.

Ciò è per sè stesso evidente; pure si dimostra, perchè le ugualmente moltiplici D E delle due uguali A B saranno pure uguali; e presa la F in qualunque modo moltiplice della C, si accorde-

ranno le moltiplici D E in uguagliare, superare, o mancare dalla moltiplice F; pertanto sarà la A alla C, come la B alla C (*Defin.* 6); e invertendo la C alla A come la C alla B (4. V, *coroll.*). Il che ec.

PROPOSIZIONE 8.

Delle grandezze disuguali la maggiore alla medesima grandezza ha maggior ragione che la minore; e la medesima grandezza alla grandezza minore ha maggior ragione che alla maggiore.

Delle disuguali grandezze AB D (*Fig.* 112) la maggiore AB ad una terza K avrà maggior ragione, che la minore D alla medesima K; ma viceversa è maggiore la ragione della K alla minore D, che alla maggiore AB.

Posta l' AC uguale alla D, si prendano le EF FG ugualmente moltiplici delle AC CB in modo, che ognuna di quelle sia maggiore della K; indi si potrà moltiplicare essa K in modo, che riesca prossimamente maggiore della EF, ma minore della EG. Sia questa moltiplice la EH. Dunque l' EG essendo moltiplice dell' AB, come la EF dell' AC, o della uguale D (1. V); il moltiplice di essa AB supera il moltiplice della grandezza K, ch' è per ipotesi l' EH: laddove l' EF moltiplice della D è minore della EH moltiplice della K; però l' AB alla K ha maggior ragione che la D alla K (*Defin.* 8. V). E viceversa, perchè il moltiplice della K, cioè l' EH, è maggiore della EF, ch' è il moltiplice della D, però, essendo la stessa EH minor dell' EG moltiplice dell' AB, avrà la

K alla D maggior ragione che la K all' AB. Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 9.

Quelle grandezze, che alla grandezza medesima hanno la stessa ragione, sono fra loro uguali; e quelle, alle quali la medesima ha la stessa ragione, sono ancora fra loro uguali.

Se le grandezze A B (*Fig.* 113) ad una terza C hanno la medesima ragione, sarà la A uguale alla B: e similmente se la C ha la stessa ragione all' A, ed alla B, è la A uguale alla B.

Perchè se non fosse l' A uguale alla B, ma una di loro maggiore, per esempio l' A maggior della B; sarebbe la ragione dell' A alla C maggiore di quella che ha la B alla C: e la ragione della C alla B maggiore di quella che ha la C alla A; dunque essendo la A alla C come la B alla C, ovvero la C alla A come la C alla B, è necessario, che sia l' A uguale alla B. Il che ec.

PROPOSIZIONE 10.

Delle grandezze che hanno ragione alla medesima grandezza, quella che ha maggior ragione è maggiore; e quella, a cui la medesima ha ragion maggiore, è minore.

Se l'A alla C (*Fig.* 114) ha maggior proporzione che la B alla C; sarà l' A maggiore della B; e se la C alla B ha maggior proporzione, che la C all' A; sarà la B minor dell' A.

Imperocchè se fosse la A uguale alla B, sarebbe la A alla C come la B alla C (7.V): e se fosse la

A minor della B, avrebbe la A alla C minor ragione che la B alla C, contro l' ipotesi. Dunque avendo la A alla C maggior ragione che la B alla C, conviene, che sia l' A maggior della B. Similmente se fosse la B uguale all' A, sarebbe la C alla B come la C all'A; e se fosse la B maggior della A, avrebbe la C alla B minor ragione che la C all' A: dunque avendo la C alla B maggior ragione che la C alla A, è la B minore della A. Il che ec.

PROPOSIZIONE II.

Le ragioni, che sono uguali ad una medesima, sono ancora uguali fra loro.

Se le ragioni dell' A alla B, e dell' E alla F (*Fig.* 115) sono uguali ad una terza, della C alla D; saranno quelle ancora uguali tra loro.

Si prendano gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, come 3A 3E 3C; e gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, per esempio 4B, 4F, 4D. Perchè dunque la A sta alla B come la C alla D; e parimenti la E alla F come la C alla D: se 3A sarà uguale a 4B, anco 3C uguaglierà 4D. Ma se 3C uguaglia 4D, ancora 3E sarà uguale a 4F: dunque se 3A è uguale a 4B, ancor 3E sarà uguale a 4F. Se poi 3A è maggior di 4B, sarà 3C maggior di 4D, ed allora sarà pur 3E maggior di 4F. Dunque essendo 3A maggior di 4B, ancora 3E sarà maggior di 4F. E se 3A è minor di 4B, ancor 3C sarà minore di 4D, onde in tal caso 3E è minor di 4F. Dunque si accordano gli ugualmen-

te moltiplici dell' A , e dell' E in uguaglianza , o in eccesso, o in difetto in riguardo agli ugualmente moltiplici della B e della F ; e però sta la A alla B come la E alla F . Dunque le proporzioni uguali ad una terza , sono pure uguali tra loro . Il che ec.

PROPOSIZIONE 12.

Se quante grandezze si vogliono , dello stesso genere, sieno proporzionali ; come sta un antecedente ad un conseguente , così saranno tutti gli antecedenti a tutti li conseguenti .

Siano proporzionali quante grandezze si vogliono, dello stesso genere, A B C D E F (*Fig.* 116); e come la A alla B , così sia la C alla D , e la E alla F : dico , che come la A alla B , così saranno le A C E alle B D F .

Si piglino alcuni ugualmente moltiplici degli antecedenti , per esempio 3A , 3C , 3E ; ed altri ugualmente moltiplici de' conseguenti , come 4B 4D 4F : perchè dunque la A sta alla B come la C alla D, e come la A alla B così la E alla F ; se 3A è uguale a 4B , ancora 3C sarà uguale a 4D , e 3E a 4F ; se maggiore , maggiore ; e se minore , minore : laonde se 3A è uguale a 4B , ancora 3A 3C 3E insieme saranno uguali a 4B 4D 4F insieme ; se maggiore , maggiori ; e se minore , minori . Dunque essendo 3A moltiplici di A , come 3A 3C 3E insieme sono moltiplici delle A C E insieme ; del pari essendo 4B moltiplici di B , come 4B 4D 4F sono moltiplici delle B D F ; ed ac-

cor-

cordandosi questi moltiplici dell'A, e delle A C E insieme, con gli ugualmente moltiplici della B e delle B D F insieme, nell' uguagliarsi o nel superarsi, o nell' esser minori quelli di questi, sarà la A alla B come le A C E alle B D F. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 13.

Se la prima alla seconda abbia la medesima ragione che la terza alla quarta; e la terza alla quarta abbia maggior ragione, che la quinta alla sesta; ancora la prima alla seconda avrà maggior ragione che la quinta alla sesta.

Se la A alla B (*Fig.* 117) ha la stessa ragione, che la C alla D, ma la ragione della C alla D sia maggiore di quella della E alla F; ancora la ragione della A alla B sarà maggiore di quella della E alla F.

Imperocchè presi gli ugualmente moltiplici degli antecedenti C E; ed altri ugualmente moltiplici de'conseguenti D F, avendo la C alla D maggior ragione che la E alla F, potrà essere il moltiplice del primo antecedente 3C maggiore del moltiplice 4D del primo conseguente; ma il moltiplice 3E del secondo antecedente sarà minore del moltiplice 4F del secondo conseguente (*Def.*8. V). Prese ancora 3A ugualmente moltiplici della A come 3C della C, ed ancora presi 4B moltiplici della B, come 4D della D, essendo la A alla B come la C alla D, siccome 3C è maggior di 4D, così ancora 3A sarà maggiore di 4B; e però essendo 3E minor

di 45, ha la A alla B maggior ragione che la E alla F (*Def.* 8. V). Il che dovea dimostrarsi .

PROPOSIZIONE 14.

Se di quattro grandezze del medesimo genere la prima alla seconda abbia la medesima ragione che la terza alla quarta; e la prima sia maggiore della terza, ancora la seconda sarà maggiore della quarta; se è uguale sarà uguale ; e se minore, minore .

Essendo la A alla B (*Fig.* 118) come la C alla D; se la A è uguale alla C, ancor la B sarà uguale alla D; se la A è maggior della C, ancor la B sarà maggiore della D; e se la A è minore della C, la B sarà pur minore della D .

Imperocchè, se la A è uguale alla C , sarà la A alla B come la C alla B (7. V); ma la A alla B come la C alla D: dunque (11. V) sarà la C alla B come la C alla D; e però sarà uguale la B alla D (9. V). Se poi la A è maggior della C , avrà la A alla B maggior ragione che la C alla B (8. V); onde ancora la C alla D avrà maggior ragione che la C alla B (13. V). Dunque la B è maggiore della D (10. V). Similmente se sarà la A minor della C, si proverà essere la B minor della D. Dunque di quattro grandezze proporzionali; secondo che la prima è uguale, maggiore, o minore della terza, ancora la seconda è parimente uguale, maggiore, o minore della quarta . Il che ec.

PROPOSIZIONE 15.

Le parti paragonate fra loro hanno la medesima ragione che i loro ugualmente moltiplici.

Le parti E F (*Fig.* 119) sono proporzionali co' loro ugualmente moltiplici AD GK.

Imperocchè divise le AD GK nelle parti uguali alle E F, che nella prima sono le AB BC CD, ciascuna uguale alla E, e nell' altra sono le GH HI IK, ciascuna uguale alla F, sarà la E alla F come la AB alla GH, come la BC alla HI, e come la CD alla IK. Dunque ancora la E alla F come le AB BC CD alle GH HI IK, come la AD alla GK (12. V). Il che ec.

PROPOSIZIONE 16.

Se quattro grandezze del medesimo genere sono proporzionali, ancora *permutando*, cioè paragonando tra loro gli antecedenti, ed i conseguenti, sono proporzionali.

Quattro grandezze del medesimo genere A B C D (*Fig.* 120) siano proporzionali, cioè come la A alla B così sia la C alla D: dico, che ancora permutandosi, sono proporzionali; cioè come la A alla C così è la B alla D.

Imperocchè prese due ugualmente moltiplici E F delle due prime A B, ed altre due G H ugualmente moltiplici delle due ultime C D; sarà la E alla F come la A alla B (15. V), come la C alla D (11. V), come la G alla H. Però essendo

come la E alla F così la G alla H, se la E uguaglia la G, ancora la F uguaglierà la H; se la E è maggior della G, la F sarà maggior della H, e se minore, minore. Dunque gli ugualmente moltiplici delle A B accordandosi con gli ugualmente moltiplici delle C D, nell' essere uguale, maggiore, o minore l' uno dell' altro suo corrispondente, sarà la A alla C come la B alla D (*Def.* 6. V); e però le grandezze proporzionali, ancora permutando sono proporzionali.

PROPOSIZIONE 17.

Se quattro grandezze sono proporzionali, ancor *dividendo*, cioè paragonando gli eccessi, ne' quali ogni antecedente supera il suo conseguente, al medesimo conseguente, saranno proporzionali.

Le grandezze AB BC DE EF (*Fig.* 121) siano proporzionali, cioè come la AB alla BC così sia la DE alla EF: dico che ancora divise sono proporzionali, cioè come l'AC alla CB così la DF all'FE.

Si prendano delle AC CB DF FE le ugualmente moltiplici GH HI LM MN; e poi delle CB FE altre ugualmente moltiplici IO NP. Saranno adunque le GI LN ugualmente moltiplici delle AB DE, come la GH della AC, e l' LM della DF (1. V); ed ancora l' HO sarà moltiplice della CB, come la MP della FE (2. V). Dunque essendo la AB alla BC come la DE alla EF, se la GI è uguale alla HO, sarà pure la LN uguale alla MP; e se maggiore, o minore sarà la GI della HO, parimente sarà maggiore, o minore la LN della MP;

ma se la GI è uguale alla HO, tolta la comune HI, sarà la GH uguale alla IO; ed essendo allora la LN uguale alla MP; tolta la comune MN, sarà pure la LM uguale alla NP; e parimente essendo la GI maggiore della HO, sarà la GH maggiore della IO; ed allora essendo pure la LN maggiore della MP, sarà parimente la LM maggiore della NP; e se la GI è minore della HO, sarà la GH minore della IO; onde essendo la LN minore della MP, sarà la LM minore della NP. Dunque le GH LM ugualmente moltiplici delle AC DF, si accordano colle IO NP ugualmente moltiplici delle CB FE, nell' essere uguale, maggiore, o minore l' una dell' altra; pertanto sarà la AC alla CB come la DF alla FE; onde le grandezze proporzionali, ancora divise sono proporzionali.

PROPOSIZIONE 18.

Essendo le grandezze divise proporzionali, ancora *composte*, cioè paragonando l' antecedente insieme colla conseguente come una alla conseguente, saranno proporzionali.

Le grandezze divise AC CB DE EF (*Fig.* 122) siano proporzionali; e sia come la AC alla CB così la DE alla EF: dico che ancora composte saranno proporzionali, cioè sarà come la AB alla BC così la DF alla FE.

Altrimenti, se sia la AB alla BG come la DF alla FE, sarà dividendo (17.V) la AG alla GB come la DE alla EF, come la AC alla CB (11. V). Dunque se fosse la AG maggior della AC, sarebbe la

CB maggior della CB (14. V), il che è impossibile. Similmente essendo la Ag minore della AC, sarebbe la gB minore della CB; il che pure è assurdo, dovendo essere il tutto maggiore , e non minore d' una sua parte (*Assiom.* 6). Dunque sta *componendo* la AB alla BC come la DF alla FE .

Corollario . Quindi può provarsi, che essendo tutta l' AB alla parte BC , come tutta la DF alla parte FE; ancora tutta l' AB alla residua AC è come tutta la DF alla residua DE ; perchè dividendo (17. V) sarà la AC alla CB come la DE alla EF, e invertendo (4. V. *coroll.*), sarà la CB alla CA come la EF alla DE; e però componendo (18. V), la AB alla AC come la DF alla DE. Il che si dice *conversione di ragione*, posta però dagl' Interpreti di Euclide per corollario della Proposizione seguente, in cui la dimostrano solo in grandezze dello stesso genere , servendosi della *permutazione*, la quale non si adatterebbe al paragone di due quantità di genere diverso dalle loro parti, ed a' loro residui; come importa questa *conversione di ragione* .

PROPOSIZIONE 19.

Se sia come tutta una grandezza a tutta un' altra, così una parte della prima ad una parte della seconda, sarà la rimanente della prima alla rimanente della seconda come tutta a tutta .

Essendo tutta l' AB (*Fig.* 123) a tutta la CD , come la parte della prima AE alla parte CF della seconda, ancora la rimanente EB alla rimanente

FD starà come tutta l' AB a tutta la CD, o come la parte AE alla parte CF.

Imperocchè essendo la AB alla CD come la AE alla CF; permutando (16. V) sarà la AB alla AE come la CD alla CF; e dividendo (17. V), la EB all' AE sarà come la FD alla CF; e di nuovo permutando la EB alla FD come la AE alla CF, o come la AB alla CD. Il che ec.

PROPOSIZIONE 20.

Se sieno tre grandezze, ed altre di ugual moltitudine, le quali si prendano a due a due nella medesima ragione, e la prima sia maggiore, uguale, o minore della terza, ancora la quarta sarà maggiore, uguale, o minore della sesta.

Sieno A B C (*Fig.* 124) tre grandezze, ed altre D E F di ugual moltitudine, le quali si prendano a due a due nella medesima ragione, cioè sia come la A alla B così la D alla E, come la B alla C così la E alla F: dico che se la A è maggiore, uguale, o minore della C, ancor la D sarà maggiore, uguale, o minore della F.

Perchè se la A è maggior della C, avrà la A alla B maggior ragione che la C alla B (8. V): ma era la A alla B come la D alla E; ed è invertendo (4. V. *Coroll.*) la C alla B come la F alla E: dunque la D alla E avrà maggior ragione che la F alla E (13. V), e quindi la D è maggior della F (10. V). Nello stesso modo si proverà, che se è la A minore della C, ancor la D sarà minor della F, e se la A è uguale alla C, ancor la D sarà ugua-

le alla F. Dunque si accordano le prime tre ad eccedere, mancare, o uguagliare le altre . Il che ec.

PROPOSIZIONE 21.

Se sieno tre grandezze, ed altre di ugual moltitudine, le quali si prendano a due a due nella medesima ragione, e sia la loro proporzione *perturbata*, cioè sia la prima alla seconda come la quinta alla sesta; e la seconda alla terza, come la quarta alla quinta; se la prima è maggiore, uguale, o minore della terza, ancor la quarta sarà maggiore, uguale, o minore della sesta .

Siano le grandezze A B C D E F (*Fig.* 125) talmente disposte, che la prima A alla seconda B sia come la quinta E alla sesta F; e la seconda B alla terza C sia come la quarta D alla quinta E; e sia la A maggiore, uguale, o minore della C; dico che sarà la D maggiore, uguale, o minore della F .

Se la A è maggior della C, avrà la A alla B maggior ragione che la C alla B; ma essendo la A alla B come la E alla F, ed invertendo di sopra, la C alla B come la E alla D, avrà pure la E alla F maggior ragione che la E alla D: dunque ancora la D è maggior della F (10. V). Similmente se la A è uguale alla C, sarà la A alla B come la C alla B, e però ancora la E alla F come la E alla D: dunque anche la D è uguale alla F . Così se fosse la A minor della C, si proverebbe la D minor della F . Dunque concordano le prime tre colle seconde tre, nell' essere la prima maggiore, o uguale, o minore della terza . Il che ec.

PROPOSIZIONE 22.

Se sieno quante grandezze si vogliano, ed altre di ugual moltitudine, le quali si prendano a due a due nella medesima ragione, ancora per *ugualità ordinata* saranno nella medesima ragione, cioè la prima all' ultima nelle prime grandezze sarà come la prima all' ultima nelle seconde.

Sieno A B C D (*Fig.* 126) quante grandezze si vogliano, ed altre E F G H di ugual moltitudine, prese a due a due nella medesima ragione, cioè tali che sia la A alla B come la E alla F; la B alla C come la F alla G; ed ancora la C alla D come la G alla H; dico che per ugualità sarà la A alla D come la E alla H.

Si piglino 3A 3E ugualmente moltiplici delle A E; 2B 2F ugualmente moltiplici delle B F; e 4C 4G ugualmente moltiplici delle C G. Essendo la A alla B come la E alla F, sarà ancora 3A a 2B come 3E a 2F (4. V); ed essendo pure la B alla C come la F alla G, sarà ancora 2B a 4C come 2F a 4G. Dunque se 3A è maggiore, minore, o uguale a 4C; sarà pure 3E maggiore, minore, o uguale a 4G (10. V); dunque starà la A alla C come la E alla G, perchè gli ugualmente moltiplici degli antecedenti si accordano con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti. Si è dunque provato essere la prima alla terza delle prime grandezze, come la prima alla terza delle seconde, cioè la A alla C come la E alla G; ed inoltre essendosi posta la C alla D come la G alla H, si potrà dedur-

re, essere la A alla D come la E alla H; e così sempre la prima all' ultima nelle prime grandezze starà come la prima all' ultima nelle altre, per l' ugualità ordinata. Il che ec.

PROPOSIZIONE 23.

Se in quante grandezze si vogliano, sia la prima alla seconda, come in altre di egual moltitudine la seconda alla terza; indi sia in quelle la seconda alla terza, come è in queste la prima alla seconda: sarà, *per ugualità perturbata* (21: V), la prima alla terza nelle prime grandezze, come la prima alla terza nelle altre.

Siano quante grandezze si vogliano A B C (*Fig.* 127), ed altre D E F di ugual moltitudine; se la prima grandezza A sta alla seconda B come la quinta E alla sesta F; indi sia la seconda B alla terza C come la quarta D alla quinta E: dico che sarà la A alla C come la D alla F.

Delle grandezze A B D sieno ugualmente moltiplici le 2A 2B 2D, e dell' altre C E F sieno ugualmente moltiplici le 3C, 3E, 3F. Poichè la A alla B sta come la E alla F, sarà ancora la 2A alla 2B come la 3E alla 3F (15. V), ed essendo la B alla C come la D alla E, sarà pure la 2B alla 3C come la 2D alla 3E (4. V): pertanto sono per ugualità perturbata proporzionali come la A alla C così la D alla F. Il che ec.

PROPOSIZIONE 24.

Se sarà la prima grandezza alla seconda, come la terza alla quarta, e la quinta alla seconda, come la sesta alla quarta; sarà ancora la prima con la quinta alla seconda, come la terza con la sesta alla quarta.

La prima A (*Fig.* 128) alla seconda C abbia la medesima ragione che la terza D alla quarta F; e la quinta B alla seconda C abbia la medesima ragione che la sesta E alla quarta F: dico che sarà ancora composta la prima e la quinta, cioè le A B insieme, alla seconda C, come la terza e la sesta insieme, cioè le D E, alla quarta F.

Imperocchè essendo la A alla C come la D alla F, ed invertendo nella seconda proporzione, la C alla B come la F alla E; sarà per l'ugualità ordinata la A alla B come la D alla E (22. V); e componendo, la A insieme con la B alla B, come la D insieme con la E alla E (18. V): ma ancora la B alla C sta come la E alla F. Dunque per l'ugualità ordinata sarà la A insieme con la B alla C, come la D insieme con la E alla F. Il che ec.

PROPOSIZIONE 25.

Se quattro grandezze dello stesso genere siano proporzionali, la massima e la minima saranno maggiori dell' altre due.

Sieno le AB C DE F (*Fig.* 129) quattro grandezze proporzionali, e come la AB alla C così stia

la DE alla F ; la massima poi sia la AB, e la minima la F : dico che le AB F sono maggiori delle C DE.

Si tagli dalla prima AB la parte AG uguale alla seconda C, e dalla terza DE la DH uguale alla quarta F; dunque la AB alla AG come la DE alla DH, e permutando (16. V), tutta l' AB a tutta la DE, come la parte levata AG alla parte levata DH; e però ancora la rimanente GB alla rimanente HE sarà, come tutta l'AB a tutta la DE (19.V). Ma la AB è maggior della DE : dunque ancor la BG sarà maggiore della HE. Sono poi la GA uguale alla C, e l' HD uguale alla F, e perciò le AG F insieme, uguali alle C HD insieme. Dunque le BG GA F sono maggiori delle HE HD C; cioè la massima AB con la minima F è maggiore dell' altre due ED C. Il che era da dimostrarsi.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO SESTO.

DEFINIZIONI.

Figure rettilinee *simili* si dicono quelle, in cui ciascun angolo dell' una uguaglia quello, che gli corrisponde nell' altra; e che d' intorno agli uguali angoli hanno i lati proporzionali.

II. Diconsi *reciproche* quelle figure, in cui un lato dell' una ad un lato dell' altra stia proporzionalmente, come un lato di questa seconda ad un lato di quella prima.

III. Una retta si dirà segata secondo *l' estrema e media ragione*, se sia tutta ad una parte, come questa parte alla rimanente.

IV. L' *altezza* di qualsivoglia figura è la perpendicolare condotta dal vertice alla base.

V. Si dice una proporzione *composta* di più proporzioni, quando le quantità di queste moltiplicate insieme fanno la quantità di quella (*a*).

(*a*) La quantità delle proporzioni suol prendersi in più modi. Da alcuni s' intende quantità della proporzione il di lei *denominatore;* per esempio, la proporzione dupla ha per denominatore il binario; la tripla il ternario; la sesquialtera una frazione $\frac{3}{2}$; e così tutte l'altre proporzioni possono deno-

PROPOSIZIONE I.

I triangoli e i parallelogrammi, che hanno la medesima altezza, sono tra loro, come le basi.

Siano li triangoli ABC ABD (*Fig.* 132), e i pa-

minarsi da una frazione, in cui l'antecedente sia posto di sopra come numeratore, ed il conseguente al di sotto come denominatore. Così se i denominatori di più proporzioni si moltiplicano insieme, ne risulta il denominatore della proporzione composta di quelle; per esempio, componendosi la dupla con la tripla, ne risulta la proporzione sestupla, perchè 2 moltiplicato per 3 è uguale a 6: similmente questa proporzione sestupla composta con un' altra proporzione sesquialtera farà la proporzione nonupla, perchè li denominatori di esse moltiplicati insieme fanno $\frac{18}{2}$, cioè 9. Se poi si dovessero comporre delle proporzioni di quantità incommensurabili, sarà più difficile il trovarne il denominatore, che talvolta non potrà esprimersi nè meno per via di radici quadre, o cubiche ec.

Da altri poi si suppone, che le quantità delle proporzioni, di cui quì tratta Euclide, non sieno altre, che i termini delle medesime: sicchè per comporre le ragioni della AB (*Fig.* 130) alla CD, e della EF alla GH, basti moltiplicar insieme gli antecedenti, ed indi i conseguenti tra loro, e tra questi prodotti riuscirà la proporzione delle AB EF alle CD GH, composta delle date proporzioni l' AB alla CD, e l' EF alla GH: e parimente se si vorrà aggiungervi un' altra ragione della I alla K da comporsi con l' altre, ne risulterà composta la proporzione delle AB EF I alle CD GH K; e così dell' altre. E perchè i termini delle proposte ragioni potrebbero essere tali, che non potessero moltiplicarsi insieme; per esempio se una delle componenti ragioni fosse di due angoli, un' altra di due pesi, una di due tempi, ec. allora basterà esprimere quelle date ragioni in linee, o numeri proporzionali a quelli altri termini, che così potranno insieme moltiplicarsi.

Il modo però, con cui lo stesso Euclide nella Proposizione 23 di questo Libro sesto si serve della composizione delle proporzioni, mostra doversi avvertire, che se tra due termini A B (*Fig.* 131) s' interponga uno, due, o più altri termini del medesimo genere, come E F G; la ragione degli estremi

rallelogrammi ABCF ABDE, che abbiano la medesima altezza: dico che son tra loro come le basi BC BD.

Posta la BI moltiplice in qualunque modo della BD, e tirata la retta IA, sarà il triangolo IAB ugualmente moltiplice dell' ABD, come la base IB della base BD, perchè essendo le parti DH HI uguali alla BD. congiunta ancora la HA, saranno i triangoli HAD IAH uguali all' ABD (38. I), essendo tra le medesime parallele DC EF. Similmente presa la BG moltiplice della BC, sarà, congiunta l'AG, il triangolo ABG ugualmente moltiplice dell' ABC, come la GB della BC; e secondo che riesca la BG uguale, o maggiore, o minore della BI, ancor sarà il triangolo ABG uguale, o maggiore, o minore dell' ABI. Dunque gli ugualmente moltiplici del triangolo ABC, e della sua base BC, si accordano con gli ugualmente moltiplici del triangolo ABD, e della sua base BD, in uguagliarsi, avan-

A B può intendersi composta di tutte le ragioni, che sono fra i prossimi termini, cioè di A ad E, di E ad F, di F a G, e di G a B; perchè infatti l'A sta alla B, come l'A moltiplicata nell' E, nell' F, e nella G alla stessa B moltiplicata ne' medesimi termini E F G (15. V): dunque tutti gli antecedenti moltiplicati insieme, a tutti i conseguenti insieme moltiplicati, hanno ragione composta di tutte le ragioni, che ha ciascun antecedente al suo conseguente. E quindi è, che se la prima grandezza alla seconda ha la medesima ragione, che la seconda alla terza, e questa alla quarta, e la quarta alla quinta, e così in una continua serie di Analogia; dicesi dal medesimo Euclide, che la prima alla terza avrà doppia proporzione della prima alla seconda; e la prima alla quarta ne avrà proporzione tripla ec. (*Defin.* 10, 11. V); per essere quella della prima alla terza composta di due proporzioni uguali; e la prima alla quarta avendo ragione composta di tre uguali proporzioni ec.

zarsi, o essere avanzati l' uno dall'altro; però il triangolo al triangolo è come la base alla base (*Defin.* 6. V). E perchè i parallelogrammi ABCF ABDE sono doppj de' triangoli ABC ABD (41. I), però sono nella stessa ragione di tali triangoli (15. V). Dunque ancora essi parallelogrammi ugualmente alti, sono come le loro basi. Il che ec.

PROPOSIZIONE 2.

Se in un triangolo si conduce una retta parallela alla base, essa taglierà i lati proporzionalmente; e qualunque volta una linea retta taglierà i lati proporzionalmente, sarà essa parallela alla base.

Se nel triangolo ABC (*Fig.* 133) si conduce la retta DE parallela alla base BC: dico, ch' essa taglierà i lati AB AC proporzionalmente ne' punti D E: e sempre che una linea retta taglierà i lati AB AC proporzionalmente, dico che sarà essa parallela alla base BC.

Si tirino le rette BE CD: saranno i triangoli BDE CED uguali (37. I), essendo sulla stessa base DE, e fra le medesime parallele descritti; dunque sarà il triangolo ADE al BDE come l' ADE al CED (7. V), ed è l' ADE al BDE come la AD alla BD (1. VI), essendo triangoli ugualmente alti sopra quelle basi; e similmente l' ADE al CED come l' AE all' EC. Dunque sarà l'AD alla BD come l'AE all' EC (11. V). Il che era da dimostrarsi quanto alla prima parte.

Quanto alla seconda, essendo l' AD alla DB come la AE alla EC, sarà il triangolo ADE al BDE co-

me l'ADE al CED (1. VI) . Dunque il triangolo BDE è uguale al CED (9. V); e però le rette DE BC sono parallele (39. I) . Il che era in secondo luogo da dimostrarsi .

PROPOSIZIONE 3.

Se un angolo del triangolo sia segato per mezzo da una retta che seghi ancora la base ; li segmenti della base saranno proporzionali agli altri due lati : e viceversa se li segmenti della base siano proporzionali agli altri due lati , la retta , che dal vertice si conduce alla sezion della base , segherà per mezzo l' angolo al vertice .

Sia il triangolo BAC (*Fig.* 134) , e l' angolo A sia segato per mezzo dalla retta AD segante la base BC in D : dico , che come la BD alla DC , così è l' AB all' AC : e viceversa , sempre che sia la BD alla DC come l' AB alla AC ; dico, che l' angolo BAC è segato per mezzo dalla AD .

Si tiri dal punto C la retta CE parallela alla AD (31. I), la quale concorra col lato BA prolungato in E . Poichè dunque l' angolo BAD è uguale al DAC, ed il BAD uguale all'AEC , e il DAC uguale all' ACE, per le parallele (29. I); sarà pure l'AEC uguale all'ACE; e però l'AC è uguale all'AE (6.I); ed è la BA all' AE come la BD alla DC (2. VI) . Dunque sarà la BA all' AC come la BD alla DC . Che se fosse la BD alla DC come la BA all' AC , e congiunta la DA , le si tiri la CE parallela : sarà ancora la BA alla AE come la BD alla DC, come la BA all' AC : dunque sarà la AC uguale all' AE

(9. V); onde l' angolo AEC e uguale all' ACE: ma il BAD uguaglia l' AEC, e l' ACE uguaglia il DAC. Dunque gli angoli BAD DAC saranno uguali; onde l' angolo BAC dalla retta AD è diviso pel mezzo. Il che ec.

PROPOSIZIONE 4.

Ne' triangoli equiangoli, i lati, che sono intorno agli angoli uguali, sono proporzionali; e lati omologi sono quelli, che sono sottoposti agli angoli uguali.

Siano equiangoli li triangoli ABC DCE (*Fig.* 135), i quali abbiano l' angolo ABC uguale al DCE, l' angolo ACB uguale al DEC, e il BAC al CDE: dico che proporzionali sono i lati d'intorno agli angoli uguali, e omologi quelli che son sottesi agli angoli uguali.

Pongasi per diritto la CE colla BC, e prolungati i lati BA ED concorrano in F. Perchè dunque l' angolo ABC è uguale all' angolo DCE, e l' angolo ACB uguale al CED; sono parallele la BAF alla CD, e l' AC alla EDF (28. I); onde l' ACDF è un parallelogrammo, in cui la CA è uguale alla DF, e la CD alla FA (34. I). Dunque essendo la BA all' AF come la BC alla CE, e come la FD alla DE (2 VI), sarà la BA alla CD come la BC alla CE, e come la AC alla DE; e permutando, la BA alla BC come la CD alla CE (16. V). Come poi la BC all'AC, così è la CE alla DE: onde per l' ugualità ordinata sarà ancora la BA alla AC come la CD alla DE (22. V). Dunque i lati intor-

no agli angoli uguali sono proporzionali. Il che ec.

Corollario. Quindi si ha, che i triangoli equiangoli sono figure simili (*Def.* 1. VI), avendo i lati proporzionali intorno agli angoli uguali.

PROPOSIZIONE 5.

Se due triangoli abbiano i lati proporzionali, ciascun angolo sarà uguale al suo corrispondente, cioè gli opposti a' lati omologi.

Siano i due triangoli ABC DEF (*Fig.* 136), che abbiano i lati proporzionali; cioè sia come la AB alla BC così la DE alla EF, e la BC alla AC come la EF alla FD: dico che avranno uguali g'i angoli opposti a' lati omologi, cioè l' angolo DEF uguale all' angolo ABC, il BAC all' EDF, e l' ACB al DFE.

Facciasi l' angolo FEG uguale al CBA, e l' angolo EFG uguale al BCA; e convenendo le rette EG FG in G, riuscirà l' angolo G uguale al BAC (32. I). Dunque essendo equiangolo il triangolo EGF al BAC, sarà la GE all' EF come l' AB alla BC (4. VI), come la DE all' EF; e però la GE è uguale alla DE (9. V). Similmente sarà la GF all' EF come la AC alla CB, e come la DF alla EF; e quindi sarà ancora la GF uguale alla DF. Ed essendo il lato EF comune a' triangoli EGF EDF, che hanno gli altri lati uguali, però saranno ancora essi equiangoli (8. I). Dunque essendo l'EGF equiangolo all' ABC, ancora l' EDF è allo stesso ABC equiangolo. Il che ec.

PROPOSIZIONE 6.

Se due triangoli intorno ad un angolo uguale abbiano proporzionali i lati; saranno ancora uguali gli altri angoli, a' quali sono sottesi i lati omologi.

Siano i due triangoli ABC DEF (*Fig.* 137), che intorno agli angoli uguali A D abbiano i lati proporzionali, cioè sia la AB alla AC come la ED alla DF: dico, che ancora gli altri angoli sottesi ai lati omologi saranno uguali, cioè l'angolo B all' angolo E, e l' angolo C all' angolo F.

Si ponga nel lato AB la parte AG uguale alla DE, e la parte AH del lato AC facciasi uguale alla DF. Congiunta la GH sarà uguale all' EF (4. I), essendo intorno gli uguali angoli A D uguali anche i lati: ma la GH è parallela alla BC (2. VI); e però gli angoli AGH ABC, e così gli AHG ACB sono uguali (29. I). Dunque il triangolo ABC essendo equiangolo all' AGH, e questo all' EDF, sono i triangoli ABC EDF pure equiangoli. Il che ec.

PROPOSIZIONE 7.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, ed intorno ad altro angolo di ciascun triangolo, siano proporzionali i lati, e l' uno e l' altro angolo rimanente siano ambi retti, o ambi minori, o ambi maggiori del retto; li triangoli saranno equiangoli.

Ne' triangoli ABC DEF (*Fig.* 138), se l'angolo

A è uguale all' angolo D, e intorno agli altri due angoli B E sieno i lati proporzionali, cioè sia la AB alla BC come la DE alla EF, e gli altri due angoli C F sieno ambi retti, o tutti e due minori, o ambidue maggiori di un retto; saranno essi triangoli equiangoli.

Se gli angoli C F fossero retti, sarebbero uguali, ed ancora essendo l' angolo A uguale al D, sarebbe pure l' angolo ABC uguale all' E (32 I). Dunque sarebbero essi triangoli equiangoli. Se poi sono ambidue gli angoli acuti, o ambedue ottusi, sarà pure l' angolo ABC uguale all'angolo E; altrimenti se fosse uno di essi maggiore dell' altro, per esempio l' ABC maggiore del DEF, facciasi l'ABG uguale al DEF; ed essendo ancora l'angolo A uguale al D, sarebbe pure l' AGB uguale all' F; onde essendo i triangoli ABG DEF equiangoli, sarebbe l' AB alla BG come la DE all' EF (4. VI), cioè per l' ipotesi come l' AB alla BC; e però la BG sarà uguale alla BC (6. V), e l' angolo BGC uguale all' angolo BCG (5. I), e così ambidue minori di un retto, e però acuti (32. I); onde il conseguente BGA sarà ottuso; ed essendo questo uguale all' angolo F, sarebbe pure l' angolo F ottuso, quando l' angolo C si è provato acuto; onde non sarebbero ambidue maggiori, o ambidue minori di un retto, contro l' ipotesi. Non è adunque l' angolo ABC disuguale all' angolo E; onde essi triangoli sono equiangoli, come dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 8.

Se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla base sia condotta la perpendicolare; li triangoli, che sono alla perpendicolare, sono simili fra loro, e a tutto il triangolo.

Nel triangolo rettangolo BAC (*Fig.* 139), se dall' angolo retto A si conduce la perpendicolare AD sopra l' opposta base BC, saranno i triangoli ADB CDA simili tra loro, ed a tutto il triangolo CAB.

Imperocchè essendo l' angolo retto ADB uguale al CAB, e l' angolo B comune a' triangoli BAD BAC, ancora il rimanente angolo DAB sarà uguale al residuo ACB (32. I). Similmente essendo retti gli angoli CDA CAB, e comune l' angolo C ai triangoli CDA CAB, anche l'angolo rimanente CAD sarà uguale al rimanente B. Dunque sono equiangoli i triangoli ADB CAB CDA, e però sono simili (4. VI, *coroll.*). Il che ec.

Corollario I. Quindi è manifesto, che intorno gli angoli retti de' triangoli simili CDA ADB saranno proporzionali i lati, cioè sarà la CD alla DA come la DA alla DB.

Corollario II. E per la similitudine di ciascuno di essi triangoli con l' intero CAB, sarà pure la BC alla BA come la BA alla BD, ed ancora la BC alla CA come la CA alla CD.

Corollario III. *Quindi, nel triangolo rettangolo, la perpendicolare condotta dall' angolo retto alla base, è media proporzionale fra li segamenti*

della base. Inoltre, fra la base e qualunque de' suoi segamenti, è medio proporzionale il lato, che al segamento contermina.

PROPOSIZIONE 9. PROBL.

Da una data retta linea tagliare una parte aliquota (per esempio una terza parte).

Sia data la retta linea AB (*Fig.* 140): bisogna dall' AB toglier una terza parte .

Si tiri dal punto A una retta indefinita AC, in cui presa qualunque parte DA, si replichi in essa secondo il numero della denominazione, che dee avere la parte dell'AB (in questo caso tre volte, cioè nelle AD DE EF); e congiunto il termine F col punto B, si tiri la retta DG parallela alla FB. Sarà l' AG la terza parte dell' AB, come l'AD dell' AF, essendo l' AG all' AB come l' AD all' AF (2. VI).

PROPOSIZIONE 10. PROBL.

Segare una data retta nella stessa proporzione, in cui sia divisa un' altra .

Sia la AB (*Fig.* 141) la data retta non segata, e l'AC sia la segata: bisogna segar la AB nella stessa proporzione, in cui è segata l' AC.

Si pongano le AB AC in maniera che comprendano qualunque angolo: poi si congiunga la BC, e ad essa parallele sieno tirate le DF EG: è manifesto che sarà la AF alla FG come l'AD alla DE, e l' AG alla GB come la AE alla EC, e l' FG alla GB come la DE alla EC, e l'AF alla FB, come l'AD

alla DC. Dunque è divisa l' AB ne' punti F G nella stessa proporzione, in cui l' AC era segata ne' punti D E.

PROPOSIZIONE 11. PROBL.

Date due rette, trovare la terza proporzionale.

Sieno date le due rette AB BC (*Fig.* 142): bisogna ad esse trovar la terza proporzionale.

Si adatti la BC perpendicolare all' AB, e congiunta l' AC, si compisca l' angolo retto ACD. Concorrendo la CD con l' AB prolungata in D, sarà la BD terza proporzionale alle due AB BC (8. VI, *coroll.* I). Il che ec.

PROPOSIZIONE 12. PROBL.

Date tre linee rette, trovare la quarta proporzionale.

Sieno date le tre rette DE EF DG (*Fig.* 143): bisogna delle DE EF DG trovar la quarta proporzionale.

Inclinate in D le rette DE DG, si ponga la EF per diritto alla DE; e congiunta l' EG, si tiri a questa dal punto F la parallela FH segante la DG prolungata in H. Sarà la GH la quarta proporzionale ricercata, essendo la DE all' EF come la DG alla GH (2. VI). Il che ec.

PROPOSIZIONE 13. PROBL.

Date due rette, trovare la media proporzionale.

Siano date le due rette linee AE EB (*Fig.* 144): bisogna delle AE EB trovar la media proporzionale

Poste per diritto le AE EB, e divisa pel mezzo tutta l' AB nel punto C, descrivasi col raggio CA un semicircolo, e si conduca all' AB la perpendicolare EF segante la circonferenza in F: sarà questa EF la media proporzionale tra le date AE EB: perchè congiunte le AF BF, l' angolo AFB è retto (21. III); dunque essendo la FE perpendicolare alla base del triangolo rettangolo, sta l' AE all' EF come l' EF all' EB (8. VI. *coroll.*). Il che dovea ritrovarsi.

PROPOSIZIONE 14.

Dei parallelogrammi uguali, che hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati sono reciprocamente proporzionali: e viceversa se intorno gli angoli uguali sono i lati reciprocamente proporzionali, essi parallelogrammi sono uguali.

Siano i parallelogrammi uguali AC EG (*Fig.* 145), che al punto B abbiano gli angoli uguali: dico, che sono i lati d' intorno agli angoli uguali reciprocamente proporzionali, cioe la AB alla BG come l' EB alla BC: e viceversa, se intorno agli angoli uguali ABC GBE sieno i lati proporzionali, cioè la AB alla BG come l' EB alla BC, essi parallelogrammi saranno uguali.

Essendo posto il lato BG per diritto all' AB, sarà pure l' EB per diritto al BC, perchè siccome l'angolo ABC, così l'uguale EBG, con l'altro CBG

fa due angoli retti (24. I); e prolungate le rette FG DC convenienti in H, sarà pure il CBGH un parallelogrammo; e perchè l' ABCD è uguale al BEFG, sarà l' ABCD al CBGH come il BEFG al CBGH (7. V): ma la prima ragione sta come l'AB alla BG ; e la seconda sta come l' EB alla BC (1. VI): dunque l'AB alla BG come la EB alla BC: e qualunque volta c.ò sia, sarà ancora l' ABCD al CBGH come il BEFG al CBGH : dunque sarà l' ABCD uguale al BEFG (9. V) . Il che era da dimostrarsi .

PROPOSIZIONE 15.

Anche i triangoli uguali , quando un angolo in ambidue sia uguale , hanno i lati intorno al detto angolo reciprocamente proporzionali: e viceversa, se intorno ad un angolo uguale i lati di due triangoli sono reciprocamente proporzionali ; saranno essi triangoli uguali .

I triangoli uguali ABC DBE (*Fig.* 146), in cui l' angolo B in ambidue sia uguale, hanno i lati d' intorno ad esso reciprocamente proporzionali , cioè l' AB alla BE come la BD alla BC : e viceversa , se intorno all' angolo uguale B i lati dei due triangoli ABC DBE sono reciprocamente proporzionali , cioè sia l' AB alla BE , come la BD alla BC , saranno essi triangoli eguali .

Imperciocchè posta per diritto la BD alla BC, riesce pure la BE per diritto alla BA , come si è provato ne' parallelogrammi (14. VI); e congiunta la CE , essendo l' angolo ABC uguale al DBE ,

sarà il triangolo ABC al CBE, come il triangolo DBE al CBE (7. V); dunque sarà l' AB alla BE come la BD alla BC, essendo queste proporzionali a' detti triangoli (1. VI): e viceversa, se l'AB alla BE è come la BD alla BC, sarà pure l'ABC al CBE come il DBE al CBE; e però il triangolo ABC è uguale al DBE (9. V). Il che era da dimostrarsi:

Corollario. Quando ancora l' angolo DBE (*Fig.* 147) non fosse uguale all' altro ABC, ma però con esso compisse due retti; se i lati sono reciprocamente proporzionali, riescono pure uguali i triangoli: imperocchè essendo l' AB alla BE come la BD alla BC, posta dall' altra banda la BF uguale alla BD, e congiunta l' FE, sarà pure l' AB alla BE come la BF alla BC; e permutando (16. V) l' AB alla BF come la BE alla BC; dunque congiunte le rette AE FC sono parallele (2. VI), ed i triangoli ACF ECF sono uguali (37. I); onde posto comune il triangolo FCB, riesce l' ABC uguale all' EBF: ma essendo la BF uguale alla BD, sarà l' EBF uguale all'EBD (38. I); dunque l' ABC è uguale all' EBD; e lo stesso riuscirà ne' parallelogrammi, che intorno ad angoli i quali insieme facciano due retti, abbiano i lati reciproci; perchè essendo il doppio di detti triangoli, essi pure saranno uguali.

PROPOSIZIONE 16.

Se quattro rette linee sono proporzionali, il rettangolo dall'estreme uguaglia il rettangolo dal-

le medie: e viceversa, se due rettangoli sono uguali, saranno proporzionali i loro lati reciprocamente presi.

Siano proporzionali le quattro rette A B C D (*Fig.* 148), cioè sia la A alla B come la C alla D: dico, che il rettangolo dall' estreme A D uguaglia quello dalle medie B C: e viceversa, se i due rettangoli AD BC sono uguali, saranno proporzionali i loro lati presi reciprocamente, cioè sarà la A alla B come la C alla D.

Perchè essendo questi lati intorno ad angoli retti, e reciprocamente proporzionali, cioè la A alla B come la C alla D; perciò i rettangoli sono uguali: e se i rettangoli sono uguali, i loro lati debbono essere reciprocamente proporzionali (*Prop.* 14). Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 17.

Se tre linee rette sono proporzionali, il rettangolo dell' estreme è uguale al quadrato della media: e viceversa, se di tre linee, il rettangolo dell' estreme uguaglia il quadrato della media; esse tre linee saranno proporzionali.

Siano proporzionali le tre rette A B D (*Fig.* 149), cioè come la A alla B così la B alla D: dico che il rettangolo dell' estreme A D è uguale al quadrato dalla media B: e viceversa, se di tre rette A B D il rettangolo dell' estreme A D uguagli il quadrato della media B; esse linee saranno proporzionali.

Si prenda la C uguale alla media B. Dunque

essendo la A alla B come la B alla D, sarà ancora la A alla B come la B alla D; onde il rettangolo AD dell' estreme è uguale al rettangolo BC delle medie: ma essendo la C uguale alla B, il rettangolo BC uguaglia il quadrato della B; dunque il rettangolo dell' estreme è uguale al quadrato della media: e viceversa, se il rettangolo AD è uguale al quadrato della B, sarà pure il rettangolo dalle A D uguale al rettangolo dalle B C, onde la A alla B come la C alla D, cioè essendo la B uguale alla C, sarà la A alla B come la B alla D: cioè saranno proporzionali le A B D. Il che ec.

PROPOSIZIONE 18. PROBL.

Sopra una data retta linea descrivere un rettilineo simile, e similmente posto ad un altro dato.

Sulla data retta linea AB (*Fig.* 150) bisogna descrivere un rettilineo simile e similmente posto al dato CDFE.

Si risolva il dato rettilineo CDEF in triangoli CDF CFE; e sopra la retta AB si faccia l' angolo ABH uguale al CDF, e l' angolo BAH uguale al DCF, indi l' angolo AHG facciasi uguale al CFE, e l'angolo HAG uguale all' FCE; sarà il rettilineo ABHG simile al dato CDFE, perchè i triangoli ABH CDF saranno equiangoli; dunque intorno all' angolo B, uguale al D, saranno proporzionali i lati, e come l' AB alla BH così la CD alla DF: ed essendo l' angolo BHA uguale al DFC, e l' AHG uguale al CFE, sarà pure l' angolo BHG uguale al DFE: ed essendo la BH alla HA come la DF alla

FC, e la HA alla HG come la FC alla FE; per l'ugualità ordinata sarà la BH alla HG come la DF alla FE: e similmente si proveranno uguali gli altri angoli di questi poligoni, ed i lati, che li comprendono, esser proporzionali. Dunque sopra la data retta AB si è fatto un rettilineo simile al dato. Il che era proposto.

PROPOSIZIONE 19.

La proporzione di due triangoli simili è duplicata della proporzione de' loro lati omologi (*a*).

Sieno ABC DEF (*Fig.* 151.) triangoli simili, in cui siano omologi i lati BC EF, BA ED, AC DF: dico che i triangoli ABC DEF hanno proporzione duplicata di quella, che ha il lato BC al lato EF, o il lato BA all' ED, o il lato AC al DF.

Ai due lati omologi BC EF sia BG terza proporzionale (11.VI), e si congiunga la GA. Perchè la BC alla BA sta come l' EF all'ED, sarà permutando, la BC alla EF come la BA alla ED: ma la BC alla EF come la EF alla BG; dunque la BA alla ED come la EF alla BG; onde il triangolo DEF è uguale all' ABG (15.VI); e perciò il triangolo ABC al triangolo DEF starà, come l' ABC all' ABG, cioè come la BC alla BG: ma la BC alla BG ha duplicata proporzione di quella, che ha la BC all' EF (*Def.*10. V); dunque il triangolo ABC al DEF ha proporzione duplicata di quella della BC all' EF. Il che ec.

(*a*) *Questo Teorema si enuncia anche così:*
I triangoli simili sono fra loro come i quadrati dei lati omologi.

Lo stesso si dimostra dei lati BA ED, come pure dei lati AC DF .

Corollario. Se saranno dunque tre linee proporzionali, come le BC EF BG, qualunque triangolo fatto sopra la prima BC, ad un simile fatto sopra la seconda EF, sarà come la prima BC alla terza BG .

PROPOSIZIONE 20.

I Poligoni simili si dividono in triangoli simili, uguali di numero, ed omologi a' medesimi Poligoni, ed agli altri simili triangoli; e qualunque Poligono all' altro simile ha ragione duplicata di quella, che ha qualsivoglia lato del primo al lato omologo del secondo .

Sieno ABCDE FGHIK (*Fig.* 152) poligoni simili, e il lato AB sia omologo al lato FG: dico che li poligoni ABCDE FGHIK si dividono in simili triangoli, uguali di numero ed omologi a' medesimi poligoni, ed agli altri simili triangoli; e che il poligono ABCDE al poligono FGHIK ha ragione duplicata di quella che ha il lato AB al lato omologo FG .

Imperciocchè essendo l' angolo B uguale all'angolo G, ed i lati proporzionali AB BC FG GH, tirate le rette AC FH, i triangoli ABC FGH riescono simili (6. VI). Parimente essendo l' angolo BCD uguale al GHI, e ne' triangoli simili l' angolo BCA uguale al GHF, il rimanente ACD sarà uguale all' FHI ; e perchè è l'AC alla CB come la FH alla HG, e ne' triangoli simili e ne' poligoni

simili è la BC alla CD come la GH alla HI; dunque per l' ugualità ordinata (22. V) sarà l' AC alla CD come la FH alla HI ; e però condotte le rette AD FI, saranno pure simili i triangoli ACD FHI; e così pure si proveranno simili gli altri triangoli. E perchè in ciascun poligono condotte le rette da un angolo a tutti gli altri (fuori che a' due prossimi, dove già si stendono i lati del suddetto angolo) ne riescono tanti triangoli, quanti sono i lati del poligono, detrattine due; però ne' poligoni simili, che hanno il medesimo numero di lati, riesce un numero uguale di simili triangoli . Ed essendo il triangolo ABC all'FGH in duplicata ragione de' lati omologi CB HG (19. VI), ed ancora l' ACD all' FHI in duplicata ragione della CD all' HI; siccome ancora l'ADE all'FIK in duplicata ragione della DE all'IK; essendo la medesima la ragione della CB all'HG, della CD all'HI, della DE all'IK, ancora la duplicata dell'una è la stessa, che la duplicata di qualsivoglia di esse; però il triangolo ABC al triangolo FGH, come l' ACD all' FHI, come l'ADE all' FIK: e come uno ad uno, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti (22. V), cioè il triangolo ABC al triangolo FGH come li triangoli ABC ACD ADE insieme, ai triangoli FGH FHI FIK insieme; cioè come un triangolo d' un poligono ad un simile triangolo dell'altro poligono, così tutto il primo poligono a tutto il secondo. Onde essendo i triangoli ABC FGH in duplicata ragione de' lati omologi AB FG ; ancora detti poligoni ABCDE FGHIK sono in duplicata ragione de' lati omologi AB FG . Il che ec.

Co-

Corollario. Dunque presa una terza proporzionale a due lati omologi del primo, e del secondo rettilineo simile, starà il primo rettilineo al secondo, come il lato del primo a quella terza proporzionale, presa dopo il primo ed il secondo lato.

PROPOSIZIONE 21.

I rettilinei simili ad un terzo sono pure simili tra loro.

I rettilinei ABC DEI (*Fig.* 153) simili all' HFG sono pure simili tra loro.

Perchè gli angoli A B C essendo uguali agli angoli H F G, e questi essendo pure uguali agli angoli D E I, per ciò ancora gli angoli A B C sono uguali a' corrispondenti D E I; ed essendo l' AB alla BC come l' HF alla FG, e l' HF alla FG come la DE alla EI; dunque sarà l' AB alla BC come la DE alla EI (11. V); e così ancora le ragioni di altri due lati del rettilineo ABC, e di altri due omologi del rettilineo DEI, saranno uguali; dunque essi rettilinei, simili al terzo HFG, sono pure simili tra loro. Il che ec.

PROPOSIZIONE 22.

Se quattro linee sono proporzionali, i rettilinei simili e similmente descritti sopra alle prime due saranno proporzionali ad altri due rettilinei simili, descritti sopra all' altre due: e viceversa, se quattro rettilinei sopra a quattro linee similmente descritti, a due a due simili, saranno propor-

zionali; ancora esse linee debbono essere proporzionali .

Siano proporzionali le quattro rette AB CD EF GH (*Fig.* 154), cioè sia come l' AB alla CD così la EF alla GH: dico che i rettilinei simili AIB CKD, similmente descritti sulle AB CD sono proporzionali ai rettilinei simili ELMF GNOH descritti sulle due EF GH: e viceversa se li rettilinei AIB CKD sono proporzionali a' rettilinei ELMF GNOH, sarà pure l' AB alla CD, come la EF alla GH .

Imperocchè essendo la ragione dell' AB alla CD uguale alla ragione dell' EF alla GH, la duplicata della prima, che è quella del rettilineo AIB al suo simile CKD, sarà pure uguale alla duplicata della seconda , che è quella de' simili rettilinei ELMF GNOH (20. VI); dunque il rettilineo AIB al rettilineo CKD sta come l' ELMF al GNOH : e viceversa essendo proporzionali questi rettilinei, a due a due simili , sarà la ragione duplicata dell' AB alla CD uguale alla duplicata dell' EF alla GH , le quali si suppongono lati omologi; dunque ancora la semplice ragione dell' AB alla CD è uguale alla semplice ragione dell' EF alla GH; e però sta la AB alla CD come l' EF alla GH . Il che ec.

PROPOSIZIONE 23.

I parallelogrammi equiangoli hanno tra loro la ragione composta dalle ragioni de' lati .

Siano gli ABCD ECGF (*Fig.* 155) parallelogrammi equiangoli: dico che hanno tra loro la ragione composta dalle ragioni de' lati, cioè da

quelle della BC alla CG e della DC alla CE.

Pongasi per diritto la DC alla CE, riescirà pure la BC per diritto alla CG, essendo l'angolo BCD uguale all' ECG; e compiuto il parallelogrammo DCGH, si faccia come la DC alla CE, così la CG ad un' altra K. Il parallelogrammo ABCD all' ugualmente alto DCGH è come la base BC alla base CG (1.VI), ed esso DCGH all'ECGF è come la DC alla CE, o come la CG alla K; dunque per l' ugualità ordinata sarà l'ABCD all' ECGF come la BC alla K: ma la BC alla K è in ragione composta della BC alla CG, e della CG alla K (*Def.* 5. VI. *Nota*), l' ultima di cui cioè la CG alla K sta come la DC alla CE. Dunque l' ABCD all' ECGF ha la ragione composta dalle ragioni de' lati BC CG, e DC CE. Il che ec.

Corollario. Quindi i parallelogrammi equiangoli sono, come il prodotto de' lati del primo al prodotto de' lati del secondo (*Def.* 5. VI. *Nota*).

PROPOSIZIONE 24.

Li parallelogrammi, che sono d' intorno al diametro di un parallelogrammo, sono simili a questo, e tra loro.

Nel parallelogrammo ABCD (*Fig.* 156) per qualunque punto F del diametro AC tirate le GH KE parallele a' lati, ne risultano intorno al medesimo diametro i parallelogrammi AEFG CHFK simili tra loro ed al tutto.

Imperocchè riescono equiangoli, e però simili, tutti i triangoli AEF ABC FHC, e gli opposti a

questi; dunque l'AE all'EF sta come l'AB alla BC, come l' FH alla HC: ed essendo l' AG uguale all' EF, l'AD uguale alla BC, l'FK uguale all'HC, dunque ancora l' AE all'AG come l' AB all'AD, come l' FH alla FK. Dunque tali parallelogrammi sono equiangoli, ed intorno agli angoli uguali hanno i lati proporzionali, e però sono simili al tutto, e fra sè stessi. Il che ec.

PROPOSIZIONE 25. PROBL.

Costituire un rettilineo simile ad un dato rettilineo, ed uguale ad un altro dato.

Bisogna costituire un rettilineo LMNOP (*Fig.* 157) simile al dato ABCDE, ed uguale all' altro dato F.

Fasciasi il rettangolo ABIH uguale al rettilineo ABCDE (45. I), ed alla retta BI si adatti pure il rettangolo IBGK uguale al rettilineo F, e tra le due AB BG si trovi la media proporzionale LM (13. VI), sopra di cui si descriva il rettilineo LMNOP simile al dato ABCDE (18. VI); sarà questo stesso uguale all' F; imperocchè l'ABIH al BIKG è come l' ABCDE all' F, è come l' AB alla BG; ma ancora l'ABCDE all'LMNOP è come l'AB alla BG: essendo questa ragione duplicata della ragione della AB alla media LM; quale pure è la ragione del rettilineo ABCDE al simile LMNOP (20. VI). Dunque il rettilineo LMNOP è uguale all' F. Il che dovea farsi.

PROPOSIZIONE 26.

Se da un parallelogrammo si tragga un parallelogrammo simile al tutto e similmente posto, e che abbia un angolo comune ad esso; egli col tutto sarà d' intorno al medesimo diametro.

Se nel medesimo angolo A (*Fig.* 158) del parallelogrammo ABCD si descriva un simile parallelogrammo AEHI similmente posto; sarà d' intorno al diametro AH, che è parte del tutto AC.

Altrimenti se fosse come il parallelogrammo AEFG, il cui angolo F è fuori del diametro AC, sarebbe l' AE alla EF come la AB alla BC, per la similitudine de' parallelogrammi: ma l' AB alla BC è come la AE alla EH, per la similitudine de' triangoli ABC AEH. Dunque sarebbe l' AE alla FE, come la AE alla EH; onde l' EF uguale alla EH, il tutto alla parte. Il che è impossibile ec.

PROPOSIZIONE 27.

Dei parallelogrammi alla stessa retta applicati, con mancanza di parallelogrammi simili, e similmenti posti, a quello che si descrive dalla metà di essa linea; questo è il massimo di tutti.

Sia la retta AB (*Fig.* 159), la quale sia segata per mezzo nel punto C, e alla medesima AB siano adattati i parallelogrammi AD AG mancanti dei parallelogrammi BD BG simili all' AD, che si descrive dalla AC, metà dell' AB: dico, che questo è il massimo di tutti.

Imperocchè essendo intorno al medesimo diametro DB li mancamenti simili GKBI DCBE (26. VI), sarà l' NGIE uguale all' MGKC (43. I); ed aggiunto il comune KGIB, riesce l' NKBE uguale all' MCBI, uguale all' MCAF (36. I); posto comune il CMGK, sarà l' AFKG uguale all' MCBENG; ma questo è un gnomone minore del parallelogrammo DCBE, e conseguentemente ancora minore dell' AHDC. Dunque l' AHDC è il massimo di tutti. Il che ec.

Corollario. Quindi de' parallelogrammi inscritti in un triangolo ABL, co' lati paralleli a' lati di esso triangolo, il massimo è l' AHDC, il quale divide pel mezzo tutti i lati BL AL AB di esso triangolo (2. VI), siccome l' AC è la metà dell' AB.

PROPOSIZIONE 28. PROBL.

Ad una data retta adattare un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo, e che manchi d' un parallelogrammo simile ad un dato. Non dee però il dato rettilineo esser maggiore del parallelogrammo, che si adatta alla metà della retta data; simili essendo li mancamenti, e del parallelogrammo che si adatta alla metà, e di quello al quale conviene che manchi un simile.

Ad una data retta AB (*Fig.* 160) bisogna adattare un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo C, e che manchi d' un parallelogrammo simile ad un dato D. Non dee però il dato rettilineo C essere maggiore (27. VI) del parallelogrammo, che si potrebbe applicare alla metà della data linea AB.

Divisa pel mezzo l' AB in E, si descriva sopra l' AE il parallelogrammo AEFH simile al dato D (18. VI), il quale se fosse uguale al dato rettilineo C, sarebbe applicato alla data AB, col mancamento dell' altro a sè uguale e simile EFGB; ma essendo l' AEFH maggiore del C, si faccia il parallelogrammo KNMD simile pure al D, ed uguale all' eccesso del medesimo AEFH sopra il C (25. VI); e prese le rette, FQ uguale alla KT, ed FO uguale alla KN, si compisca il parallelogrammo FOPQ, che sarà uguale al KNMT, e simile all' EFGB, e però intorno allo stesso diametro FB (26. VI); e prolungate la QP in Z, e la OP sino alle rette AH BG ne' punti S R; il parallelogrammo AZPS sarà uguale al rettilineo C, ed applicato alla retta AB, colla mancanza del parallelogrammo PZBR simile al D. Imperocchè essendo l' FQPO uguale al KTMN, che è uguale alla differenza tra il parallelogrammo HFEA (ovvero EFGB) e il rettilineo C, sarà questo uguale al gnomone QPOEBG; ma essendo il QPRG uguale all' OPZE (43. I), aggiunto il comune ZR, sarà il QZBG uguale all' OEBR, uguale all' SOEA, e di nuovo aggiunto comune l' OPZE, sarà esso gnomone QPOEBG uguale al parallelogrammo AZPS; e però questo pure uguale al C, ed applicato alla data AB, col mancamento ZPRB simile al D. Il che ec.

Proposizione 29. Probl.

Alla data retta linea applicare un parallelo-

grammo uguale ad un dato rettilineo, e che ecceda d' un parallelogrammo simile a un dato .

Sia data la retta linea AB (*Fig.* 161); il dato rettilineo , l' uguale a cui deve adattarsi alla AB , sia il C; e quel parallelogrammo , il simile a cui ecceder deve, sia il D: bisogna alla data retta AB adattare un parallelogrammo uguale al dato rettilineo C, e che ecceda del parallelogrammo simile al D .

Si seghi l'AB pel mezzo in E, e sopra l'EB fatto il parallelogrammo EFGB simile al dato D, si faccia simile al medesimo un parallelogrammo HIKS uguale ai due rettilinei insieme EFGB C (25 VI). Indi prodotti i lati FE FG, si tagli l'FL uguale all' IH, e l' FM uguale all' IK , e si compisca il parallelogrammo FLNM, che sarà uguale all' HIKS , e simile ad esso, ed all'altro EFGB , essendo ambidue simili al D ; onde saranno intorno al medesimo diametro FBN (26. VI); ed essendo il gnomone ELNMGB l' eccesso del parallelogrammo FLNM sopra l' EFGB, sarà quel gnomone uguale al rettilineo C; ma essendo il GMPB uguale all' EBOL , e questo uguale all' EARL , essendo la base EB uguale all' EA ; sarà il GMPB uguale all' EARL , ed aggiunto comune l' ELNP , il gnomone ELNMGB sarà uguale al parallelogrammo ARNP; dunque questo applicato alla data AB, ed eccedente del parallelogrammo BONP, simile al D, è uguale al dato rettilineo C . Il che ec. (*a*).

(*a*) Alcuni Matematici , come il P. de Chales nel suo Corso Matematico , ed il P. Tacquet ne' suoi Elementi di Geometria, e M. Ozanam negli Elementi d' Enclide, tralasciano queste ultime tre proposizioni asserendo , che *nullius fere sunt usus* , e che sono *de petite consequence* . Io però osservo , essere la

PROPOSIZIONE 30. PROBL.

Dividere una data retta nell' estrema e media ragione.

Sia AB (*Fig.* 162) la data retta: bisogna dividerla nell' estrema e media ragione.

Dividasi in maniera, che il rettangolo ABC sia uguale al quadrato della rimanente AC (11. II). Sarà dunque tutta l' AB alla parte AC, come la medesima AC alla residua CB (17. VI): dunque tutta la AB resterà divisa in C secondo l' estrema e media ragione (*Def.* 3. VI). Il che ec.

PROPOSIZIONE 31.

Ne' triangoli rettangoli la figura che si fa dal lato sotteso all' angolo retto, è uguale a quelle che si fanno dai lati, che l' angolo retto comprendono, simili e similmente descritte.

Nel triangolo rettangolo BAC (*Fig.* 163) le fi-

proposizione XXVII, molto utile alla questione *de maximis, & minimis*, e le altre due Proposizioni XXVIII, e XXIX essere adattate alla soluzione di qualunque Problema piano, la qual sempre si riduce, come vedrassi nell' Algebra, all' equazione, in cui un dato piano si uguaglia alla somma, o alla differenza di un rettangolo compreso da una linea data, e dalla ignota che ricercasi, ed al quadrato di questa ignota; la quale somma importa il parallelogrammo rettangolo applicato ad una data linea coll' eccesso di un parallelogrammo simile ad un quadrato: e la differenza di essi trovasi pure, applicando alla data linea il parallelogrammo, con mancanza di un parallelogrammo simile ad un quadrato; le quali cose possono eseguirsi, come in queste proposizioni ultime si è insegnato; e però non parmi doversi ammettere, che sieno *di verun uso*, *e di piccola conseguenza*, come dagli Autori citati si crede.

gure simili F G, fatte sopra i lati BA CA contenenti l' angolo retto A, sono uguali alla figura E simile a ciascuna di esse, descritta sopra il lato BC sotteso all' angolo retto.

Condotta dall' angolo retto la perpendicolare AD sopra la base BC, saranno proporzionali le rette CB CA CD (8. VI, *coroll.*), ed ancora le tre altre CB BA BD: dunque la figura E alla simile G stà, come il lato BC al CD (20. VI, *coroll.*), e invertendo, la G alla E come il CD al BC; ma similmente la F alla E come il BD al BC: dunque (24. V) le G F alla E staranno come li CD BD insieme al BC; ma li CD BD insieme uguagliano il BC; dunque ancora le G F insieme sono uguali alla E. Il che ec. (*a*).

(*a*) Essendo tutti i quadrati figure simili, e tutte le simili figure in duplicata proporzione de' lati omologi; perciò le simili figure sono come i quadrati de' lati corrispondenti, e per ciò solo resta dimostrato, che le figure simili, fatte sopra i due lati contenenti l' angolo retto, debbono essere uguali alla figura loro simile, fatta sopra la base di esso triangolo rettangolo: siccome i due quadrati fatti dai lati sono uguali al quadrato sopra la base opposta all' angolo retto (47. I).

E perchè ancora i semicircoli sono figure simili, (siccome qualsivoglia altro segmento circolare è simile ad un segmento, che comprende un angolo uguale a quello, che si comprende in esso (*Defin.*9.III)) perciò se nel semicircolo BEC (*Fig.* 164) si descriverà il triangolo BAC, che sarà rettangolo in A (31.III), e sopra agli altri lati AB AC si descriveranno i mezzi cerchi BGA, CFA, saranno questi due presi insieme uguali all' altro BEC; onde tolti li comuni segmenti BEA, AHC, rimangono le lunette BGAEB CFAHC insieme uguali al triangolo BAC. E se il punto A è preso nel mezzo dell' arco BAC, esse lunette dall' una, e dall' altra parte essendo tra loro eguali, ciascuna di esse sarà uguale alla metà del triangolo BAC, come fu proposto da Ippocrate Chio.

PROPOSIZIONE 32.

Se due triangoli hanno due lati proporzionali, e concorrendo in un punto l'uno e l'altro triangolo, riescano paralleli i lati omologi; li rimanenti saranno posti per diritto fra loro.

Siano li due triangoli ABC DCE (*Fig.* 165), i quali abbiano i due lati AB AC proporzionali ai due lati DC DE, cosicchè sia l'AB all'AC come il DC al DE, e concorrendo nel punto C l'uno e l'altro triangolo, riescano paralleli i lati omologi: dico, che gli altri lati BC CE son per diritto fra loro.

Imperocchè il parallelismo de'lati omologi fa gli angoli A D uguali al terzo alterno ACD; dunque sono essi angoli A D uguali: ed avendo i lati d'intorno proporzionali, gli altri angoli pure saranno uguali (6. VI). Dunque l'angolo B è uguale all'angolo DCE; ed essendo l'angolo A uguale all'angolo ACD, li due angoli insieme A B saranno uguali all'ACE: e posto comune l'angolo ACB, sono i tre angoli del triangolo ABC uguali agli angoli ECA ACB: e però questi sono pure uguali a due retti, onde li due lati BC CE fanno una retta linea BCE. Il che ec.

PROPOSIZIONE 33.

Ne' cerchi uguali gli angoli fatti al centro, ed ancora quelli fatti alla circonferenza, sono proporzionali agli archi, cui insistono; ed ancora i set-

tori sono come i detti archi, o come gli angoli da loro compresi al centro.

Siano cerchj uguali gli ABI EFP (*Fig.* 166); ed a' loro centri D H siano gli angoli BDC FHG; alle circonferenze poi siano gli angoli BAC FEG: dico, che come l'arco BC all' arco FG così è l'angolo BDC all' angolo FHG, e l'angolo BAC all' angolo FEG, e il settore BDC al settore FHG.

Replicato l' arco BC nel CI, e l' arco FG nei GK KP, quanto moltiplice è l' arco BCI dell'arco BC, tanto moltiplice sarà l' angolo BDI dell' angolo BDC, essendo gli angoli BDC CDI uguali, come corrispondenti ad archi uguali (27. III): e similmente quanto moltiplice è l'arco FP dell'FG, tanto moltiplice è l' angolo FHP dell' angolo FHG, mentre agli archi uguali FG GK KP corrispondono altrettanti angoli uguali FHG GHK KHP. E se l'arco BI fosse uguale all' arco FP, sarebbe l' angolo BDI uguale all' FHP; se maggiore, maggiore; se minore, minore. Dunque sarà il BC all' FG come il BDC all' FHG; mentre gli ugualmente moltiplici degli antecedenti si accordano in uguagliare, superare, o mancare dagli ugualmente moltiplici de' conseguenti. Il che primieramente si dovea dimostrare.

Inoltre perchè gli angoli BAC FEG alla circonferenza sono la metà di quelli al centro BDC FHG (20. III); perciò ancora essi essendo proporzionali a questi angoli fatti al centro, saranno pure come gli archi BC FG, sopra di cui insistono.

E perchè ancora tirate le corde BC CI, sono uguali tra loro, e similmente sono uguali le cor-

de FG GK KP(29.III), ed i segmenti, cui le corde uguali sono sottese, tra loro pure sono uguali(24.III), siccome ancora uguali sono i triangoli, che hanno le basi uguali, ed i lati uguali; ne segue, che il settore CDI è uguale al BDC, ed il settore FHG e uguale al GHK, è uguale al KHP; onde quanto moltiplice è l'arco BI dell'arco BC, tanto è moltiplice il settore BDI del settore BDC; e similmente quanto moltiplice è l'arco FP dell'arco FG, tanto è moltiplice il settore FHP del settore FHG: che se l'arco BCI è uguale, maggiore, o minore dell'arco FGKP, sarà pure il settore BDI uguale, maggiore, o minore del settore FHP: dunque il settore BDC al settore FHG è come l'arco BC all'arco FG, o come l'angolo BDC all'angolo FHG. Il che ec. (*a*).

(*a*) Si tralasciano i Libri VII, VIII, IX e X degli Elementi di Geometria d'Euclide, perchè di essi i primi tre parlano de' numeri, le cui proprietà appartengono all'Aritmetica, e l'altro discorre delle linee incommensurabili, cioè che non hanno tra loro veruna misura comune, le quali più brevemente, e più chiaramente potrebbero osservarsi col calcolo analitico. Per ora basta avvertire, che le quantità commensurabili avendo qualche misura comune, che può prendersi per unità, sono proporzionali a' numeri, i quali sempre si misurano dall'unità, compresa alquante volte in uno, e certe altre volte in qualunque altro; ma le quantità continue possono essere incommensurabili, essendo proporzionali non a numeri, ma a radici quadrate, cubiche, biquadratiche, ec. di numeri non quadrati, nè cubi, nè biquadrati, ec.

Così il diametro d'un quadrato è incommensurabile col lato di esso, a cui sta, come la radice quadra di 2 ad 1. La perpendicolare d'un triangolo equilatero sta al lato di esso, come la radice quadra di 3 a 2, le quali sono radici irrazionali; però queste si dicono incommensurabili in lunghezza, non in potenza. Che se tra due linee, le quali sieno tra loro, come l'unità ad un numero non quadrato, nè cubico, per esempio, come 1 a 7, si prendano due linee medie proporzio-

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO UNDECIMO

DEFINIZIONI.

Chiamasi *Corpo solido* quello, che ha l'estensione in lunghezza, in larghezza, ed in grossezza.

II. I *Termini* di qualunque solido, da' quali è compreso, sono le superficie.

III. Una *linea retta* AB (*Fig.* 167) dicesi *perpendicolare al piano* FCE, quando con tutte le linee BF BD BC BE tirate dal suo termine B in detto piano, faccia gli angoli retti ABF ABD ABC ABE.

IV. Il *piano* HIE dirassi *perpendicolare al piano* FCE, se qualunque retta AB, condotta in uno di essi piani perpendicolare alla comune sezione

nali; saranno queste $\sqrt[3]{7}$, e $\sqrt[3]{49}$, cioè come la radice cubica di 7, e come la radice cubica di 49, le quali paragonate alle date due linee, che erano, come 1 a 7, riescono incommensurabili ad esse non solo in lughezza, ma ancora in potenza quadrata; e prese tra esse più medie proporzionali, possono essere incommensurabili ancora in potenza cubica, ed in altre di grado maggiore.

Però essendo più necessario di tali osservazioni l'esame delle figure solide, di cui tratta Euclide nel Libro XI, e XII de' suoi Elementi, quindi dopo il sesto libro si fa passaggio all undecimo, come da altri Matematici si è stimato opportuno di fare.

GE di ambidue i piani, riesca pure all' altro piano FCE perpendicolare.

V. *L' inclinazione della retta* AD (*Fig.* 169) *al piano* FCE è l' angolo ADB, che risulta, se da un punto sublime A di essa linea, tirata la perpendicolare AB sopra esso piano, si tirerà nel medesimo piano la retta BD, che congiunge i termini d' ambedue queste linee.

VI. L' *inclinazione del piano* GFCH (*Fig.* 169) *al piano* FCE è l' angolo acuto ADB compreso da due rette linee DA DB tirate dal medesimo punto D della comune sezione FC di ambi i piani, in ciascuno di essi perpendicolare alla stessa sezione, di maniera che sieno retti gli angoli ADC BDC.

VII. Due piani si diranno *ugualmente*, o *similmente inclinati*, come due altri piani, quando l' angolo dell' inclinazione de' due primi sarà uguale all' angolo dell' inclinazione degli altri.

VIII. Piani tra loro *paralleli* sono quelli, che in infinito continuati mai non converrebbero insieme.

IX. Le *figure solide simili* sono quelle, che da' piani simili, uguali di numero, e con uguale ordine disposti, sono contenute.

X. *Uguali*, e *simili* saranno quelle figure solide, che da simili ed uguali piani, nell' istesso numero, e col medesimo ordine, saranno comprese.

XI. *Angolo solido* è l' inclinazione di più di due linee non poste nel medesimo piano, e concorrenti in un medesimo punto; *o pure*, è il concorso di più di due angoli piani non posti nel piano medesimo, e terminati in un solo punto.

XII. La *piramide* è una figura solida compresa da più piani convenienti in un punto, e dal piano opposto a tale punto, in cui convengono i detti piani.

XIII. Il *prisma* è una figura solida compresa da due piani paralleli, simili, uguali, e similmente posti; e da altri piani parallelogrammi; compresi, e da' lati de' piani opposti, e dalle linee, che ne connettono gli angoli corrispondenti.

XIV. La *sfera* è una figura solida nata dalla rivoluzione d' un semicircolo intorno al suo diametro tenuto fisso, finchè ritorni al medesimo sito d' onde cominciò a muoversi.

XV. Esso diametro fisso dicesi l' *asse* della sfera.

XVI. Il *Centro* della sfera è quel medesimo punto, che serviva di centro al semicircolo generatore.

XVII. Il *diametro* di essa sfera è qualunque linea retta, che passa pel centro, e termina dall' una, e dall' altra parte alla superficie sferica.

XVIII. Il *cono* si descrive dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno ad uno de' lati contenenti l' angolo retto, il qual lato rimanga fermo, finchè girando la figura triangolare ritorni al medesimo sito, d' onde cominciò a muoversi. E se il lato fisso è uguale all' altro intorno all' angolo retto, dirassi il *Cono ortogonio*, cioè *rettangolo*: se è minore quello di questo, dirassi *ambligonio*, cioè *ottusiangolo:* e se maggiore, dirassi *oxigonio*, cioè *acuziangolo*.

XIX. Quel lato fisso, intorno a cui gira il Trian-

Triangolo, si dirà *asse* del Cono, generato da esso.

XX. Il cerchio descritto dal lato, che gira, si dice *base* di esso Cono.

XXI. Stando fermo un lato di qualche rettangolo, il qual si rivolga intorno ad esso, fino che ritorni al primiero sito, la figura così descritta si dice *Cilindro*.

XXII. L' *asse* del Cilindro è quella linea fissa, intorno a cui girando il rettangolo, lo descrive.

XXIII. I cerchi descritti dagli altri due lati opposti di esso rettangolo, sono le *basi* di esso Cilindro.

XXIV. I Coni, ed i Cilindri *simili* sono quelli, che hanno gli assi, ed i diametri delle basi tra loro proporzionali.

XXV. Il *Cubo* è una figura solida contenuta da sei quadrati uguali.

XXVI. Il *Tetraedro*, che è una Piramide regolare, è una figura solida contenuta da quattro triangoli uguali, ed equilateri.

XXVII. L' *ottaedro* è una figura solida compresa da otto triangoli uguali, ed equilateri.

XXVIII. Il *dodecaedro* è una figura solida contenuta da dodici Pentagoni uguali, equilateri, ed equiangoli.

XXIX. L'*Icosaedro* è una figura solida compresa da venti triangoli uguali, ed equilateri.

XXX. Il *Parallelepipedo* è figura solida, contenuta da sei parallelogrammi, di cui gli opposti sono paralleli, ed uguali.

PROPOSIZIONE I.

Di una linea retta non può essere una parte in un piano, ed un' altra parte elevata dal medesimo piano.

Imperciocchè non è possibile, che della linea retta ADB (*Fig.* 170) una parte BD sia nel soggetto piano ECF, e la parte AD in un piano elevato: altrimenti prolungata la BD verso G nello stesso piano, converrebbero due rette linee GB ADB in una porzione comune DB; il che è impossibile (*Assiom.* 10): dunque della linea retta non è parte nel soggetto piano, e parte in un altro elevato da esso. Il che ec.

PROPOSIZIONE 2.

Se due linee rette si segano, stanno in un medesimo piano; e ancora qualunque triangolo consiste in un piano stesso.

Le linee rette AB CD (*Fig.* 171) si seghino nel punto E; dico che sono in un piano, e che ogni triangolo DEB consiste in un piano.

Imperocchè se la parte FEG del triangolo EDB fosse in un piano, ed il resto FDBG in un altro; della retta ED la parte EF sarebbe in un piano, e l' altra parte FD fuori di esso sarebbe elevata, il che è impossibile (1. XI). Dunque il triangolo DEB è in uno stesso piano, e così ancora le rette ED EB sono in esso, nè le rimanenti CE AE possono essere sollevate dal medesimo piano; e però

le rette AB CD, che si segano, stanno in un medesimo piano. Il che ec.

PROPOSIZIONE 3.

Se due piani si segano, la loro comune sezione è una linea retta .

Siano i due piani ABG ECF (*Fig.* 172) che si seghino : dico, che la loro comune sezione HD è una linea retta .

Altrimenti si potrà tirare nel piano ABG la retta HKD, e nell' altro ECF la retta HID , le quali due rette linee comprenderebbero spazio, il che è impossibile (*Assiom.* 9) ; dunque la comune sezione è la retta linea HD. Il che ec.

PROPOSIZIONE 4.

Se una linea retta è perpendicolare a due linee rette che si segano, sarà ancora perpendicolare al piano che passa per dette linee .

Sia la retta AB (*Fig.* 173) perpendicolare alle due CD EF , nel punto B in cui si segano : dico , che sarà ancor perpendicolare al piano che passa per le CD EF .

Si tiri per lo stesso punto B un'altra linea GBH, e posta la BC uguale alla BD , e la BF uguale alla BE, si congiungano le rette CE FD seganti la retta HG ne' punti G H; indi da un punto sublime A della retta AB si tirino le rette AC AE AF AD AG AH. Ne' triangoli CBE DBF essendo intorno l' angolo uguale al vertice B ancora i lati CB BE uguali a'

lati DB BF, sarà la base CE uguale alla base DF, e gli altri angoli uguali; e però ne' triangoli CBG DBH essendo l' angolo BCG uguale al BDH, e l' angolo CBG uguale al DBH, ed il lato CB uguale al BD; sarà ancora il lato CG uguale al lato DH, e l' altro BG uguale al BH (26. I). Similmente ne' triangoli CAB DAB essendo la CB uguale alla BD, ed il lato AB comune, e gli angoli retti in B uguali, sarà la base AC uguale alla AD; e con simil ragione si proverà ne' triangoli ABE ABF essere l' AE uguale alla AF. Dunque ne' triangoli ACE ADF essendo ciascun lato dell' uno uguale a ciascun lato dell'altro, saranno ancora gli angoli corrispondenti ACE ADF uguali (8. I); onde ne' triangoli ACG ADH vi sono i lati AC AD, ed i lati CG DH uguali intorno a' detti angoli uguali ACG ADH; e però la base AG uguale all'AH; e finalmente ne' triangoli AGB AHB essendo tutti i lati dell' uno uguali a tutti i lati dell' altro, cioè il BG uguale al BH, e l'AB comune, e l'AG uguale all'AH; perciò l' angolo ABG è uguale all' ABH; i quali dunque sono retti; onde la linea AB con tutte le linee condotte per lo punto B nel piano, che passa per le rette CD EF, facendo angoli retti, è perpendicolare a detto piano (*Def.* 6. XI). Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 5.

Se una retta è perpendicolare nella comune intersezione a tre linee rette che si toccano; queste tre linee saranno in un medesimo piano.

Sia l'AB (*Fig.* 174) perpendicolare alle tre rette BC BD BE nel punto B comune ad esse: dico esser queste nello stesso piano.

Altrimenti il piano, che passa per le due BC BD segherebbe il piano condotto per le due AB BE, in un' altra retta BF, comune sezione di entrambi; onde la retta AB, che è perpendicolare alle due BC BD, farebbe angolo retto ancora colla BF esistente nello stesso piano CBD (4. XI); dunque nel piano ABF sarebbe l' angolo retto EBD uguale al retto FBD, la parte al tutto; il che è impossibile. Dunque la BE era nello stesso piano dell' altre due BC BD, e non sollevata da esso. Il che ec.

PROPOSIZIONE 6.

Se due rette linee sono perpendicolari ad un piano, saranno fra loro parallele.

Siano le due rette AB CD (*Fig.* 175) perpendicolari al piano BED: dico che le AB CD sono parallele fra loro.

Congiungasi la BD, e ad angolo retto ad essa si tiri nello stesso piano la DE uguale all' AB, e si congiungano le rette BE EA AD. Essendo intorno agli angoli retti ABD BDE il lato AB uguale all' ED, ed il lato BD comune, sarà la base AD uguale alla BE; dunque ne' triangoli ADE ABE essendo l'AD uguale all'EB, la DE uguale alla BA, e la base AE comune, l' angolo ADE è uguale all' ABE, cioè retto; onde la ED facendo angolo retto colle tre linee BD AD CD, però queste sono in un medesimo piano (5. XI): ma nel piano delle due BD AD

è ancora l'AB, che fa con esse un triangolo (2. XI); dunque le due rette AB CD sono in un medesimo piano: ed essendo i due angoli interni ABD CDB retti, esse linee sono parallele. Il che ec.

PROPOSIZIONE 7.

La retta che congiunge due punti di due linee parallele, è nel medesimo piano di esse.

Sia la retta linea AC (*Fig.* 176) che congiunga i due punti A C delle due rette parallele AB CD: dico esser l' AC nello stesso piano delle AB CD.

Perchè se si sollevasse in un altro piano, come l'AEC, questo continuato segherebbe il piano delle parallele nella retta AC (3. XI); dunque due rette linee AEC AC comprenderebbero spazio; il che è impossibile (*Assiom.* 9).

PROPOSIZIONE 8.

Essendo due rette parallele, se una di esse è perpendicolare ad un piano; ancora l' altra sarà perpendicolare al medesimo piano.

Sia delle rette parallele AB CD (*Fig.* 175) la AB perpendicolare al piano BED: dico che anche la CD sarà perpendicolare al piano medesimo.

Si faccia la costruzione, come nella *Prop.* 6, e con la stessa dimostrazione si proverà essere angoli retti gli EDA EDB; quindi la ED è perpendicolare al piano di esse parallele, onde ancora è retto l'angolo CDE: ma anche l' angolo CDB è retto, essendo l' angolo ABD dell' altra parallela pur

retto; dunque ancora la CD è perpendicolare allo stesso piano. Il che ec.

PROPOSIZIONE 9.

Le linee rette che sono parallele ad una terza, posta fuori del loro piano, saranno pure parallele tra loro.

Le linee rette AB CD (*Fig.* 177) sieno parallele alla EF, non esistente con esse nello stesso piano: dico che la AB è parallela alla CD.

Piglisi nella retta EF un punto G, da cui nel piano delle due parallele AB EF si tiri la perpendicolare GH, e nel piano delle parallele EF CD la perpendicolare GI. Essendo gli angoli EGH EGI retti, è la EG perpendicolare al piano HGI; dunque ancora le AB CD parallele alla EG sono allo stesso piano perpendicolari (8. XI), e però sono tra loro parallele (6.XI). Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 10.

Se due rette concorrenti in un punto sono parallele a due altre convenienti in un punto, fuori del medesimo piano, faranno angoli uguali.

Siano le due rette AB CB (*Fig.*178), concorrenti in B, parallele alle DE FE, che convengono in E, fuori del piano ABC: dico che fanno gli angoli ABC DEF uguali.

Pongasi l' ED uguale alla BA, e l' EF uguale alla BC; congiunte le rette AD BE CF saranno uguali, e parallele (33. I): dunque ancora con-

giunte le due AC DF riescono uguali ; onde tutti i lati del triangolo ABC uguagliando i lati dell' altro DEF , sarà l' angolo ABC uguale al DEF . Il che ec.

PROPOSIZIONE 11. PROBL.

Da un punto sublime tirare una retta perpendicolare al soggetto piano .

Sia A (*Fig.* 179) il dato punto sublime : bisogna dal punto A tirare una perpendicolare al soggetto piano .

Si tiri in esso piano qualunque retta GD , a cui dal punto A si mandi la perpendicolare AC , ed alla stessa GD si alzi dal punto C la perpendicolare CB nel medesimo piano ; indi sopra la CB dal punto A tirando la perpendicolare AB , sarà questa perpendicolare al soggetto piano . Imperocchè tirata pel punto B la FBE parallela alla GD , siccome la GC facendo angolo retto colla CA , e colla CB . è perpendicolare al piano ACB , così ancora la FB sarà perpendicolare al medesimo piano (6. XI) : dunque l' angolo ABF , e l' angolo ABC sono retti , e però l' AB è perpendicolare al soggetto piano. Il che ec.

PROPOSIZIONE 12. PROBL.

Da un punto posto in un piano alzare una perpendicolare al detto piano .

Sia EFG (*Fig.* 180) il dato piano , e C il punto dato in esso : bisogna dal punto C alzare una perpendicolare al piano EFG .

Da qualunque sublime punto A si tiri al piano EFG la perpendicolare AB (11. XI), e congiunta la BC , si tiri nel piano ABC la CD parallela all' AB; questa sarà pure perpendicolare al piano EFG (8. XI) . Il che ec.

PROPOSIZIONE 13.

Da un medesimo punto non possono essere alzate ad un piano due perpendicolari verso la medesima parte .

Sia il piano EFG (*Fig.* 181): dico che dal medesimo punto B in esso piano non si possono alzar due perpendicolari al detto piano .

Perchè il piano, che passa per le due AB CB , segando il piano soggetto EFG nella retta BD, sarebbero uguali gli angoli retti ABD CBD , cioè la parte al tutto; il che è impossibile. Dunque ec.

PROPOSIZIONE 14.

Se una retta è perpendicolare a due piani, questi saranno paralleli.

La retta linea AB (*Fig.* 182) sia perpendicolare ai due piani CD EF: dico esser questi paralleli.

Imperocchè se prolungati convenissero in una retta linea HG, preso in essa un punto I, e condotte in ambi i piani le rette IA IB , si farebbe un triangolo, in cui due angoli BAI ABI sarebbero due retti; il che è impossibile (17. I): dunque essi piani sono paralleli .

PROPOSIZIONE 15.

Se due rette linee congiunte in un punto sono parallele a due linee poste in un altro piano; questi due piani saranno paralleli.

Le due rette linee AG AD (*Fig.* 183), congiunte nel punto A, siano parallele alle due EF EC congiunte nel punto E, non però nel medesimo piano: dico, che i piani che passano per le AG AD, EF EC sono paralleli.

Conducasi dal punto A sopra il piano CEF la perpendicolare AB, e si tirino in esso piano le rette BI BH parallele alle EF EC, e conseguentemente parallele alle AG AD (9. XI). Dunque essendo retti gli angoli ABI ABH, saranno pure gli angoli BAG BAD retti, e però l' AB sarà perpendicolare ancora al piano DAG; dunque sono questi due piani paralleli (14. XI). Il che ec.

PROPOSIZIONE 16.

Se due piani paralleli sono segati da un altro piano, le loro comuni sezioni sono due rette parallele.

Li due piani paralleli AB CD (*Fig.* 184) siano segati da un altro piano HEGF; e le comuni loro sezioni siano le EH GF: dico che le EH GF sono parallele.

Imperocchè, se prolungate convenissero in I, sarebbero parte ne' piani paralleli, e parte fuori di essi (perchè ivi non convengono i piani equi-

distanti); il che è impossibile (1. XI). Dunque tali comuni sezioni sono parallele.

PROPOSIZIONE 17.

Se due rette sono segate da piani paralleli, saranno da essi tagliate proporzionalmente.

Le due rette AEB CFD (*Fig.* 185) siano segate dai piani paralleli HI KL MN ne' punti A E B C F D: dico che come è la AE all' EB, così è la CF alla FD.

Si tiri nel piano HI la retta AC, nel piano MN la BD, e congiunta la CB seghi il piano KL in G, indi si tirino in esso le rette GE GF. Il piano del triangolo ACB ha li comuni segamenti AC EG de' piani paralleli, tra loro paralleli (16. XI); e similmente il triangolo CBD fa le sezioni GF BD parallele: dunque sarà l' AE all' EB come la CG alla GB (2. VI), e come la CF alla FD; onde sono proporzionalmente segate le rette AB CD da essi piani paralleli. Il che ec.

PROPOSIZIONE 18.

Se una retta è perpendicolare ad un piano, ancor qualunque piano, che passi per essa linea, sarà perpendicolare al piano medesimo.

La retta AB (*Fig.* 186) sia perpendicolare al piano CD: dico, che qualunque piano EF passi per essa linea sarà perpendicolare al piano CD.

Sia la EG la comune sezione di detti piani, e da qualunque punto H di essa si tiri nel piano EF

la Hl parallela all' AB. Sarà questa pure al piano CD perpendicolare (8. XI): dunque esso piano EF sarà perpendicolare al piano CD (*Def.* 4. XI). Il che ec.

PROPOSIZIONE 19.

Se due piani perpendicolari al soggetto piano si seghino; sarà la loro comune sezione perpendicolare al soggetto piano.

Li due piani CGD EHF (*Fig.* 187) perpendicolari al piano GKH si seghino nella retta AB: dico esser l' AB perpendicolare al piano GKH.

Imperocchè la AB sarà perpendicolare alle due comuni sezioni EH GD di essi piani EF CD col piano soggetto EK; altrimenti se nel piano EF fosse la BL perpendicolare alla EH, e nell' altro CD fosse la BI perpendicolare alla GD, sarebbero le BL BI perpendicolari al piano EK (*Def.* 4. XI), il che si è dimostrato impossibile (13. XI): dunque la comune sezione AB è perpendicolare al soggetto piano EK. Il che ec.

PROPOSIZIONE 20.

Se un angolo solido è contenuto da tre angoli piani, due di essi saranno maggiori del rimanente.

L' angolo solido ABDC (*Fig.* 188) sia contenuto dai tre angoli piani BAD BAC DAC: dico, che due di essi, presi in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente.

Quando fossero tutti e tre uguali, è manifesto, essere due maggiori del terzo: ma se sono disugua-

li, sia BAC il maggiore, da cui si levi l'angolo BAE uguale al BAD; e tirata la retta BEC, posta l'AD uguale all'AE, si congiungano le BD CD. Essendo ne' triangoli BAE BAD, intorno agli angoli uguali al punto A, il lato AB comune, e l'AE uguale all'AD, sarà ancora la base BE uguale alla BD: ma le BD DC sono maggiori della BC; dunque la DC è maggiore della EC; onde nei triangoli EAC DAC essendo il lato AC comune, e l'AE uguale all'AD, ma la base EC minore della DC, sarà l'angolo EAC minore dell'altro DAC; e però essendo l'angolo BAE uguale al BAD, sono li due BAD DAC maggiori del terzo BAC. Il che ec.

PROPOSIZIONE 21.

Qualunque angolo solido è compreso da angoli piani minori di quattro retti.

Sia l'angolo solido A (*Fig.* 189) compreso dagli angoli piani BAC CAD DAE EAF FAG GAB: dico che questi angoli son minori di quattro retti.

Si taglino i lati dell'angolo solido con un piano BCDEFG, che sarà base della piramide, e opposto al vertice A, e preso in essa base qualunque punto I, si congiungano le rette IB IC ID IE IF IG. Essendo tanti i triangoli, che da' lati della base si alzano al vertice A della piramide, quanti i triangoli da' medesimi lati convergenti al punto I preso dentro la base: perciò tutti gli angoli, che sono in quelli, uguagliano tutti gli angoli di questi, i quali comprendono tutti gli angoli del poligono di essa base insieme con i quat-

tro retti, che sono intorno al punto I : ma essendo gli angoli BCA ACD maggiori del BCD, e così li due CDA ADE maggiori del CDE, ec., sono tutti gli angoli adiacenti a' lati del poligono, ne' triangoli esterni concorrenti nel punto A, maggiori degli angoli adiacenti ad essi lati ne' triangoli interni della base concorrenti al punto I; dunque gli angoli rimanenti de'triangoli esterni, che compongono l' angolo solido A, sono minori degli angoli, che hanno intorno al punto I i triangoli interni della base; e però essendo questi uguali a quattro retti, quelli ne sono minori. Il che ec.

PROPOSIZIONE 22.

Se sieno di tre angoli piani due qualsivoglia maggiori del terzo, e contenuti da rette tutte uguali; con le basi, che congiungono i termini, si potrà costituire un triangolo.

Siano li tre angoli piani BAC CAD DAE (*Fig.* 190), due de' quali presi in qualsivoglia modo siano maggiori del rimanente, cioè gli angoli BAC CAD maggiori dell' angolo DAE, li CAD DAE maggiori del BAC, e li BAC DAE maggiori del CAD; e siano uguali le rette AB AC AD AE; e si uniscano le BC CD DE: dico che da rette uguali alle BC CD DE si potrà costruire un triangolo, cioè che due delle BC CD DE sono maggiori della rimanente.

I termini B C D E di quelle rette uguali sono in un arco circolare, il cui centro A; e delle basi suddette saranno sempre due maggiori della ri-

manente; perchè se si dubitasse, essere le due BC CD maggiori dell' altra DE, si congiunga la BD. Per essere i due angoli BAC CAD, cioè l' angolo BAD maggiore dell' altro DAE, ed i lati uguali, la base BD è maggiore della base DE: ma le due BC CD sono maggiori della BD; dunque sono ancora maggiori della DE; però delle tre linee BC CD DE riuscendo sempre due maggiori della terza, se ne può fare un triangolo (21. I). Il che ec.

Proposizione 23. Probl.

Dati tre angoli come nella Proposizion precedente, i quali però sieno minori di quattro retti; farne un angolo solido.

Sieno dati li tre angoli piani BAC CAD DAE (*Fig.* 191), i quali sieno minori di quattro retti, e due di essi presi in qualsivoglia modo siano maggiori del rimanente: bisogna da angoli uguali ai BAC CAD DAE costruire un angolo solido.

Delle loro basi BC CD DE congiunte a' termini de' lati uguali di detti angoli se ne faccia un triangolo FGH (22. XI), e gli si circoscriva un cerchio, il cui raggio FI sarà minore del lato AB; perchè se gli fosse uguale, essendo nel cerchio BDE inscritte le due basi BC CD, sarebbe all' altra DE uguale la BD, essendo il cerchio del raggio AB circoscritto al triangolo delle tre linee BC CD DE: ma si è provata la BD maggiore della DE; dunque la FI non può essere uguale all' AB. Nè meno può essere la FI maggiore della BA, o della CA; perchè prolungata la CA in L, e fatta

la CL uguale all' FI , se col raggio CL si descrivesse l'arco circolare MCN, ed in esso si adattasse la CM uguale alla CD, e la CN uguale alla CB, congiunta la MN, questa dovrebbe essere uguale alla DE : ma per essere l' angolo NCM maggiore del BCD, ed il lato CN uguale al CB, e il CM uguale al CD, la base MN sarà maggiore della BD; dunque sarebbe ancora maggiore della DE; pertanto l' FI debbe essere minore dell' AB, e degli altri lati AC AD AE uguali; onde il quadrato dell'AB sarà maggiore del quadrato della FI : si ponga dunque nel centro I del circolo FGH perpendicolare al piano di esso circolo la retta IK , il di cui quadrato uguagli l'eccesso del quadrato della AB sopra il quadrato della IF : dunque congiunte le rette FK GK HK, sarà ciascuna uguale a'lati AB AC AD, essendo il quadrato della FK uguale a' quadrati delle FI IK, il quale è l'eccesso del quadrato della AB, ovvero della AC, sopra il quadrato della FI ; onde la FK è uguale all' AB , e così la KH è uguale all' AC, e la KG uguale all' AD; ed essendo le basi HF FG GH uguali alle basi BC CD DE , sarà l'angolo FKH uguale al BAC , e l' angolo FKG uguale al CAD, e l'altro GKH al DAE . Dunque l'angolo solido FKHG è composto da angoli uguali ai tre angoli piani dati BAC CAD DAE . Il che dovea farsi.

PROPOSIZIONE 24.

Se un solido sia compreso da piani paralleli , gli opposti saranno parallelogrammi simili ed uguali .

Il so-

Il solido AB (*Fig.* 192) sia compreso dai piani paralleli AG BD, BH EA, AC FB: dico che li piani di esso opposti sono parallelogrammi simili ed uguali.

Il piano AC essendo segato da' piani paralleli AE BH, le loro comuni sezioni AD HC sono parallele; e lostesso piano AC essendo ancora segato da' piani HF CE paralleli, saranno ancora le rette AH DC parallele (16. XI): dunque l'ADCH è un parallelogrammo, in cui saranno uguali i lati opposti, cioè gli AD CH, gli AH DC. Similmente si proverà essere l'EDCB un parallelogrammo, e l'EB uguale e parallelo al DC; e il DE uguale e parallelo al BC; e l'ADEF un parallelogrammo, in cui l'EF è uguale e parallelo al DA, e l'ED uguale e parallelo all'FA; onde essendo le AH EB uguali e parallele alla stessa DC, sono uguali e parallele tra loro; ed altresì le EF AD CH sono uguali e parallele: dunque l'angolo ADC sarà uguale all'angolo FEB (10. XI), e similmente gli altri angoli DCH EBG si proveranno uguali: ed è l'AD alla DC come la FE alla EB, per l'ugualità de' lati omologi: dunque sono simili, ed uguali i parallelogrammi opposti AC FB, e lo stesso proverassi degli altri FD GC, e degli FH EC. Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 25.

Se un solido parallelepipedo sia segato da un piano parallelo ai piani opposti, saranno le di lui porzioni proporzionali alle loro basi.

Sia il solido parallelepipedo ABTCDR (*Fig.* 193) segato dal piano EGFH parallelo ai piani opposti BTCO ASDR : dico, che le porzioni AEFD BEFC sono proporzionali alle loro basi AEHR BEHO .

Si concepisca prolungato dall' una , e dall' altra parte esso parallelepipedo , e presa l' AI uguale all' AE, e la BK uguale all' EB, si concepiscano eretti i piani ILQM KOPN paralleli a' piani ASDR BTCO : saranno i parallelogrammi AIMR AEHR uguali , e così ancora il BEHO uguale al BKNO , e tutti gli altri corrispondenti si uguaglieranno ; perciò il solido AEFD sarà uguale all' IADQ , ed il solido BEGC uguale al KBTP : onde quanto si moltiplicasse la base AEHR nella base EIM , tanto riuscirebbe moltiplicato il solido AEFD nel solido IEGQ ; e quanto fosse moltiplicata la base BEHO nella base EKN, tanto sarebbe il solido BEGC moltiplicato nel solido GEKP ; e secondo che fosse la base EIM uguale , maggiore , o minore della base EKN, tanto sarebbe il solido IEGQ uguale , maggiore , o minore del solido GEKP : dunque come la base AEHR alla base BEHO così debb' essere il solido AEFD al solido BEGC : come dovea dimostrarsi .

Corollario 1. È manifesto, essere dette porzioni parallelepipede , proporzionali alle loro lunghezze, o altezze AE EB , le quali sono, come la base AEHR alla base BEHO .

Corollario 2. Nella stessa maniera si proverebbe ancora ne' prismi da qualunque sorta di base poligona equabilmente promossi, che segati da un piano parallelo alle basi, ne riuscirebbero le por-

zioni proporzionali alle lunghezze, o altezze loro.

PROPOSIZIONE 26. PROBL.

Alla data retta linea, e al dato punto in essa, applicare un angolo solido uguale ad un dato.

Sia data la retta linea AB (*Fig.* 194), e in essa il punto A; e l' angolo solido dato sia il DCFE; bisogna alla data AB e al punto A in essa applicare un angolo solido uguale al dato DCFE.

Da qualunque punto F del lato CF si tiri sopra il piano DCE la perpendicolare FG, e congiunta la CG, e per lo punto G tirata in esso piano la retta DGE, si congiungano le rette DF FE: indi posto l' AH uguale alla CD, e fatto l' angolo HAK uguale al DCG, e presa l' AK uguale alla CG, e l' angolo HAI uguale al DCE, congiunta la HK, sarà uguale alla DG, per essere i lati HA AK uguali a' lati DC CG, e l' angolo compreso da essi lati uguale; ed ancora l'angolo AHK sarà uguale al CDG, e prolungata la HK in I alla retta AI, sarà la HI uguale alla DE, e l' AI uguale alla CE, perchè ne' triangoli HAI DCE gli angoli AHI HAI sono uguali agli angoli CDE DCE, ed il lato AH è uguale al CD; onde ancora la KI sarà uguale alla GE, ed eretta la KL perpendicolare al piano HAI, e fatta uguale alla GF, congiunta la retta AL, sarà fatto l' angolo solido BALI uguale al DCFE. Imperocchè congiunte le rette HL LI, essendo la HK uguale alla DG, e la KL uguale alla GF, e gli angoli retti HKL DGF uguali, ancora la base HL sarà uguale alla DF; e simil-

mente essendo la KI uguale alla GE, e la KL uguale alla GF, e gli angoli ne' punti K G retti, la base LI sarà uguale alla FE; dunque i triangoli HAL DCF hanno tutti i lati corrispondenti uguali, e però l'angolo HAL sarà uguale al DCF; similmente ciascun lato del triangolo LAI uguaglia ciaschedun lato dell' FCE: dunque ancora l' angolo LAI sarà uguale all' FCE, e l' angolo HAI uguale al DCE; dunque tutti gli angoli essendo uguali, l' angolo solido HALI uguaglia il dato angolo solido DCFE. Il che ec. (*a*).

PROPOSIZIONE 27. PROBL.

Sopra una data retta linea descrivere un solido

(*a*) Se l' angolo solido dato fosse contenuto da più di tre angoli piani, si potrebbe ad ogni modo applicare ad una data retta in un dato punto l' angolo solido uguale ad esso. Per esempio sia l' angolo dato DCEFM (*Fig.* 195) contenuto da quattro angoli piani; si seghi con un piano quadrilineo DEFM opposto al dato angolo C, indi condotta una diagonale DF, col piano CDF si dividerebbe esso angolo solido in due angoli contenuti da tre angoli piani, onde dopo aver fatto alla data retta linea, nel dato punto, un angolo uguale ad uno de' contenuti da tre angoli piani DCFE, si potrà aggiungere l' altro angolo da tre piani contenuto DCMF; onde riuscirà descritto al punto della data linea l' angolo quadrilineo uguale al dato DCEFM; e se fosse il dato angolo compreso da più di quattro angoli piani, la base di tale angolo sarebbe un poligono divisibile in più di due triangoli: onde esso angolo potrebbe dividersi in tanti angoli trilineari, quanti sono i triangoli, in cui si spartirebbe il piano della sua base; e però aggiungendo al medesimo punto dato della data retta linea, concorrente con altre, che formano i triangoli dell' angolo solido già descritto, altri angoli solidi trilineari, che sono nel dato angolo solido, riuscirà di costituire adiacente alla data linea dal punto dato un angolo solido contenuto da più angoli piani, benchè fossero più di tre, e più di quattro gli angoli componenti il dato angolo solido.

parallelepipedo simile, e similmente posto ad un altro dato.

Sia data la retta AB (*Fig.* 196), e il parallelepipedo DCEM: bisogna sulla data AB descrivere un solido parallelepipedo, simile e similmente posto al dato DCEM.

Costituiscasi al punto dato A sopra la data linea AB un angolo solido BALI uguale al dato DCFE (26. XI), e taglisi l' AL in proporzione alla CF, come la data AB al lato CD, e si faccia ancora l' AI alla CE nella medesima proporzione delle date AB CD; indi compiuti i parallelogrammi BALN IALG NLGO, si compisca il parallelepipedo co' piani paralleli a questi, che saranno parallelogrammi simili ed uguali (*Def.* 6); e sarà fatto sulla data linea AB il solido BALIO simile, e similmente posto al dato DCEFM, avendo gli angoli uguali ad esso, ed i lati proporzionali a' lati del medesimo. Il che era da farsi.

PROPOSIZIONE 28.

Segandosi un parallelepipedo con un piano, che passa per li diametri de' piani opposti, sarà segato pel mezzo.

Il solido parallelepipedo AB (*Fig.* 197) sia segato dal piano CFED, che passi pe' diametri CF DE de' piani opposti: dico che il solido AB è diviso per mezzo dal piano CFED.

Imperocchè i piani opposti GFEA CDHB, GADC FEHB essendo parallelogrammi uguali e simili; ed il piano CFED comune a' due prismi

CGFEAD CBFEHD, eretti sopra i triangoli simili ed uguali DAE EHD, a'quali pure corrispondono altri due CGF FBC simili ed uguali, così tra loro, come agli opposti; per tanto essi prismi sono uguali; onde il parallelepipedo AB resta diviso pel mezzo dal piano CEFD.

PROPOSIZIONE 29.

I solidi parallelepipedi, posti sopra la stessa base, e fra gli stessi piani paralleli, sono sempre uguali.

Siano i solidi parallelepipedi AC AK (*Fig.* 198) sopra la medesima base AH, e fra gli stessi piani paralleli AH FK; ma i lati FB DC del primo, prolungati concorrano con quelli AM GL, EI HK del secondo: dico che in simil caso li solidi AC AK sono fra loro uguali.

Imperocchè essendo la DC uguale all' EH, uguale all' IK, posta comune la CI, è la DI uguale alla CK; ma ancora la DE è uguale alla CH. e l' EI uguale all' HK; dunque il triangolo DEI è uguale e simile al triangolo CHK, e così ancora i triangoli FAM BGL sono simili, ed uguali; ed ancora il parallelogrammo DIMF è uguale, e simile al CKLB, e così il DEAF al CHGB, e l'EIMA all'HKLG; e perciò il prisma triangolare DIEMFA uguaglia il prisma CKHLBG; e tolto il comune CPIMNB, ed aggiunto a'rimanenti pezzi il prisma EPHGNA, riesce il parallelepipedo AGHCDEFB uguale all' altro AGHEMLKI. Il che ec.

PROPOSIZIONE 30.

Rimanendo ferme le altre condizioni della prop. prec., se i lati de'parallelepipedi non s'incontrassero; ancora i solidi sarebbero uguali.

Siano pertanto i solidi parallelepipedi AC AK (*Fig.* 199), sopra la medesima base AH, e fra gli stessi piani paralleli AH FK; ma i lati del primo FB DC prolungati non s' incontrino con quelli AM GL, EI HK del secondo: dico, che anche in tal caso i solidi sono uguali.

Prolungate le rette DC FB parallele alle AG IK seghino le altre rette tra loro parallele IM KL ne' punti N O Q P. Sarà il parallelogrammo NOPQ uguale al DCFB, uguale all' AEHG; onde condotte le rette EN HO AQ GP, sarà il parallelepipedo AEHGPQNO uguale all' AEHGBCDF (29.XI): e così l' AGHEMLKI uguale all' AEHGPQNO: dunque sono parimente uguali gli AEHGBCDF AGHEMLKI. posti sulla stessa base, e tra gli stessi piani paralleli, benchè non s' incontrino i lati FB DC del primo con quelli AM GL, EI HK del secondo. Il che ec.

Corollario È manifesto, che se ancora sopra la stessa base IMLK fosse tra gli stessi piani paralleli descritto un altro parallelepipedo, sarebbe uguale ad esso AGHEMLKI, e conseguentemente ancora uguale a ciascuno degli altri due AEHGBCDF AEHGPQNO; onde i parallelepipedi, che hanno basi uguali e sono tra i medesimi piani paralleli, sono sempre tra loro uguali.

PROPOSIZIONE 31.

I solidi parallelepipedi, che hanno le basi uguali, e la medesima altezza, sono uguali fra loro.

Essendo che gli stessi piani paralleli hanno la medesima altezza in qualunque sito, ed un piano parallelo alla stessa base, se fosse sopra, o sotto il parallelogrammo del parallelepipedo opposto alla base, avrebbe maggiore, o minore altezza; dunque i solidi parallelepipedi, che hanno la medesima altezza, possono disporsi tra gli stessi due piani paralleli, e però avendo le basi uguali, dovranno essere uguali tra loro (30. XI, *Coroll.*).

PROPOSIZIONE 32.

I solidi parallelepipedi, che hanno la medesima altezza, sono tra loro, come le basi.

Sieno i solidi parallelepipedi AE GO (*Fig.*200), che abbiano la medesima altezza: dico che sono tra loro come le basi AC GM.

Prolungata la LG in F, si faccia il parallelogrammo HGFI uguale all' ABCD, e si compisca il parallelepipedo FGNQRIH tra gli stessi piani paralleli dell'altro GO; sarà questo parallelepipedo uguale all' ABCDTEVS, avendo uguali basi, e la medesima altezza (31. XI): ma l' FGNQRIH all' altro GNPLOQHM è come la base alla base (25. XI), cioè come l' IFGH (che è uguale all' ABCD) alla GLMH: dunque ancora il parallelepipedo AE all'

altro GO è come la base AC alla base GM. Il che ec.

Ancora i prismi ugualmente alti sono come le loro basi; perchè se sono basi triangolari, sono la metà de' parallelepipedi eretti sopra i parallelogrammi doppj di tali triangoli: se sono basi poligone, possono dividersi in triangoli, ed essi prismi interi in altrettanti prismi triangolari proporzionali alle loro basi.

PROPOSIZIONE 33.

I solidi parallelepipedi simili sono in proporzione triplicata de' lati omologi.

Siano simili li solidi parallelepipedi HIMKZ ABDGF (*Fig.* 201): dico che il solido IK al solido BG ha triplicata ragione di quella che ha il lato IM al lato omologo EG.

Si prolunghino le rette LM IM RM per modo che siano la MO uguale all' EF, la MN all' EG, e la MP all' EA; e compiuti i parallelogrammi OMN OMP NMP, si tirino gli opposti piani paralleli, da cui si formerà il parallelepipedo OPQNM uguale e simile al dato ABDGF, avendo gli stessi angoli solidi, e i medesimi parallelogrammi uguali e simili. Prolungati ancora i parallelogrammi, si compiscano i solidi parallelepipedi KLSYM LTVSQM: sarà il parallelepipedo HIMKZ al conseguente KLSYM, come la base IR alla base RN, cioè come il lato IM all' MN; ed è il KLSYM all' LTVSQM, come la base RN alla NP, cioè come la RM all' MP: e finalmente l' LTVSQM all'

OPQNM, come la base LN alla NO, cioè come la LM all' MO: dunque la proporzione dell' HIMKZ all' OPQNM, ovvero all'uguale solido ABDGF è composta delle tre ragioni uguali, cioè della IM all' MN, della RM all' MP, e della LM all' MO, (perchè essendo simili i parallelepipedi, i loro lati omologi debbono avere la stessa proporzione). Dunque la ragione di essi parallelepipedi simili è triplicata di quella di un lato IM al lato omologo EG, uguale all' MN. Il che doveasi dimostrare.

Corollario. Se quattro linee sono proporzionali, un solido fatto sopra alla prima al solido simile fatto sopra alla seconda sta, come la prima alla quarta, che ha ragione triplicata della prima alla seconda.

PROPOSIZIONE 34.

I parallelepipedi uguali hanno le basi reciproche dell' altezze; e quei parallelepipedi, in cui le basi sono in ragione reciproca dell' altezze, sono tra loro uguali.

Sieno uguali i solidi parallelepipedi ACD NPI (*Fig.* 202): dico che la base BD alla base HI sta come l'altezza del solido NPI a quella del solido ACD. E viceversa se queste altezze sono come le basi BD HI, li solidi ACD NPI sono uguali.

Se avessero uguale altezza i solidi, dovrebbero ancora avere le basi uguali, per essere tra loro uguali; onde la base del primo alla base del secondo sarebbe, come l' altezza di questo all' altezza di quello. Se poi le altezze sono disuguali, essendo

quella del solido NPI maggiore di quella del solido ACD, si tagli l'NPI col piano OLKM parallelo alla base HGIQ, in altezza uguale a quella del solido ACD (tirata la NX perpendicolare al piano della base HGIQ, e segante il piano OLKM in V in maniera, che la VX sia uguale all'altezza del solido ACD), sarà il solido ACD al solido OLIQ come la base BZDS alla base HGIQ (32. XI): ma il solido ACD è uguale al solido NPI; dunque ancora il solido NPI al solido OLIQ starà come la base BZDS alla base HGIQ: ma il solido NPI al solido OLIQ sta come l'NH alla HO (25. XI), come l'NX alla VX; dunque la base BZDS alla base HGIQ come l'NX alla VX; e però la base dell'uno alla base dell'altro è come l'altezza di questo all'altezza di quello: e viceversa essendo la base BZDS alla HGIQ come la NX alla VX, che uguaglia l'altezza del solido ACD, sarà il solido ACD al solido OLIQ come il solido NPI al solido OLIQ; e però il solido ACD sarà uguale al solido NPI. Il che ec.

Corollario. Ancora i prismi triangolari uguali, essendo la metà di uguali parallelepipedi (28. XI) debbono avere le basi reciproche dell'altezze; e se hanno le basi reciproche dell'altezze, debbono essere uguali, essendo la stessa la proporzione delle basi di questi prismi, che quella de' parallelepipedi, e la stessa l'altezza di questi, e di quelli.

PROPOSIZIONE 35.

Essendo uguali i due angoli solidi HALI DCFE (*Fig.* 303) contenuti dagli angoli piani uguali HAI DCE, HAL DCF, LAI FCE : se dalle due linee AL CF sublimi al piano degli angoli uguali HAI DCE si tirino ad essi piani le perpendicolari LK FG, congiunte le rette AK CG, riuscirà l' angolo GCF uguale al KAL .

Sieno prese le due sublimi AL CF tra loro uguali, e tirate le LK FG perpendicolari a' piani soggetti, si conducano le KI GE perpendicolari alle AI CE, e prodotte la IK al punto H, e la EG al punto D, cioè sino agli altri lati AH CD, si congiungano le HL IL EF DF . Essendo il quadrato della AL uguale a'quadrati delle AK KL, ed il quadrato della AK uguale a' quadrati delle AI IK; perciò il quadrato della AL è uguale ai tre quadrati delle AI IK KL; ma i due quadrati delle IK KL sono uguali al quadrato della IL ; dunque il quadrato della AL è uguale ai quadrati delle AI IL; quindi l' angolo AIL è retto . Similmente si proverà retto l' angolo CEF ; dunque essendo l' angolo LAI uguale all'FCE, e l'angolo AIL uguale al CEF, ed il lato AL uguale al CF, sarà ancora l' AI uguale al CE, e l' IL uguale all'EF (26.I); però essendo ancora l' angolo HAI uguale al DCE, e l' AIH uguale al CED, ed il lato AI uguale al CE ; sarà pure l' AH uguale al CD, e l' HI uguale al DE : ed essendo uguali i lati AH CD, AL CF , e l' angolo HAL uguale al DCF, sarà pure la base

HL uguale alla DF: indi ne' triangoli HLI DFE essendo i lati del primo uguali a quelli del secondo, l' uno all' altro, ancora gli angoli corrispondenti saranno uguali; perciò ne' triangoli KIL GEF essendo l' angolo KIL uguale al GEF, ed i retti IKL EGF uguali, e la IL uguale all' EF, sarà pure l'IK uguale alla EG, e la KL uguale alla GF; onde essendo l' AI uguale alla CE, e la IK uguale all'EG, e l' angolo AIK uguale al CEG, sarà pure l' AK uguale alla CG; però ne' triangoli AKL CGF essendo l'AL uguale al CF, l' AK uguale al CG, e il KL uguale al GF, l' angolo GCF sarà uguale al KAL. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario. Essendosi mostrata la KL uguale alla GF, perciò in due angoli solidi compresi da tre angoli piani, ciascuno uguale al suo corrispondente, presi due lati uguali AL CF, e da' loro termini tirate sopra i piani opposti HAI DCE le perpendicolari LK FG, riescono queste altezze tra loro uguali.

PROPOSIZIONE 36.

Essendo tre linee rette proporzionali, il solido parallelepipedo fatto da esse è uguale al solido equilatero, fatto dalla sola media, equiangolo poi al sopraddetto.

Siano le linee rette proporzionali A B C (*Fig.* 204), e sia come la A alla B così la B alla C: dico, che il solido parallelepipedo che si fa dalle A B C è uguale al solido parallelepipedo equilatero, che si fa dalla B, equiangolo poi al sopraddetto.

Essendo la DF uguale all'A, la DE uguale alla B,

la DK uguale alla C nel parallelepipedo EDKF, e ciascun lato MN ML MQ uguale al B nell'altro solido equiangolo LMQN, sarà la DF alla MN come la MQ alla DK; onde intorno agli angoli uguali FDK NMQ essendo i lati reciproci, è il parallelogrammo FDKI uguale all'NMQR (14. VI): ed essendo la DE uguale all'ML, chi tirasse perpendicolari da' punti E L, sopra i piani KDF QMN, sarebbero nell' uno e nell' altro solido uguali le altezze (35. XI. *Coroll.*). Dunque essendo ancora le basi FDKI NMQR uguali, essi solidi parallelepipedi sono uguali. Il che ec.

PROPOSIZIONE 37.

Se quattro rette linee sono proporzionali, li parallelepipedi simili, fatti sopra le due prime saranno proporzionali a due altri, simili tra loro, fatti sopra le due ultime.

Siano le quattro rette proporzionali AB CD EF GH (*Fig.* 205): dico che i due parallelepipedi simili ABK CDL, fatti sopra le AB CD, sono proporzionali ai due simili tra loro, EFM GHN, fatti sulle EF GH.

Imperocchè il solido ABK al CDL è in ragione triplicata dell' AB alla CD (33.XI); e similmente il solido EFM al GHN è in ragione triplicata dell' EF alla GH: dunque essendo la AB alla CD come la EF alla GH, ancora la triplicata ragione della prima è uguale alla triplicata della seconda, e però il solido ABK al CDL come il solido EFM al GHN. Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 38.

Se un piano sia perpendicolare ad un altro e da qualunque punto del primo si tiri una perpendicolare sopra il secondo, essa cadrà nella comune sezione de' piani.

Sia il piano CAD (*Fig.* 206) perpendicolare al piano ADB, e da qualunque punto E del piano CAD si tiri la perpendicolare EG sopra il piano ADB: dico che la EG cadrà nella comune sezione AD de' piani CAD ADB.

Perchè se cadesse fuori come nel punto F; tirata nel piano CAD sopra la retta AD la perpendicolare EG, questa pure sarebbe al piano ADB perpendicolare; e congiunta la FG, avrebbe il triangolo EFG ne' punti F G due angoli retti; il che è impossibile. Dunque ec.

PROPOSIZIONE 39.

Nel parallelepipedo ABCDE (*Fig.*207) tirato un piano MNQP segante pel mezzo i lati AB DC GT EF de'parallelogrammi opposti BD TE, ed un altro piano KLIH segante pel mezzo i lati AD BC GE TF degli stessi parallelogrammi; la comune sezione OR di tali piani, ed il diametro del solido AF congiungente gli angoli opposti si segheranno pel mezzo nel punto S.

Si congiungano le rette AO CO GR FR: essendo l' AM uguale alla CN, (perchè sono la metà delle opposte parallele ed uguali AB DC), e l'MO

uguale all'NO, (essendo l' MN divisa pel mezzo nel punto O, siccome l' opposte, e parallele ad essa AD BC sono divise pel mezzo dalla KL) e l' angolo AMO uguale all'ONC, per essere alterni delle parallele, sarà pur l'AO uguale allaCO. e l'angolo MOA uguale all'NOC, ciascuno de'quali coll' angolo AON facendo due retti, saranno esse AO OC per diritto fra loro: e similmente si proverà essere la GRF una linea direttamente continuata, e divisa per mezzo nel punto R; onde essendo l' AG uguale e parallela alla CF (per essere ciascuna di esse parallela ed uguale alla DE), le rette AC GF sono pure uguali e parallele; onde l'ACFG è un parallelogrammo, nel di cui piano si segano le OR AF nel punto S; e ne' triangoli AOS FRS è l' angolo SAO uguale all' alterno SFR, e l' AOS uguale all' FRS, col lato AO uguale all' FR, si dimostra pure la OS uguale all' SR, e l' AS uguale all' SF: dunque la comune sezione OR di detti piani, ed il diametro, che congiunge gli angoli opposti A F del medesimo parallelepipedo, si tagliano pel mezzo nel punto S. Il che ec.

PROPOSIZIONE 40.

Due prismi d' uguale altezza, avendo il primo per base un parallelogrammo doppio della base triangolare dell' altro, sono tra loro uguali.

Siano li prismi ACED MGHK (*Fig.* 208) ugualmente alti, e il primo abbia per base il parallelogrammo ABCF, l' altro il triangolo MGH; e il paralle-

rallelogrammo sia doppio del triangolo : dico che i prismi ACED MGHK sono uguali .

Imperocchè compiuti essi prismi in parallelepipedi , con fare i parallelogrammi ABDN FCEO MGHP KLIQ , riuscirà la base MGHP uguale alla ABCF. essendo l' una e l'altra doppia del triangolo MGH ; dunque tali parallelepipedi ACEN GPQL sono uguali, avendo uguale altezza , ed uguali basi ; ma i suddetti prismi sono la metà di tali parallelepipedi (28. XI): dunque ancora essi prismi erano tra loro uguali. Il che dovea dimostrarsi .

ELEMENTI

DELLA GEOMETRIA

DI EUCLIDE

LIBRO DUODECIMO

PROPOSIZIONE I.

Li poligoni simili, inscritti ne' cerchj, sono come i quadrati de' diametri .

I poligoni simili ABCDE FGHIK (*Fig.* 209) inscritti ne'cerchj, sono come i quadrati de'diametri AL FM.

Condotte le rette EB EL KG KM, essendo l'angolo BAE uguale al GFK, ed i lati intorno ad essi proporzionali, cioè la BA all' AE come la GF alla FK per la similitudine de' poligoni , sono simili i triangoli ABE FGK; onde l' angolo ABE è uguale all'FGK: ma a quello è uguale l'angolo ALE, ed a questo si uguaglia l' angolo FMK (21. III) : dunque i triangoli ALE FMK hanno uguali gli angoli ne' punti L M , e sono gli angoli AEL FKM retti (31. III), però ancora essi triangoli sono simili; onde l'AE all' AL come l'FK alla FM, e permutando, l'AE all' FK come la AL alla FM : sicchè il poligono fatto sopra il lato AE al simile fatto sopra il lato FK, sta come il quadrato dell' AL al si-

mile quadrato della FM (22. VI) . Il che era da dimostrarsi (*a*) .

PROPOSIZIONE 2.

Li cerchj sono fra loro come i quadrati de' diametri .

I cerchj ABT EFN (*Fig.* 211) sono proporzionali a quadrati de' loro diametri AC EG .

Imperocchè si faccia come il quadrato dell' AC al quadrato dell' EG, così il cerchio AST allo spazio Z. Se questo spazio non fosse uguale all' altro cerchio ENM, o sarebbe minore, o maggiore di esso . Sia minore , sicchè gli manchi la quantità X per uguagliarlo. Inscrivasi nel cerchio ENM il quadrato EFGH, il quale essendo la metà del

(*a*) Nella seguente proposizione è supposta la prima del Libro x, di cui non si è addotta quì la dimostrazione ; però basta osservare, che date due quantità disuguali AB C (*Fig.*210), (o sieno linee , o superficie , o solidi) , se dalla maggiore si levi la parte AD , che ne sia la metà , e dalla rimanente DB si levi la DE che sia la metà di essa, e così di mano in mano si continui a fare , riuscirà finalmente il resto minore della data quantità C ; imperocchè questa raddoppiata nella GI , e la GI raddoppiata nella GH, e questa nella GF, ec. dovrà finalmente farsi maggiore dell' AB ; onde la metà di questa sarà minore dell' FH , metà dell' FG ; e la metà della DB sarà pure minore dell' HI, metà dell' HG ; e la metà dell' EB , cioè la EL , è minore dell' IK, metà dell' IG ; e però il resto LB sarà minore della KG , la quale è uguale alla data C .

Che se dalla data AB si toglie l' AD maggiore della metà di essa , e dalla rimanente DB la DE maggiore della metà della rimanente DB , e dalla EB si tolga la EL maggiore della metà di quella , ec. maggiormente si vede , che alla fine il resto LB sarà minore della data C . Il che è quanto si mostra nella Proposizione 1 del Libro X supposta nella seguente .

quadrato del diametro EG, che si circoscrivereb-be al cerchio (7. IV), perciò l' EFGH è maggiore della metà di esso cerchio; indi ne' segmenti residui, divisi per mezzo gli archi in O M L N. e congiunte le rette EO OH GM MF EL FL GN HN, saranno li triangoli EOH GMF ELF GNH maggiori della metà de' segmenti circolari, a cui sono inscritti, essendo qualunque triangolo la metà del rettangolo circoscritto al suo segmento, come l' HNG è la metà dell' HPQG; e così proseguendo a dividere pel mezzo gli archi rimanenti, con tirarne le corde, saranno sempre questi altri triangoli più della metà de' segmenti circolari residui, i quali però finalmente riusciranno minori della quantità X (*Nota preced.*), di cui il cerchio eccede lo spazio Z; onde l' inscritto poligono, quale sia l' EOHNGMFL, o un altro di doppio numero di lati, sarà maggiore dello spazio Z. Perlochè inscritto nell' altro cerchio AST un simile poligono AKBSCTDV, sarebbe questo a quello, come il quadrato dell' AC al quadrato dell' EG (1. XII), cioè come il cerchio AST allo spazio Z; dunque essendo quel poligono EOHNGMFL maggiore dello spazio Z, sarebbe ancora l' altro poligono AKBSCTDV maggior del cerchio AST, in cui è inscritto. Dunque non poteva essere lo spazio Z minore del cerchio ENM. Nè meno poteva supporsi maggiore di esso, perchè facendosi il cerchio ENM ad uno spazio R, come il quadrato dell'EG al quadrato dell' AC, cioè come lo spazio Z al cerchio AST; essendo il cerchio ENM minore dello spazio Z, ancora lo spazio R sarebbe minore del cer-

chio AST; il che abbiamo veduto essere impossibile. Era dunque lo spazio Z uguale al cerchio ENM; e però il cerchio AST al cerchio ENM è come il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG. Il che ec.

Corollario 1. Quindi si ha, che un cerchio ad un altro sta come qualunque poligono inscritto nel primo al simile poligono inscritto nel secondo cerchio, essendo tutti proporzionali a' quadrati de' diametri di essi cerchj.

Corollario 2. Dal modo, con cui si è dimostrata questa proposizione, può dedursi generalmente, che se in due date grandezze superficiali, o solide, possono tali quantità inscriversi maggiori della metà di esse, e nel rimanente altre quantità, che pure sieno maggiori della metà di tali residui, cui sono inscritte; e così nel resto di tali grandezze s' interpongano altre quantità maggiori della metà di tali spazj, e così sempre, onde l' eccesso di qualunque data grandezza sull' aggregato di queste inscritte quantità, divenga minore d ogni minima grandezza data; e l' aggregato delle quantità inscritte in una di tali proposte grandezze, stia a quello di altrettante inscritte similmente nell'altra, sempre in una data ragione; ancora quelle intiere grandezze dovranno essere nella medesima ragione; come quì si è provato ne' circoli, che essendo in essi inscritti poligoni simili, i quali ne lasciano l' eccesso minore della quantità X, e sono sempre come i quadrati de' diametri, debbono essere i detti circoli nella stessa ragione.

PROPOSIZIONE 3.

Ogni piramide, che ha la base triangolare, si divide in due piramidi uguali, e simili fra loro e all' intiera; e in due uguali prismi, che sono maggiori della metà di tutta la piramide.

Sia la Piramide triangolare ABCD (*Fig.* 212): dico che si divide in due piramidi AEGH EBFI uguali, e simili tra loro, e all' intiera; ed in due prismi EICHKF EHGDKF tra loro uguali, e insieme maggiori della metà della data Piramide ABCD.

Tagliati per mezzo tutti i lati ne' punti E H G K F I, e congiunte le rette EH HG GE EI IF FK KH HI IK EF, le quali segando sempre due lati proporzionalmente sono parallele agli opposti lati; è manifesto essere uguali i triangoli AEH EBI, e simili tra loro ed all' intiero ABC: parimente i triangoli AEG EBF sono uguali, e simili all'ABD; e così accade ne' triangoli uguali AHG EIF, simili all'ACD, e negli altri due HEG IBF tra loro uguali e simili al CBD: dunque le piramidi AEGH EBFI sono uguali e simili tra loro, e all' intiera ABCD. I prismi poscia che restano, EICHKF EHGDKF, sono ugualmente alti, e quello ha per base il parallelogrammo ICKF, doppio del triangolo IFK, e però doppio della base triangolare FKD di quest' altro prisma, essendo il triangolo IFK uguale all' FKD nel parallelogrammo IFDK; però sono prismi uguali (40. XI): ma il primo è maggiore della Piramide IKCH, la quale è uguale a qualunque

dell' altre due, per esempio all' AEGH; dunque ambidue questi prismi sono maggiori dell' altre due piramidi, e però sono più della metà dell' intiera piramide ABCD. Il che ec.

PROPOSIZIONE 4.

Se due piramidi triangolari ugualmente alte si dividano, come nella Proposizion precedente, in due simili uguali piramidi, e ne' due prismi uguali, e ciascuna delle particolari piramidi similmente dividasi, come le intiere; e queste, che ne risultano, pure dividansi, come l' altre; e così di mano in mano: come la base della prima piramide, alla base della seconda, così saranno tutti i prismi fatti in quella, a tutti gli altrettanti prismi fatti in questa.

Siano le due piramidi ABCD LMON (*Fig.* 212, 213) ugualmente alte, e che abbiano le basi triangolari CBD OMN, ed entrambe siano divise come nella proposizione precedente: dico, che come la base CBD alla base OMN così sono tutti i prismi fatti nella piramide ABCD a tutti gli altrettanti prismi fatti nella piramide LMON.

Essendo divisi per mezzo tutti i lati delle intiere piramidi, come nella costruzione della precedente Proposizione, ed essendo esse ugualmente alte, ancora i prismi FEHGDK TRPQNV sono ugualmente alti; e però sono come le loro basi FKD TVN (32. XI. *Coroll.*), e queste sono, come l' intiere basi CBD OMN loro quadruple; dunque i prismi FEHGDK TRPQNV, e gli uguali FEHGDK

FEHKCI, e così gli uguali TRPQNV TRPVS, sono, come le basi CBD OMN dell'intiere Piramidi. Che se si farà la costruzione stessa nelle piramidette AEGH LRPQ, e nell'altre due EBFI RMTS; i prismi dell' una a quelli dell'altra saranno pure, come il triangolo EHG al triangolo RPQ, come il triangolo BIF all' MST, come il CBD all' OMN; e così riuscirà sempre. Dunque tutti i prismi insieme presi, che si fossero inscritti nella Piramide ABCD, ed altrettanti inscritti nella Piramide LMON saranno sempre, come le basi BCD MON di esse Piramidi. Il che ec.

PROPOSIZIONE 5.

Le piramidi triangolari ugualmente alte sono fra loro come le basi.

Sieno le Piramidi triangolari ugualmente alte ABCD LMON (*Fig.* 212, 213): dico che sono come le basi loro BCD MON.

Imperocchè fatta in esse la costruzione de' prismi, come nella precedente Proposizione, riescono tutti insieme proporzionali alle basi BCD, MON: ma sono tali, che i primi due prismi sono maggiori della metà di esse piramidi (3. XII), e gl' inscritti nelle piramidette residue sono più della metà di esse, ec. Dunque la piramide intiera ABCD all' ugualmente alta LMON è nella stessa proporzione delle basi BCD MON (2. XII, *Coroll.*). Il che ec.

PROPOSIZIONE 6.

Le piramidi ugualmente alte, e che hanno le basi poligone, sono fra loro come le dette basi.

Siano le piramidi ABCED FHIKLG (*Fig.* 214) ugualmente alte colle basi poligone BCED HGLKI; dico che sono tra loro come le basi BCED HGLKI.

Dividansi le basi poligone in triangoli colle CD GI GH; si vedranno esse piramidi, co' piani che passano pel loro vertice, e per dette diagonali, divise in tante piramidi triangolari ugualmente alte, le quali saranno, come le loro basi triangolari (5. XII). Dunque componendo, sarà la base BCED alla CED, come la piramide ABCED all' ACDE; ed e la CDE alla GHI, come la piramide ACDE all' FHGI; e similmente, componendo e convertendo, sarà la base GHI all' HGLKI, come la piramide FHGI all'FHIKLG: dunque per ugualità ordinata sarà la base BCED all' HGLKI come la piramide ABCED alla FHIKLG. Il che ec.

PROPOSIZIONE 7.

Ogni prisma triangolare può dividersi in tre piramidi uguali triangolari.

Sia il prisma triangolare ABCDEF (*Fig.* 215): dico che esso si divide in tre piramidi uguali triangolari.

Si tirino i diametri de' parallelogrammi AC CF FD: i triangoli ACB ACD essendo uguali, saranno pure uguali le piramidi ugualmente alte

ACBF ACDE; e parimente essendo uguali i triangoli ADF DEF, sono pure uguali le piramidi ACDE CDFE della medesima altezza (4. XII): dunque le tre piramidi, in cui resta diviso il prisma, sono tra loro uguali. Il che ec.

Corollario. Quindi ogni Piramide è la terza parte del prisma, eretto sopra la stessa base, alla medesima altezza; quantunque fossero le basi poligone, potendo risolversi in piramidi, e prismi triangolari della stessa altezza, eretti sopra i triangoli, in cui dividesi qualunque poligono.

PROPOSIZIONE 8.

Le piramidi simili triangolari sono in triplicata ragione dei loro lati omologi.

Siano le piramidi simili ABCD EFGH (*Fig.*216), le cui basi li triangoli ABC EFG: dico che la piramide ABCD alla piramide EFGH ha triplicata ragione di quella che ha il lato AB al lato omologo EF.

Si compiscano i parallelogrammi CABK GEFR intorno a' lati de' triangoli simili CAB GEF; ed intorno a' simili triangoli CAD GEH i parallelogrammi CADI GEHP; e parimente ne' simili triangoli DAB HEF sieno compiuti i parallelogrammi DABN HEFO; onde tirati i piani opposti, ne risulteranno due simili parallelepipedi DICABNMK HPGEFOQR, i quali saranno in triplicata ragione de' loro lati omologi AB EF (33. XI): ma essendo tali parallelepipedi doppj de' prismi IDNBAC PHOFEG (28. XI), e questi tri-

pli del'e piramidi triangolari ABCD EFGH (7. XII) ; sono que' parallelepipedi sestupli di queste piramidi ; dunque ancora esse piramidi simili sono in triplicata ragione de' loro lati omologi AB EF . Il che ec.

Corollario . Ancora le piramidi simili di base poligona saranno in triplicata ragione de lati omologi , perchè i poligoni simili dividendosi in simili triangoli , ne risultano simili piramidi triangolari , ciascuna coppia essendo in triplicata ragione de' lati omologi , la quale riesce la medesima in ciascuna coppia de' lati corrispondenti in qualunque triangolo; e però l' aggregato di tali piramidi triangolari erette sopra un poligono all' aggregato di altrettante simili erette sopra l'altro poligono simile è pure in triplicata ragione de' loro lati omologi .

PROPOSIZIONE 9.

Le piramidi triangolari uguali hanno le basi reciproche dell' altezze : e quelle piramidi , le cui basi sono reciproche delle altezze lorò , sono pure uguali .

Imperocchè essendo le piramidi la terza parte de' prismi eretti sopra alle stesse basi , e alle medesime altezze (7. XII) ; quando le piramidi sono uguali , sono pure uguali i prismi ; e quando i prismi sono uguali , sono altresì uguali le piramidi : ma i prismi uguali hanno le basi reciproche dell' altezze, e se le loro basi sono reciproche dell' altezze , i prismi sono uguali (34. XI, *Coroll.*) ;

dunque ancora le piramidi, se uguali sono, hanno le basi reciproche delle altezze, e se le basi loro sono reciproche dell' altezze, debbono essere piramidi uguali. Il che ec.

Corollario 1. Ancora le piramidi, che hanno le basi poligone, se sono uguali, avranno le basi reciproche all' altezze: e viceversa essendo le basi reciproche all' altezze, saranno piramidi uguali; perchè se avessero la base triangolare uguale a quel poligono, con le medesime altezze, sarebbero uguali tra loro (6. XII), ed uguali ad esse; dunque ciò che conviene alle piramidi triangolari, ancora appartiene alle piramidi poligone, che sarebbero le medesime, se cangiassero le basi poligone in triangoli uguali ad esse.

Corollario 2. Lo stesso pure vale de' prismi eretti sopra basi poligone, che essendo uguali, avrebbero reciproche le basi alle altezze; e viceversa, come accade alle piramidi, che sono le loro terze parti.

PROPOSIZIONE IO.

Il cono è sempre la terza parte del cilindro alla medesima altezza eretto, e sopra la stessa base circolare.

Se si concepisce un prisma eretto sopra il quadrato EHGF (*Fig.* 211) inscritto nel cerchio, alla medesima altezza del cilindro, sarà quel prisma più della metà del cilindro, essendo appunto la metà di quell' altro prisma, che si alzasse alla medesima altezza sopra il quadrato del diametro

EG, che essendo circoscritto al cerchio, farebbe riuscire il prisma circoscritto al cilindro, e però maggiore di esso: e similmente la piramide eretta alla stessa altezza sopra all' inscritto quadrato EHGF, sarebbe la metà della piramide, che avesse per base il quadrato del diametro EG, la quale sarebbe circoscritta al cono; e però la piramide sopra alla base EHGF dovrà essere maggiore della metà del cono. Similmente fatti i triangoli EOH HNG, ec. che sono più della metà de'segmenti circolari, cui sono inscritti; eretti sopra di essi i prismi all' altezza del cilindro, e le piramidi allo stesso vertice del cono, saranno que'prismi più della metà degli eccessi del cilindro sopra il prisma quadrato, essendo la metà dei prismi eretti sopra un rettangolo, come l' HPQG circoscritto al segmento circolare HNG, il qual prisma sarebbe circoscritto a quell' eccesso cilindrico: e similmente le piramidi sopra tali triangoli saranno più della metà degli eccessi del cono sopra la piramide quadrata inscrittagli, e così sempre; dunque il cilindro al cono sta come il prisma eretto alla medesima altezza sopra qualunque poligono inscritto nel cerchio, alla piramide ugualmente alta eretta sopra lo stesso poligono (2. XII, *Coroll.* 2); la qual porzione è sempre tripla (7. XII, *Coroll.*): dunque il cilindro è sempre triplo del cono; onde il cono è la terza parte del cilindro. Il che ec.

PROPOSIZIONE II.

I cilindri ugualmente alti sono come le loro ba-

si ; e così pure sono i coni sopra alle stesse basi circolari eretti alla medesima altezza .

Essendosi dimostrato . che i prismi eretti sopra i quadrati ABCD EHGF (*Fig.* 211) inscritti ne' circoli, alla medesima altezza de' cilindri ne sono più della metà, ed i prismi pure eretti sopra gli altri triangoli, alla stessa altezza sono più della metà degli eccessi cilindrici sopra gli antecedenti prismi, ec. e tali prismi essendo sempre come le loro basi , se sono ugualmente alti (32. XI, *coroll.*) ; le quali basi poligone simili sono come i medesimi circoli (2. XII , *coroll.* 2); perciò ancora i cilindri ugualmente alti sono come le loro basi circolari ; ed i coni parimente , che sono la terza parte di essi cilindri , sono in pari altezza proporzionali a' cerchj delle loro basi . Il che ec.

Corollario . Quindi può dirsi , che i Cilindri, o i Coni, di uguale altezza, sono come i prismi, o come le piramidi ugualmente alte fatte sopra simili poligoni inscritti nelle basi circolari di essi Coni , o Cilindri ; essendo tanto questi , che quelli , come i quadrati de' diametri circolari, proporzionali alle basi de' poligoni , o de' cerchj stessi .

PROPOSIZIONE 12.

I cilindri simili, o i Coni simili inscritti in essi, sono in ragione triplicata de' diametri delle loro basi .

Siano simili i cilindri ABDC EFHG (*Fig.* 217): dico, che sta il cilindro ABDC al cilindro EFHG ,

o i coni simili inscritti in essi, in ragion triplicata di quella che ha la CD alla GH.

Dall' asse MI del cilindro ABDC si tagli la parte IN uguale all'asse KL dell'EFHG, e per lo punto N si faccia passare un piano parallelo alla base, il qual farà il cerchio QR. Indi s' intenda eretto un prisma sopra il poligono CODP inscritto nella base circolare, che pervenga all' altezza NI, indi a quella dell' asse MI; e nella base GVH dell'altro cilindro sia pure un simile poligono inscritto GVHX, e sopra quella un prisma elevato all'altezza del cilindro LK. Il prisma dell' altezza MI a quello dell' altezza NI sarà come la MI all' NI (25. XI. *Coroll.* 2), ch'è uguale alla LK: ma è la MI alla LK come la CD alla GH (per la similitudine de' ciliudri): dunque il prisma dell' altezza MI a quello dell' altezza NI è come semplicemente la CD alla GH. Ma il prisma dell' altezza NI all' altro inscritto dentro il cilindro EFHG, dell' uguale altezza LK, è come la base CODP alla simile base GVHX (32. XI. *Coroll.*), cioè come il quadrato della CD al quadrato della GH (1. XI), e però in ragion duplicata della CD alla GH: dunque la ragion del prisma, dell' altezza MI, a quello dell' altezza LK, è composta della semplice e della duplicata ragione de' diametri; e però è in ragione triplicata delle CD GH. Ma questi prismi accostandosi indefinitamente a' cilindri, cui sono inscritti, secondo che si aumenta il numero de' lati delle loro basi, come tante volte si è dimostrato, debbono avere la ragione medesima, che detti ciliudri (2. XII. *Coroll.* 2); dunque essi cilindri

simili sono pure in ragion triplicata de' diametri CD GH delle loro basi. Ma i coni simili inscritti in detti cilindri, essendo la terza parte di essi (10. XII), sono nella stessa ragione di essi cilindri; dunque sono in triplicata ragione de' diametri delle stesse basi CD GH. Il che ec.

Corollario. È manifesto essere tanto i cilindri, che i coni simili, in triplicata ragione ancora de' loro assi proporzionali a' diametri.

PROPOSIZIONE 13.

Se un cilindro è segato con un piano parallelo alle basi, le sue porzioni saranno come i loro assi.

Siccome se nel cilindro fosse inscritto un prisma, la cui base fosse qualsivoglia poligono inscritto nella base cilindrica, segandosi esso ancora con lo stesso piano parallelo alla base, sarebbero le sue porzioni proporzionali alle lunghezze (25. XI.*coroll.* 1) cioè agli assi cilindrici; così ancora le porzioni cilindriche sono come i detti assi, perchè i cilindri sono come i prismi di simil base, inscritti ne' medesimi; come altre volte si è dimostrato.

PROPOSIZIONE 14.

I coni, e i cilindri, di base uguale, sono tra loro come le altezze.

Quanto a' cilindri di base uguale, è come se fossero porzioni segate dal medesimo cilindro col piano parallelo alla basè; che però essendo come i loro assi (13. XII), sono come le altezze: e quanto a'

to a' coni, che sono un terzo de' cilindri, a' quali sono inscritti (10. XII), è chiaro dover essere ancor essi nella stessa ragione degli assi .

PROPOSIZIONE 15.

Ne' coni o cilindri uguali le basi sono reciproche all' altezze; e viceversa qualunque volta sieno reciprocamente le basi alle altezze; que' coni, o cilindri, saranno uguali .

Sieno coni e cilindri uguali, le cui basi i cerchj BQC FRE (*Fig.* 218): dico che queste basi sono reciprocamente proporzionali alle altezze; cioè come la base BQC alla base FRE, così è l' altezza DM all'altezza AL: e viceversa se in due coni, o cilindri, sia il cerchio BQC al cerchio FRE come la DM alla AL, dico que' coni , o cilindri, essere uguali .

Se le altezze cilindriche sono uguali, ancora le basi saranno uguali negli uguali cilindri : essendo poi disuguali, dalla maggiore DM si tagli la OM uguale alla minore AL, e si tagli il cilindro col piano IH, condotto per lo punto dell' asse O, parallelo alla base ERF. Sarà la DM alla OM, uguale alla AL, come il cilindro NKF (uguale al GPC) all'IHF (14. XII), come la base BQC alla base ERF (11. XII) : dunque sarà la DM all' AL come il cerchio BQC all'ERF: e viceversa, se la DM sta all'AL come il cerchio BQC all'ERF, posta la OM uguale all' AL, sarà il cilindro NKF all' IHF come la DM alla OM, uguale alla AL, come la base BQC alla base ERF, come il cilindro GPC all'IHF; quindi il

cilindro NKF sarà uguale al cilindro GPC. E lo stesso accade ne' coni, che sarebbero la terza parte di essi cilindri. Dunque ec.

PROPOSIZIONE 16. PROBL.

Dati due cerchj concentrici, inscrivere nel maggiore un poligono di lati uguali, e di numero pari, che non tocchi il cerchio minore.

Siano dati li due cerchj ADBO LMEP (*Fig.*219): bisogna nel cerchio maggiore ADBO inscrivere un poligono di lati uguali e pari di numero, che non tocchi il cerchio minore LMEP.

Tirato pel centro C il diametro ACB segante il cerchio interiore ne' punti L E, gli si conduca la tangente GEH concorrente col maggior cerchio ne' punti G H; indi segata la semicirconferenza ADB in due parti uguali nel punto D, si seghi pure l' arco DB pel mezzo nel punto N, e l' arco NB dividasi pel mezzo nel punto K, fino a tanto che questa divisione riesca tra i punti G B. Tale sia il punto K, donde si tiri al diametro la perpendicolare KIF, che sarà parallela alla tangente GEH (ciò s' inferisce dalle 18. III, 28. I.), e gli archi BK BF saranno tra loro uguali, e le corde loro KB FB potranno replicarsi intorno la circonferenza del cerchio maggiore, la quale conterrà un numero pari di archi uguali al BK, e però ne riuscirà un poligono di lati uguali, e pari di numero, i quali non potranno toccare la periferia del cerchio interiore, siccome non viene toccata nè meno dalla retta KF sottesa a' due lati, essendo pa-

rallela alla tangente GH di quella periferia; il che riuscirà in qualunque altro sito di esso poligono. Il che ec.

PROPOSIZIONE 17. PROBL.

Date due sfere concentriche, descrivere nella maggiore un solido poliedro, i cui piani non tocchino la superficie della sfera minore.

Sieno date due sfere concentriche, i cui raggi CB CE (*Fig.* 220): bisogna nella sfera maggiore inscrivere un solido poliedro, i cui piani non tocchino la superficie della sfera minore.

Segate esse sfere con un piano, che passi pel centro C, ne riusciranno due cerchj concentrici, nel maggiore de' quali può descriversi un poligono, che non tocchi la periferia del minore (16.XII). Sia BK uno de'lati di tale poligono; ed eretto perpendicolare al piano di questo cerchio il semidiametro CA, si tirino nella sfera i piani ALK AHB, che saranno quadranti perpendicolari a quel cerchio (18. XI), ed in essi quadranti si applichino pure le corde KO OL LA AH HD DB uguali al lato BK, e si congiungano le rette DO HL; il che se si facesse da per tutto, ne riuscirebbe un intiero poliedro, il quale non toccherà in verun luogo l'interiore superficie della sfera minore NSME. Imperocchè condotte le OF DI perpendicolari alle comuni sezioni CK CB de'detti quadranti col cerchio CBK, le quali saranno parallele all' AC, e perpendicolari al medesimo piano circolare, onde parallele tra loro, ed ancora uguali, perchè ne'

triangoli OKF DBI oltre gli angoli retti ne' punti F I, sono uguali gli angoli K B insistenti alle semiperiferie diminuite degli archi uguali OK DB; e però essendo la OK uguale alla DB, ancora gli altri lati saranno uguali, cioè la OF uguale alla DI, e l' FK uguale alla IB; però congiunte le rette DO IF saranno parallele, ed uguali: ma l' IF è parallela alla BK, segando dagli uguali raggi CK CB le parti uguali FK IB; dunque ancora le DO BK sono parallele; e però le rette OK DB sono nel medesimo piano; e similmente si proverebbe essere un piano il quadrilatero HLOD, siccome è il triangolo ALH: onde ciò da per tutto continuato, sarebbe un poliedro inscritto nella sfera maggiore; e tirando dal centro C la perpendicolare CG al piano BDOK, congiunte le rette GB GK GO GD saranno uguali, onde passerebbe un cerchio per i quattro punti K B D O, mentre i quadrati di qualunque di tali linee, col medesimo quadrato della perpendicolare CG, fanno il quadrato del raggio della sfera: ma essendo la BK maggiore della IF, e però maggiore della DO, e le altre OK DB uguali alla BK; dunque nel cerchio, che passerebbe per i punti K B D O, la BK sottende più di un quarto; e però il quadrato della BK è più che doppio del quadrato della CK, essendo l' angolo BGK ottuso: ma congiunta la KI, che sarà perpendicolare all' IB, essendo l' angolo KBI uguale al DBI, il lato BK uguale al BD, ed il lato BI comune, ne' triangoli KBI DBI sarà l' IK uguale all' ID, e l' angolo BIK uguale al retto BID, ed è la IK maggiore della BI (essendo l' IK media proporzio-

nale tra le parti del diametro, di cui l'una è la BI, l'altra sarebber le IC CB insieme, assai maggiori della IK); dunque il quadrato della BK è meno che doppio del quadrato della IK; e però la GK è minore dell' IK, onde la CG sarà maggiore della CI, essendo tanto i due quadrati delle CG GK, quanto i due delle CI IK uguali al quadrato del raggio CK. Onde è più lontano il punto G, che il punto I dalla superficie della sfera CEM; e la IK lontana dall'arco EM riuscendo parallela alla sua tangente (16. XI), il piano DBKO sarà più remoto dalla superficie di quella interna sfera minore, e così ancora gli altri piani HDOL AHL molto meno potranno toccare detta superficie, essendone più lontani; e però tutto il Poliedro sarà come cercavasi di fare. Il che ec.

PROPOSIZIONE 18.

Le sfere sono in triplicata ragione de' loro diametri.

Imperocchè fatto ancora nella sfera minore un simile poliedro al descritto nella maggiore, questi saranno in triplicata ragione de'raggi delle loro sfere, perchè la piramide, che avesse la base DBKO(*Fig.* 220), e il vertice in C, sarà simile alla piramide, la di cui base è il simile quadrilineo PEMQ, e lo stesso vertice C: e parimente l' altra piramide, la di cui base HDOL, è simile alla piramide, la di cui base RPQS, collo stesso vertice C; e così l' altre: dunque essendo queste in triplicata ragione di quella de' loro lati omologi,

ancora l' aggregato di esse, cioè il poliedro della sfera AKB, all' aggregato dell' altre simili, che sarebbe il simile poliedro della sfera NME, starà in ragione triplicata de' raggi CB CE, o de' diametri di esse sfere; e ciò accadrebbe in qualunque numero di piani fossero divisi i poliedri similmente descritti in esse sfere: e perchè possono essere fatti di tanti piani, che non tocchino la superficie di qualunque interna sfera minore, ma differente dalla maggiore d' una quantità minima; quindi essi poliedri possono differire dalle dette sfere d'una grandezza minore di qualunque data; però avendo sempre essi poliedri simili la ragione triplicata di quei diametri, ancora le sfere saranno nella stessa ragione (2. XI. *cor.* 2). Il che dovea dimostrarsi.

ELEMENTI

DELLA GEOMETRIA

DI EUCLIDE

LIBRO DECIMOTERZO

PROPOSIZIONE I.

Se una retta linea sia divisa secondo l' estrema e media ragione, e al maggiore segmento sia aggiunta una retta uguale alla metà di tutta, sarà il quadrato della composta quintuplo del quadrato di essa metà.

Sia la retta AB (*Fig.* 221) divisa in C secondo l'estrema e media ragione, cioè sia la AB alla AC come l' AC alla CB; se al maggior segmento CA si aggiunga la AD uguale alla metà dell' AB; dico che il quadrato della CD è quintuplo del quadrato della AD.

Imperocchè posta l' AF uguale alla metà della AB, e perpendicolare ad essa, congiunta la BF, e alla FB posta uguale l' FG, ed indi dalla porzione AG descritto il quadrato AGIC; questa è la costruzione, che determina la divisione dell' AB nel punto C in maniera, che sia il quadrato della AC uguale all' ABC, rettangolo di tutta nel resto (11. XI); il che rende segata l' AB in C secondo

l' estrema e media ragione, per essere l' AC media proporzionale tra l'intiera AB e la residua BC. Dunque essendo la GA uguale alla AC, e l'AD uguale alla AF. uguale a mezza l' AB; sarà la CD uguale alla FG. uguale alla FB: ma posta l'AF uguale ad 1, e l' AB uguale a 2, il cui quadrato è 4, il quadrato della FB, che è uguale ai quadrati delle AF AB uguaglierà i quadrati 1 e 4 insieme, cioè 5: dunque ancora il quadrato della CD è quintuplo del quadrato della AD, cioè del quadrato della metà dell' AB. Il che ec.

PROPOSIZIONE 2.

Se il quadrato d' una retta CD (*Fig.* 222) è quintuplo del quadrato della sua porzione AD, della quale sia posta doppia l'AB, sarà questa divisa nel punto C secondo l' estrema e media ragione; ed il maggiore segmento sarà l' AC.

Il quadrato della CD è uguale ai quadrati delle AD AC, ed ai due rettangoli DAC (4. II); dunque essendo la BA doppia dell'AD, sono i due rettangoli DAC uguali al rettangolo BAC; ed essendo il quadrato della CD quintuplo del quadrato della AD, ed uguale ai quadrati delle AD AC ed al rettangolo BAC; tolto il comune quadrato della AD, rimarrà il quadruplo del quadrato della AD (che è il quadrato dell' AB, doppia dell' AD) uguale al quadrato della AC, ed al rettangolo BAC: ma è uguale ai rettangoli ABC BAC; dunque il quadrato della AC è uguale al rettangolo ABC, e però l' AC è media proporzionale tra le AB BC, onde è

il maggiore segmento della AB divisa nell' estrema e media ragione .

Coroll. Posta l' AB doppia dell' AD (*Fig.* 223), del cui quadrato sia quintuplo il quadrato della CD, sarà la BC divisa in A nell' estrema e media ragione, il cui segmento maggiore è il BA; perchè essendo il quadrato della DC quintuplo del quadrato dell' AD, cioè uguale al quadrato dell' AD col quadrato della CA, e col doppio rettangolo CAD, uguale al rettangolo CAB, sarà il quadruplo quadrato dell' AD, cioè il quadrato dell' AB, uguale al quadrato della CA col rettangolo CAB, uguali al rettangolo BCA. Il che ecc.

PROPOSIZIONE 3.

Se il maggior segamento d'una retta, segata nell' estrema e media ragione, si divida per mezzo, il quadrato della composta da questa metà e dal segmento minore è quintuplo del quadrato di essa metà .

Sia AC (*Fig.* 224) il maggior segmento della retta AB, segata nell' estrema e media ragione; e sia diviso per metà in E; dico, che il quadrato della EB, composta dalla metà CE del segmento maggiore e dal segmento minore CB, è quintuplo del quadrato della CE .

Poiche il quadrato dell' EB uguaglia il quadrato della CE col rettangolo ABC (6. II): ma questo è uguale al quadrato dell' AC, quadruplo del quadrato della CE . Dunque il quadrato dell' EB è quintuplo del quadrato della CE . Il che ecc.

PROPOSIZIONE 4.

Il quadrato di una retta col quadrato del segmento minore di essa, divisa nell' estrema e media ragione, sono tripli del quadrato del segmento maggiore .

Sia la retta AB (*Fig.* 225) divisa nell' estrema e media ragione in C : dico che il quadrato dell' AB col quadrato del segmento minore CB , sono tripli del quadrato del segmento maggiore AC .

I quadrati delle AB BC sono uguali a due rettangoli ABC col quadrato della AC (7. II): ma il rettangolo ABC è uguale al quadrato della AC ; dunque i quadrati delle AB BC sono uguali a' due quadrati dell' AC col quadrato medesimo dell' AC , un' altra volta preso ; e però sono uguali al triplo del quadrato della AC. Il che ec.

PROPOSIZIONE 5.

Se una retta sia segata in estrema e media ragione; e le si aggiunga un' altra uguale al segmento maggiore; anche la composta riuscirà divisa in estrema e media ragione, ed il maggior segmento sarà la prima retta .

Se alla retta linea AB (*Fig.* 226) divisa in C nell' estrema e media ragione , sia aggiunta l' AD nguale al maggiore segmento AC: dico che sarà la BD divisa pure in A secondo l'estrema e media ragione, il cui maggior segmento sarà l' intiera AB .

Essendo l' AB all' AC, cioe all'AD, come l'AC alla CB; invertendo. sarà la DA alla AB come la BC alla CA; e componendo, la DB alla BA come la BA alla AC, uguale alla AD; dunque il quadrato della AB è uguale al rettangolo BDA, e però la BD è divisa nel punto A secondo l' estrema e media ragione, il di cui segmento maggiore è l'AB. Il che ec.

PROPOSIZIONE 6.

L'uno, e l'altro segmento, d'una data retta divisa secondo l' estrema e media ragione, sono incommensurabili, non solo in lunghezza, ma ancora in potenza; cioè non sono come numero a numero nè essi segmenti, nè i loro quadrati.

Sia la retta AB (*Fig.* 227) divisa nel punto C secondo l' estrema e media ragione: dico che tanto il segmento maggiore AC, quanto il minore CB, e così parimente i loro quadrati, non hanno alcuna misura comune.

Imperocchè aggiunta al segmento maggiore AC l'AD uguale alla metà dell'AB, e presa l'AD uguale ad 1, il quadrato della CD è quintuplo del quadrato della AD (1. XIII); dunque essa CD è uguale alla radice quadra di cinque (*a*): onde l' AC è uguale alla radice di 5 diminuita di 1, e la BC, uguale alla differenza tra le DB DC, sarà uguale a 3 diminuito della radice di 5, essendo la DB

(*a*) Radice quadra, o quadrata, *significa il lato del quadrato* 5, *il qual lato non si può esprimer con numero per non essere il* 5 *numero quadrato*.

tripla dell' AD. Ora nè la quantità, radice di 5 diminuita di 1, può avere alla quantità 3 diminuito della radice di 5 alcuna proporzione commensurabile di numero a numero, non potendosi determinare in numero nè in frazione di numeri, la radice quadra di 5, non essendo verun quadrato quintuplo d' un altro quadrato; nè il quadrato della prima, che sarebbe l' aggregato di 5 e di 1, diminuito della doppia radice di 5, può essere commensurabile al quadrato dell' altra, ch' è uguale all' aggregato di 9 e di 5, diminuito di sei volte la radice di 5; non essendo nè meno questi come numero a numero, ma in ragione di 3 diminuito della radice di 5 a 7 diminuito della tripla radice di 5 (divisi per mezzo essi quadrati); dunque i segmenti AC CB sono in lunghezza ed in potenza incommensurabili. Il che ec.

PROPOSIZIONE 7.

In qualsivoglia pentagono equilatero ABCDE (*Fig.* 228) se vi sono tre angoli (contigui, o non contigui) tra loro uguali; il pentagono sarà equiangolo.

Essendo uguali i lati EA AB BC CD, se gli angoli A B C contenuti tra essi, sono uguali; sottese le basi EB AC BD, saranno pure tra esse uguali; dunque gli angoli AEB CAB, ABE CBD. BCA CDB sono uguali; dunque la BF è uguale all' FA, e la rimanente FE è uguale all' FC; onde i triangoli FED FCD hanno tutti i lati uguali, e però l' angolo FCD è uguale all' FED, ed aggiunti gli

uguali AEB ACB, l' angolo AED sarà uguale al BCD. Similmente si proverebbe l' angolo CDE uguale all' ABC: dunque tutti gli angoli del pentagono sono uguali.

Se poi fossero uguali gli angoli BCD CDE al non contiguo EAB, riuscendo colle sottese DB EB gli angoli AEB BDC uguali, e per essere uguali le BE BD, ancora essendo l' angolo BDE uguale al BED; dunque tutto l' angolo AED è uguale al CDE, e però sono i tre angoli contigui uguali, onde tutti gli altri sono uguali. Il che ec.

PROPOSIZIONE 8.

Nel pentagono equilatero, ed equiangolo, sottese due rette a due angoli contigui, esse si segheranno secondo l' estrema e media ragione; e ciascuno dei loro maggiori segmenti sarà uguale ad un lato di esso pentagono.

Nel pentagono ABCDE (*Fig.* 229) equilatero ed equiangolo, sottese due rette BD CE ai due angoli prossimi BCD CDE: dico che le BD CE si segheranno nel punto F secondo l' estrema e media ragione; e che ciascuno dei loro maggiori segmenti BF EF sarà uguale ad un lato dello stesso pentagono.

Circoscritto ad esso pentagono un circolo ABD, gli archi sottesi da' lati di esso sono uguali; dunque l' angolo FCD è uguale all' FDC, e l' esterno BFC sarà doppio di ciascuno di essi: ma essendo pure l' arco BAE doppio dell' ED, ancora l' angolo BCF sarà doppio dell' angolo FCD; dunque

il BFC è uguale al BCF; e però la BF è uguale alla BC: ed essendo i triangoli BCD FCD equiangoli, sarà la BD alla DC (uguale alla BF) come la DC (uguale alla BF) alla FD; dunque la BD è divisa in F secondo l'estrema e media ragione, ed il maggiore segmento è la BF uguale alla BC; e lo stesso si dimostrerà della CE, che sia divisa in F in ragione media ed estrema, essendo la CE alla EF come la EF alla FC, e la EF uguale alla CD. Il che ec.

PROPOSIZIONE 9.

Se del decagono e dell'esagono inscritti nel cerchio si congiungano i lati per diritto, il punto d'unione dividerà la composta in estrema e media ragione, il cui segmento maggiore sarà il lato dell'esagono.

Se il lato AB (*Fig.* 230) del decagono inscritto nel cerchio ABE si congiunga col lato dell'esagono, uguale alla BD, cioè al raggio CA di esso circolo; sarà segata l'AD nel punto B secondo l'estrema e media ragione, il di cui maggior segmento sarà la BD uguale al lato dell'esagono.

Tirato il diametro ACE, e congiunte le rette CB CD, essendo l'arco AB la quinta parte della semiperiferia ABE, e però l'arco BE quadruplo dell'AB, l'angolo ECB sarà quadruplo dell'ACB: ma il medesimo ECB è doppio dell'ABC, e l'ABC è doppio del BCD (essendo non solamente la BC uguale alla CA, ma ancora uguale alla BD, (lato dell'esagono); dunque l'angolo ECB è quadru-

plo ancora dell' angolo BCD; sarà dunque l' angolo ACB uguale al BCD, e l' angolo DCA uguale al DAC, uguale all' ABC, essendo ciascuno doppio del BCD; però la DC è uguale alla DA: ma la DC sta alla CA come la DB alla BA (3. VI); dunque ancora sarà la AD alla DB come la DB alla BA; onde la AD è divisa in ragione media ed estrema, il di cui maggior segmento è il BD. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 10.

Se nel cerchio si inscriva un pentagono equilatero ed equiangolo, il quadrato del lato di questo è uguale ai quadrati del lato del decagono e del lato dell' esagono, inscritti nel medesimo cerchio.

Sia nel cerchio BAK (*Fig.* 231) inscritto il pentagono ABDEF, equilatero ed equiangolo: dico che il quadrato del suo lato AB uguaglia i quadrati del lato AH del decagono inscritto nel medesimo cerchio, e del raggio CH, cioè del lato dell' esagono parimente inscritto nel cerchio stesso.

Si conduca il diametro ACK, il quale dividerà per mezzo l' arco DE nel punto K, e diviso pel mezzo l' arco AH nel punto I, si congiungano al centro le IC BC. Essendo l' arco BD uguale all' AB, doppio dell'AH, o del BH, e il DK pure uguale all' AH, doppio dell' HI, dunque l' arco BDK è doppio del BHI; però l' angolo BCK sarà doppio del BCI, o del BAK; dunque il BCL è uguale al BAC; onde i triangoli ABC CBL, che hanno l'angolo B comune, sono equiangoli, e sarà la AB alla

BC come la BC alla BL; dunque il quadrato della BC è uguale al rettangolo ABL . Congiunta pure la retta HL sarà uguale all' AL , perchè la CI divide la corda AH per mezzo, e ad angoli retti; onde il triangolo AHL sarà isoscele , simile all' altro HBA , per essere l' angolo AHL uguale all' HAL , uguale all' ABH , e l' angolo A comune; dunque sarà l'AB all'AH come la AH all'AL; e però il quadrato dell' AH è uguale al rettangolo BAL: ma il quadrato dell'AB è uguale ai rettangoli insieme ABL BAL; dunque è uguale a' quadrati della BC (che è il raggio uguale al lato dell'esagono) e della AH , che è il lato del decagono . Il che ec.

PROPOSIZIONE II.

Diviso il raggio CB (*Fig.* 232) d' un cerchio nel punto E secondo l' estrema e media ragione, il di cui maggior segmento sia la CE: dico che il lato del pentagono regolare da inscriversi in esso cerchio è medio proporzionale tra il raggio CB , ed una retta composta da esso raggio , e dal segmento minore, cioe dalle CB BE insieme.

Dal centro si alzi sopra il diametro AB la perpendicolare CD , e si congiunga la DE , e prolungata l' EB nel punto G, sia la BG uguale alla CB . Essendo l' AC , uguale alla BC , alla CE come la CE all' EB , tutti gli antecedenti insieme BC CE (uguali alla AE) a tutti li conseguenti insieme CE EB (uguali alla AC) saranno , come un antecedente CB, ovvero AC , ad un conseguente CE ; dunque ancora l' AE è divisa nel punto C secondo

do l' estrema e media ragione, essendo l' AE alla AC come la AC alla CE: ed il segmento maggiore AC essendo il lato dell' esagono da inscriversi in esso cerchio, sarà CE il lato del decagono, il quale è il segmento minore della retta divisa in tale estrema e media ragione, il di cui maggiore segmento sia il lato dell' esagono (9 XIII); dunque essendo il quadrato della DE uguale al quadrato del raggio CD, ch'è uguale al lato dell'esagono, ed al quadrato della CE, lato del decagono, sarà DE il lato del pentagono (10.XIII); e perchè il rettangolo CBE, uguale al rettangolo GBE, uguaglia il quadrato della CE, ed il quadrato della BG uguaglia il quadrato della DC sarà il rettangolo EGB, che è uguale al GBE col quadrato della BG, uguale ai quadrati delle CE CD, cioè uguale al quadrato della DE. Dunque il lato DE del Pentagono è medio proporzionale tra le BG GE, cioè tra il raggio del cerchio, e la retta composta del raggio e del segmento minore BE di esso raggio CB diviso nel punto E secondo l' estrema e media ragione. Il che ec.

PROPOSIZIONE 12.

Il quadrato del lato d' un triangolo equilatero inscritto nel cerchio è triplo del quadrato del raggio del cerchio medesimo.

Sia inscritto nel cerchio il triangolo equilatero ABD (*Fig.* 233): dico che il quadrato del suo lato AB è triplo del quadrato del raggio AC.

Si tiri il diametro ACE, e si congiunga la BE,

che sarà un lato dell' esagono, uguale al medesimo raggio AC ; dunque i due quadrati delle AB BE essendo uguali al quadrato del diametro AE, quadruplo del quadrato del raggio AC , tolti li due quadrati uguali delle BE AC , rimane il quadrato della AB triplo del quadrato dell' AC. Il che ec.

PROPOSIZIONE 13. PROBL.

In una data sfera inscrivere un Tetraedro, cioè una Piramide composta da quattro triangoli equilateri , e dimostrare , che il quadrato del diametro di essa sfera è sesquialtero del quadrato d' un lato di esso Tetraedro .

Sia data la sfera AECD (*Fig.* 234) ; bisogna inscrivere in essa un Tetraedro ; e dimostrare che il quadrato del diametro AC è sesquialtero del quadrato del lato del Tetraedro .

Sia ADCE un cerchio massimo della sfera , il di cui diametro AC si divida nel punto B , di maniera che la BC ne sia la terza parte; indi pel punto B si seghi la sfera col cerchio GDE perpendicolare al diametro AC , ed in questo cerchio descrivasi un triangolo equilatero GEF ; quindi al vertice A si congiungano le rette EA FA GA . Questo sarà il Tetraedro ricercato AEFG; imperocchè tutti i lati AE AF AG sono tra loro uguali , essendo il quadrato di ciascuno uguale a'quadrati dell'asse AB e del raggio BE. ovvero del BF, o del BG; ed inoltre ciascuno è uguale a qualsivoglia lato del triangolo equilatero GEF , perchè sta l' AC all' AB come il quadrato dell' AE al quadrato dell' AB , e l' AB

alla BC come il quadrato dell'AB al quadrato dell' EB . Dunque sarà l' AC alla BC come il quadrato dell' AE al quadrato dell' EB : ma l' AC è tripla della BC ; dunque il quadrato dell'AE è triplo del quadrato dell' EB , raggio del cerchio GDE : ma del medesimo è triplo il lato EF del triangolo equilatero GFE (12. XIII); dunque l'AE è uguale all' EF , e così gli altri lati , e però sono tutti equilateri i triangoli AEF AGF AGE GFE ; onde questo solido è un Tetraedro , ed il quadrato del diametro AC della sfera al quadrato del lato AE del Tetraedro è sesquialtero , essendo come la CA all' AB , che è come 3 a 2 . Il che ec.

Proposizione 14. Probl.

In una data sfera inscrivere un Ottaedro , da otto triangoli equilateri compreso : e dimostrare , che il quadrato del diametro della sfera è doppio del quadrato di qualunque lato dell' Ottaedro .

Nella data sfera ADFB (*Fig.* 235) bisogna inscrivere un Ottaedro , e dimostrare , che il quadrato del diametro AB è doppio del quadrato di qualunque lato dell' Ottaedro inscritto .

Nel cerchio massimo ADBE tirati i due diametri AB DE tra loro perpendicolari , si tiri ancora l' FCG perpendicolare al piano di esso , per cui, e per la DE passerà un altro cerchio massimo DFEG perpendicolare all' altro, e congiunte le rette AD AF AG AE BD BF BG BE, saranno tutte tra loro uguali , perchè i loro quadrati uguagliano i due quadrati de' raggi , tirati dal centro

a' loro termini, che tra loro disposti sono ad angolo retto; e congiunte ancora le rette FE EG GD DF, saranno uguali all'altre, perchè pure i loro quadrati sono uguali a' due quadrati de' raggi, al di cui angolo retto si oppongono; tutti adunque i triangoli AFE BEF AFD ec. sono equilateri, come ancora si raccoglie dall'essere ciascun lato la corda sottesa ad un quarto della periferia del massimo cerchio; che però il solido AEBFDG è un ottaedro, ed il quadrato del diametro AB è doppio del quadrato del lato EA, essendo uguale a' quadrati delle EA EB, i quali sono uguali tra loro. Il che ec.

PROPOSIZIONE 15. PROBL.

Nella data sfera inscrivere un Cubo, da sei quadrati compreso; e dimostrare, che il quadrato del diametro della sfera sia triplo del quadrato di qualunque lato di esso cubo.

Nel massimo cerchio ADBH (*Fig.*236) tirato qualunque diametro FD, si prenda la DE uguale ad un terzo di esso, ed eretta la perpendicolare EA, congiunte le rette AD AF, e compiuto il rettangolo AFBD, si seghi la sfera con due piani perpendicolari a quel cerchio ADBH, tradotti per le rette AF DB, che saranno due cerchj uguali ANFO, DKBI intorno gli uguali diametri AF DB, a' quali si tirino perpendicolari gli altri diametri OGN ILK; e tirate le corde AN NF FO OA, e DK KB BI ID sottoposte ad uguali quadrati, e però uguali tra loro, si congiungano le altre rette

NK OI uguali pure all' altre AD FB ; sarà questo il Cubo ricercato : perchè essendo la FD tripla della DE, ed il quadrato della FD al quadrato dell' AD, come l' FD alla DE, sarà il quadrato della DF (cioè li due delle AF AD) uguale al triplo del quadrato dell' AD ; e però il quadrato dell' AF sarà doppio del quadrato dell'AD : ma lo stesso quadrato della AF è doppio del quadrato dell'AN, essendo uguale alli due delle AN NF tra loro uguali ; dunque l' AD è uguale all' AN, e però tutte le rette, che comprendono questo solido, sono uguali, e costituiscono sei quadrati ADKN NKBF FBIO OIDA AOFN DKBI uguali, che contengono questo Cubo, e qualunque di tali quadrati è la terza parte del quadrato del diametro della sfera, essendo il quadrato della DF triplo del quadrato della AD . Il che ec.

Corollario. Essendo il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato dell' inscritto Tetraedro in ragione sesquialtera (13. XIII), cioè come 3 a 2 ; e lo stesso quadrato del diametro al quadrato del lato del cubo, come 3 ad 1 ; dunque il quadrato del lato del Tetraedro col quadrato del lato del cubo è uguale al quadrato del diametro della sfera, essendo li numeri 2 e 1 insieme uguali a 3 .

PROPOSIZIONE 16. PROBL.

Nella data sfera inscrivere un Icosaedro compreso da venti triangoli equilateri uguali ; e dimostrare, che il diametro della sfera al lato dell'

Icosaedro sta, come il lato d' un esagono insieme a due lati d' un decagono, al lato del pentagono inscritto nel medesimo cerchio.

Sia la CI (*Fig.* 237) media proporzionale tra il raggio CA della sfera, e la quinta parte di esso, ed eretta sopra al diametro AB nel cerchio massimo AEF la perpendicolare OID, per lo centro C condotto l' altro diametro DCF, si conduca la FME parallela all' OID, e per queste rette DO EF si seghi la sfera con due piani perpendicolari a quel massimo cerchio, che faranno due cerchj uguali DKOP ERFQ, ugualmente distanti dal centro C; essendo la CI uguale alla CM. Indi in questi cerchj si descrivano da' punti opposti D F i pentagoni DKHLP FRGNQ, e dipoi si congiungano le rette AD AK AH HF HR RK GD DN NB BG BR BF, ec. ne riusciranno quindi venti triangoli equilateri, che comprenderanno il proposto Icosaedro. Imperocchè si congiungano ancora le rette GE NE DE: essendo la IC media proporzionale tra il raggio CA, ovvero il CD, e la quinta parte di esso, sarà il quadrato della CD quintuplo del quadrato della CI; e però il quadrato della DI è quadruplo dello stesso quadrato della CI, di cui pure è quadruplo il quadrato della IM, o DE; però la DI è uguale all'IM, e il DIME è un quadrato: ed essendo il GSE la metà dell' arco GEN sotteso dal lato GN del pentagono, sarà la GE un lato del decagono inscritto nel medesimo cerchio ERFQ, e la DE essendo uguale all' EM raggio di esso, o lato dell' esagono, che si potrebbe inscrivere nel medesimo cerchio, saranno i due quadrati delle

DE EG, cioè il quadrato del lato DG (essendo l' angolo DEG retto, per essere le DE IM perpendicolari al piano del cerchio ERQ) uguale al quadrato del lato GN del pentagono (10. XIII); pertanto le rette DG GN DN sono uguali, e però il triangolo DGN è equilatero, e così tutti gli altri triangoli intercetti fra i due circoli DHP ERQ, congiungenti gli angoli de'pentagoni inscritti in essi, sono equilateri, tutti tra loro uguali. Che poi ancora i triangoli BRF BRG AHK ec. sieno equilateri uguali agli altri, si prova, perchè essendo il quadrato della CD quintuplo del quadrato della CI, e la MI doppia della CI, sarà la MA divisa in I secondo l' estrema e media ragione (2. XIII, *coroll.*), il di cui maggiore segmento essendo la MI uguale al raggio ID del cerchio DHL, il segmento minore IA sarà uguale al lato del decagono (9. XIII), siccome l' MI uguaglia quello dell' esagono; dunque il quadrato della AD essendo uguale a' quadrati delle DI AI, è uguale a' quadrati del lato dell' esagono, e del decagono, e però uguaglia il quadrato del lato DK del pentagono (10. XIII); e così ancora gli altri lati AK AH BN, ec. sono uguali a' lati di essi pentagoni, onde fanno da per tutto i triangoli equiangoli; e però il solido da essi compreso è l' Icosaedro; come era proposto. Ed è manifesto, essere il diametro AB della sfera uguale al lato IM dell' esagono con i due lati AI MB del decagono inscritto nel cerchio DHL, ed il lato dell' Icosaedro è il lato del pentagono inscritto in esso. Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE 17. PROBL.

In una sfera inscrivere un Dodecaedro contenuto da dodici pentagoni, il lato del quale stia al diametro della sfera, come il lato del decagono a quello del triangolo equilatero, inscritti nel medesimo cerchio.

Si dividano per mezzo ne'punti L K H (*Fig.* 278) i lati CB DE DC di un cubo BCDAM da inscriversi nella sfera, e congiunta la LK, divisa altresì per mezzo nel punto N, si congiunga la HN, e segate ambedue le rette NL NK secondo la media ed estrema ragione, di cui li segmenti NP NO sieno i maggiori, ed alzata al piano del quadrato BCDE dal punto N la perpendicolare VN uguale alla NP, e condotta per lo punto V la SVR parallela alla LK, si tirino nel piano RVN le rette OR PS parallele ed uguali all' NV, e prolungata la VN nel punto Z, posta la NZ uguale alla PL, nel piano VNH si tiri la ZT parallela alla NH, e congiunta la VH conveniente colla ZT nel punto T, sieno tirate le rette TD DR TC CS, e così sarà fatto un pentagono regolare SRDTC, i cui angoli giungeranno alla superficie sferica circoscritta a quel cubo, e che sarà nel piano delle due rette SR CD tra loro parallele, come parallele alla terza LK. E quanto all'ugualità de' lati si prova così Congiunta la CP, il suo quadrato uguaglia i due quadrati delle CL LP; onde essendo la CL uguale alla NL, e l' LP il minore segmento di essa LN divisa secondo l'estrema e media ragione, sarà il quadrato della CP triplo del quadrato della

PN (4. XIII), ed aggiunto il quadrato della PS uguale alla PN, sarà il quadrato della CS quadruplo dell'altro della PN; e però è la PS uguale alla PO, uguale all'SR. Similmente la DR si proverà uguale alla SR. Che poi ancora la DT sia uguale alla SR; tirata l' HQ parallela alla NZ, le sarà uguale: ed essendo la HQ alla QT come la VN alla NH, come la PN alla NL, come la LP alla PN, come la NZ (uguale all'HQ) alla VN; dunque sarà la QT uguale alla VN. ed il quadrato della HT uguaglia i quadrati delle HQ QT; dunque uguaglia i quadrati delle LP PS: ed aggiunto il quadrato dell'HC uguale alla CL, uguale alla LN, sarà il quadrato della CT uguale a' quadrati delle PL LC PS; e però lo stesso quadrato della CT è uguale al quadrato della CS, che ad essi è uguale. Similmente il quadrato della DT è uguale a quello della CS; dunque tutti i lati del pentagono si provano uguali. Ancora gli angoli sono uguali, perchè essendo la NL divisa secondo l'estrema e media ragione nel punto P, aggiuntovi l' NO uguale al maggiore segmento NP, sarà ancora l'OL divisa nel punto N secondo l'estrema e media ragione (5. XIII), il di cui maggior segmento sarà la NL, e la NO, uguale all'OR, il minore; dunque li due quadrati delle LO OR sono il triplo del quadrato della NL (4. XIII): ed aggiunto il quadrato della LC uguale alla NL, saranno i quadrati delle OL OR LC, cioè delle OR OC, oppure il quadrato della CR, uguale a 4 quadrati della NL, cioè al quadrato della LK, o della CD; dunque la CR è uguale alla CD: e lo stesso si dimostrerebbe della DS; però

i triangoli CSR CTD DRS, essendo tutti i lati dell' uno uguali a' lati dell' altro, e le basi uguali, avranno gli angoli uguali; onde ancora gli altri due angoli del pentagono sono uguali a qualunque di questi tre (7. XIII); però questo pentagono è regolare: e perchè il centro X della sfera è nel mezzo del cubo inscritto in essa, sarà la XN uguale all'LN, e la NV uguale all'NP, uguale all'NO; dunque la XV è pure divisa nel punto N secondo l'estrema e media ragione, il di cui minore segmento è l' NV uguale alla VR; onde i due quadrati delle XV VR, cioè il quadrato della XR è triplo del quadrato della XN (4. XIII), onde la XR è uguale al raggio della sfera, perchè il suo quadrato è triplo del quadrato della metà del lato cubico, siccome il quadrato del diametro è triplo del quadrato dell' intiero lato di esso cubo (15. XIII): e similmente la XT è uguale al raggio della sfera, essendo il punto T vertice del triangolo CDT ugualmente alto sopra il quadrato del cubo CDAG, come il punto R vertice dell'uguale triangolo DRE è alto sopra l'altro quadrato CDEB, cui ugualmente s' inclina esso triangolo, essendo ne' triangoletti HQT ROK il lato HQ (uguale all' NZ), uguale all' OK, ed il lato QT uguale all' OR intorno agli angoli retti HQT KOR; e però l' HT è uguale alla KR. e l' angolo THQ è uguale all' RKO; onde tutte le distanze degli angoli del pentagono RDTCS dal punto X essendo uguali a' raggi della sfera, tutto il dodecaedro compreso dai dodici pentagoni, che si descriverebbero sopra i dodici lati del cubo, come questo è descritto sopra la CD, in modo che il lato

del cubo sia la corda sottesa ad un angolo di esso pentagono, resterà inscritto nella medesima sfera. Il quadrato del cui diametro essendo triplo del quadrato del lato del cubo (15. XIII), come il quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto è triplo del quadrato del lato dell' esagono (12. XIII); ed il quadrato del lato LK del cubo al quadrato del lato SR del pentagono essendo, come il quadrato della NK al quadrato della NO, o come il quadrato della NO al quadrato della OK (per essere in estrema e media ragione divisa la NK nel punto O, e l' NO il segmento maggiore, l' OK il minore) o come il quadrato del lato dell' esagono al quadrato del lato del decagono (essendo il lato dell' esagono al lato del decagono, come il maggiore segmento al minore della retta divisa in estrema e media ragione (9. XIII); dunque per l' ugualità ordinata, il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato SR del dodecaedro è, come il quadrato del lato del triangolo equilatero al quadrato del lato del decagono; e così il diametro della sfera al lato del dodecaedro è, come un lato del triangolo equilatero a quello del decagono, inscritti nel medesimo cerchio. Il che ec.

Proposizione 18. Probl.

Esporre tutti i lati delle passate cinque figure solide, e paragonarle tra loro.

Sia l' AHB (*Fig.*239) un semicircolo massimo della sfera, ed al diametro BA eretta la perpendicolare AE uguale ad esso diametro, dal centro C

si tiri la CE segante la periferia nel punto D, e si tiri la DI perpendicolare al diametro, e presa la BF uguale a una terza parte dell' AB, si alzino le perpendicolari FG CH, e si congiungano le rette AD AH AG BG, e questa dividasi nel punto K secondo l' estrema e media ragione.

Essendo come 3 a 2 così l' AB all' AF, così il quadrato dell' AB al quadrato dell' AG, sarà l' AG il lato del tetraedro (13. XIII): ed essendo come 2 ad 1, così l' AB all' AC, così il quadrato dell' AB al quadrato dell' AH, sarà l' AH il lato dell' ottaedro (14. XIII): ed ancora essendo come 3 ad 1 così l' AB alla BF, così il quadrato dell' AB al quadrato della BG: dunque la BG è il lato del cubo (15. XIII): ed essendo l' AE doppia dell' AC, sarà ancora la DI doppia della CI; e però il quadrato della DI è quadruplo del quadrato della CI, onde li due quadrati delle DI CI, cioè il quadrato del raggio CD, ovvero della CA, è quintuplo del quadrato della CI; onde essendo la CI media proporzionale tra il raggio CA, e la quinta parte di esso; sarà l' AD, per la costruzione della Proposizione 16, il lato dell' Icosaedro: ed essendo la BK la maggior porzione della BG segata secondo l' estrema e media ragione, sarà essa BK il lato del dodecaedro (17. XIII). Dunque essi lati AG AH BG AD BK sono i lati delle cinque figure solide inscritte nella stessa sfera: e presa l'AB uguale alla radice di 60, saranno uguali la AG alla radice di 40, l' AH alla radice di 30, la BG alla radice di 20, e l'AD alla radice di 30 diminuito della radice di 180 (perchè l'AC è

uguale alla radice di 15, essendo il quadrato della AC la quarta parte del quadrato della AB; e la CI alla radice di 3, essendo il suo quadrato la quinta parte del quadrato dell'AC; onde l'AI è uguale alla differenza delle radici di 15 e di 3; quindi il suo quadrato uguaglia l'aggregato di 15 e di 3 diminuito della doppia radice di 45, o sia diminuito della radice di 180: e posto comune il quadrato della DI, ch' è uguale a 12, sarà l' AD uguale alla radice di 30 diminuito della radice di 180): e finalmente sarà la BK uguale a 5 diminuito della radice di 5; imperocchè essendo la BG uguale alla radice di 20, cioè alla doppia radice di 5, e chiamando M il maggior segmento BK, sarà come la doppia radice di 5 ad M così M alla doppia radice di 5 diminuita di M; quindi dagli uguali rettangoli delle estreme e delle medie (ponendo comune ad entrambi il quadrato della radice di 5, cioè 5) si ricava M accresciuto della radice di 5 uguale a 5, e però M, cioè la BK, uguale a 5 diminuito della radice di 5; il cui quadrato essendo 30 diminuito di dieci volte la radice di 5, o sia diminuito della radice di 500, risulta la BK uguale alla radice di 30 diminuito della radice di 500.

IL FINE.

SAGGIO ELEMENTARE

SUL METODO

DEI LIMITI

SAGGIO ELEMENTARE

SUL METODO

DE' LIMITI

PREFAZIONE.

Questo saggio elementare contiene le principali cose inseguate da Archimede sulla misura del circolo, del cilindro, del cono, e della sfera, che sono gli argomenti più agevoli, ai quali il Geometra sommo applicò il metodo de' limiti da esso inventato.

Soleva in addietro una tal parte della Geometria essere spiegata agli Allievi, come preludio, nel principio del Corso, e la sperimentata utilità di essa compensava quel tempo, che, non senza angustia dei successivi trattati, vi si dovea dedicare.

Ma l' opportunità della presente edizione offre un luogo acconcio più d' ogn' altro per così fatta appendice degli Elementi, che furono giudicati convenire alla Scuola Militare del Genio e dell' Artiglieria.

Tra i parecchi vantaggi che arreca al progresso degli Allievi un'istruzione, benchè ristretta ed elementare sul metodo dei limiti, due sono principali. Il primo consiste nella opportuna gradazione, con cui si apparecchia per cotal mezzo il pas-

saggio dagli antichi modi di trattare la Geometria finita, alle dottrine più recenti del calcolo sublime.

Il secondo deriva dalla retta nozione che acquistar ponno gli Allievi circa la maniera colla quale gli Antichi intrapresero di fondare la teoria delle linee e delle superficie curve.

Pare che ogni dì più si diffonda ne' giovani studiosi delle matematiche discipline una certa nausea, quasi ostentata, pe' vecchi Autori, la quale non solamente è contraria alla giustizia ed alla riconoscenza dovuta ad essi, ma ancora all' interesse, ed al decoro della scienza medesima.

Senza adottare una superstiziosa preferenza pegli Antichi, egli è bene che gli Aspiranti alla scuola militare di Modena o si preservino dal sentimento opposto, o lo depongano se già l' avessero ricevuto.

Confrontare l' indole degli antichi metodi con quella dei moderni, investigare quei punti, ne' quali o coincidono, o possono ravvicinarsi i loro principj, se è tuttavia lo studio non infruttuoso di qualche segnalato promotore del nuovo calcolo, non sarà temerario l' affermare, che sia pe' Giovani il più sicuro mezzo d' istruirsi solidamente nell' una e nell' altra dottrina col vicendevole soccorso di entrambe.

Tale appunto è lo scopo cui tende la scelta e la distribuzione degli studi componenti il corso teorico di questa Scuola.

Il saggio di cui si tratta è dovuto al benemerito Sig. Professore Paolo Cassiani. Ma la penosa

malattia che poi lo rapì alla Patria ed alla Scuola, non gli permise di conformare il primo suo lavoro alle considerazioni prescritte dalle circostanze della presente edizione.

Avvenne ciò nulla ostante che più volte manifestasse la sua intenzione sopra di tale argomento, per modo ch' io spero d' aver adempita la sua volontà nel determinare gli articoli soggetti ad essenziali cangiamenti. Stimerò poi d' aver corrisposto all' onor dell' incarico, e conseguito il frutto della mia qualunque siasi fatica, se non distinguasi nel testo l' opera mia.

GIUSEPPE TRAMONTINI
Professor nella Scuola Militare.

CAPITOLO I

DEFINIZIONE

§ 1. Una quantità determinata AB si chiami limite d'un'altra quantità variabile AX, crescente (*Fig.* 1), o decrescente (*Fig.* 2), allorchè restando la AX sempre minore di AB nel primo caso, e sempre maggiore nel secondo, se le avvicina continuamente per modo che la differenza BX può divenir minore di qual si voglia quantità data della medesima specie.

TEOREMA I

§ 2. Se due quantità di grandezza determinata siano limiti di due altre quantità variabili, e se ciascheduna grandezza d'una delle variabili alla corrispondente grandezza dell'altra variabile abbia sempre una medesima ragione, ancora i limiti avranno quella ragione.

Rappresentino AX, CY (*Fig.* 3) grandezze corrispondenti delle due quantità variabili, e siano queste in primo luogo crescenti. AB, CD siano i loro limiti, e la ragione che hanno sempre fra loro due corrispondenti grandezze delle quantità variabili sia quella di M ad N. Dico essere il limite AB al limite CD come M ad N.

Imperciocchè se non è così, sarà come M ad N così AB ad una quantità maggiore, o minore di CD.

Sia primieramente come M ad N, così AB a CT minore di CD. Perchè CD è limite di CY, potrà la differenza DY divenir minore della DT, e però CY può acquistare una grandezza CV maggiore di CT (§ 1). Pongasi AR la grandezza di AX la quale corrisponde alla grandezza CV di CY. Sarà per tanto come M ad N, così AR a CV. Ma è pure come M ad N così AB a CT per supposizione. Adunque come AR a CV, così AB a CT (*pr.* 11. V) Essendo poi AR minore di AB, dovrà pur essere CV minor di CT (14. V). E si è posto maggiore. Dunque CV è insieme maggiore e minore di CT, lo che è assurdo, e però non puot' essere come M ad N, così AB ad una quantità minore di CD.

Sia in secondo luogo come M ad N così AB a CS maggiore di CD. Sarà invertendo come N ad M, così CS ad AB (4 *cor.* V). Si faccia come CS ad AD, così CD ad AP.

Essendo CS maggiore di CD, sarà pure AB maggiore di AP, o vero AP minore di AB. Ora, essendo N ad M, come CS ad AB, e come CD ad AP, sarà N ad M come CD ad una quantità minore di AB.

Ma perchè come M ad N, così si pone ogni grandezza di AX alla corrispondente grandezza di CY, sarà pure invertendo come N ad M, così ogni grandezza di CY alla corrispondente grandezza di AX. Laonde si dimostrerà in modo simile a quello dianzi adoperato che non puot' essere come N ad M così CD ad una quantità minore di AB. Non può dunque essere nemmeno come M

ad N, così AB ad una quantità maggiore di CD: Ma fu dimostrato che non puot' essere M ad N come AB ad una quantità minore di CD; dunque rimane che sia come M ad N così AB a CD.

Siano decrescenti le proposte quantità variabili. Dico parimenti essere il limite AB al limite CD come M ad N (*Fig.* 4).

Se ciò non è, sarà come M ad N, così AB ad una quantità maggiore, o minore di CD.

Sia primieramente come M ad N, così AB a CS maggiore di CD.

Ciò posto, potrà CY acquistare una grandezza CV minore di CS. Pongasi AR la grandezza di AX corrispondente alla grandezza AV di CY. Sarà come M ad N, così AR a CV. Ma è ancora come M ad N così AB a CS; dunque come AR a CV, così AB a CS, ed essendo AR maggiore di AB, sarà CV maggiore di CS. Ma si è posta CV minore di CS; dunque CV è nello stesso tempo maggiore, e minore di CS, lo che è assurdo; e perciò non sarà M ad N come AB ad una quantità maggiore di CD.

Sia in secondo luogo M ad N come AB ad una quantità CT minore di CD. Avremo invertendo N ad M come CT ad AB. Se poi si farà CT ad AB, come CD ad AP, sarà AB minore di AP essendo CT minore di CD; ed essendo come N ad M, così CT ad AB, e così pure CD ad AP, sarà N ad M così CD ad una quantità maggiore di AB, lo che non può essere; Imperocchè se come M ad N, così è ogni grandezza di AX alla corrispondente grandezza di CY sarà pure invertendo come N ad M,

così ogni grandezza di CY alla corrispondente grandezza di AX. Si potrà dunque dimostrare in modo simile al precedente che non può essere N ad M, così CD ad una quantità maggiore di AB. Dunque nemmeno puot' essere M ad N come AB ad una quantità minore di CD.

Per tanto non potendo essere M ad N come AB ad una quantità nè maggiore, nè minore di CD, sarà M ad N, così AB a CD.

COROLLARIO.

§ 3 Se M ed N siano eguali, saranno fra loro eguali le corrispondenti grandezze delle variabili, e quindi eguali ancora i loro limiti.

DEFINIZIONE.

§. 4. Se un arco circolare sia diviso in parti eguali, e si tirino tutte le corde sottese ad esse parti, chiamisi contorno rettilineo regolare iscritto il sistema di tali corde. Se poi conducasi parallela a ciascheduna di esse una tangente, ed il sistema di queste tangenti, terminate ne' punti dove scambievolmente s' incontrano sia compreso dai due raggi del circolo cui spetta l' arco dato, condotti pegli estremi dell' arco stesso, e prolungati finochè incontrino le tangenti estreme, tal sistema di rette tangenti si chiami contorno circoscritto.

PROBLEMA I.

§. 5. **Ad un arco di circolo iscrivere un contorno rettilineo regolare, e circoscrivere un altro simile all' iscritto, talchè il circoscritto abbia all' iscritto ragion minore che quella d' una data retta ad un' altra qualsivoglia di essa minore.**

Sia (*Fig* 5) AFB l' arco dato, C il suo centro, P, Q le date rette delle quali sia P la maggiore. Si conducano i raggi CB, CA, e si prolunghino indefinitamente. Ad uno di essi CB conducasi in B la perpendicolare BH. Trovisi la quarta proporzionale dopo le rette P, Q, CB, e fatto centro in C coll'intervallo eguale alla quarta proporzionale ritrovata, si descriva un circolo che seghi in un punto G la retta BH prolungata se occorra. Si conduca la retta CH, la quale seghi in N l' arco dato. Dividasi per mezzo l' angolo BCA, e la metà si divida nuovamente per mezzo, e ciò si continui a fare finchè pervengasi ad un angolo FCB minore dell' angolo NCB. Sulla retta CF prolungata fino ad incontrare in G la BH conducasi perpendicolare in E la BE, la quale si prolunghi fino ad incontrare in K l' arco dato BA. Finalmente condotta la CK, e pel punto F la FI parallela alla BE, si prolunghino le CK, CB fino ad incontrare in L ed I la LI. Dico essere BK un lato del cercato contorno iscritto, ed LI il lato corrispondente del simile contorno circoscritto.

E primieramente per essere la corda BEK per-

pendicolare in E alla CG, sarà da essa divisa per mezzo nel punto E, e la CG dividerà per mezzo l' angolo BCK (3. III). In oltre il numero degli angoli eguali all' angolo BCF contenuti nell' angolo BCA è moltiplice di due; dunque l' angolo BCK misura l' angolo BCA, e perciò l' arco BK misura l'arco BA, e quindi o il punto K coincide col punto A, o l'arco BA potrà esser diviso in archi eguali a BK, e le corde sottese agli archi stessi saranno tutte eguali fra loro (29. III), essendo ciascheduna eguale alla BK .

Il contorno dunque da esse formato sarà equilatero, ed iscritto all' arco BA (§ 4).

Per essere poi LI parallela a BK, sarà perpendicolare in F alla CG, e perciò toccherà l' arco BA (16. III). Ma a ciascun lato come BK del contorno iscritto, si potrà condurre una parallela come LI, tangente l' arco sotteso al lato stesso del contorno iscritto, intercetta fra i raggi che comprendono l' arco medesimo, e quindi eguale alla LT; dunque il sistema di tali tangenti formerà un contorno equilatero circoscritto all'arco BA. Il numero poi de' suoi lati sarà eguale al numero dei corrispondenti lati i quali compongono il contorno iscritto; l'angolo compreso da due contigui lati del circoscritto eguaglierà quello compreso pure dai due contigui corrispondenti dell' iscritto (29. I). Tutti gli angoli dell' iscritto essendo eguali fra loro, eguali pure saran fra loro quelli del circoscritto . Laonde sarà pur regolare il contorno circoscritto, e simile all' iscritto .

Dico finalmente avere il circoscritto all' iscritto ragion minore che P a Q.

Imperciocchè essendo CG minore di CH, avrà CG a CB minor ragione che CH a CB (8. V), cioè minor ragione che P a Q. Ma come sta CG a CB, così sta BG a BE (8 VI); dunque BG a BE ha minor ragione che P a Q. Essendo poi eguali e simili i triangoli GBG, CFI, ed il lato BG eguale al lato FI, avrà FI a BE minor ragione che P a Q, e perciò LI doppia di FI a BK doppia di BE avrà minor ragione che P a Q. Laonde tutto il contorno circoscritto a tutto l' iscritto avrà minor ragione che P a Q (12. V).

COROLLARIO.

§. 6. La risoluzione s'applica evidentemente ancora al caso che invece di un arco sia data l'intera circonferenza. Ciascun quadrante, o qualunque parte aliquota della medesima potrà essere considerata come l' arco proposto (§. 5).

TEOREMA 2.

§. 7. Ciascun arco di circolo è limite dei contorni rettilinei ad esso iscritti, e circoscritti.

Sia BHD l' arco dato (*Fig.* 6), e ad esso circoscritto un contorno rettilineo MLI, ed iscritto un altro simile BKD. Se dividansi per mezzo in H ed O gli archi BK, KD, e s' intendano tirate le corde BH, HK, KO, OD, esse formeranno un contorno iscritto all'arco dato, maggiore del contorno BKD (20. I). In simil modo bisecando gli

archi BH, HK, KO, OD, si otterrà un altro contorno iscritto, maggiore del contorno BHKOD; e così successivamente. Adunque i contorni iscritti per tal modo sono quantità crescenti che si accostano continuamente all' arco dato, rimanendo sempre di esso minori. Ora s'intenda condotta una retta *pru* parallela alla corda DO, tangente in *r* l' arco DO, ed intercetta fra i raggi CD, CO prolungati. S' intenda pure prodotto il raggio C*r* ad incontrare in *q* la MO.

Per essere CM a CO come M*q* a *q*O (3. VI), ed MC maggiore di CO (14. V), sarà M*q* maggiore di *q*O. Inoltre essendo i due triangoli rettangoli C*ru*, CO*q* eguali e simili, sarà *ru* eguale a *q*O. Perchè poi *ru* eguaglia *pr*, sarà tutta la *pu* minore della MO. Ma *pu* è un lato del contorno circoscritto simile all' iscritto DOKHB, e tanti saranno i lati circoscritti come *pu*, quanti sono i semilati come MO del primo contorno circoscritto MLI. Dunque il contorno circoscritto simile all' iscritto DOKHB è minore del primo contorno circoscritto MLI. Lo stesso si dimostrerà del contorno circoscritto d' un numero di lati doppio di quello che ha il contorno DOKHB, e così successivamente. Perciò continuando a circoscrivere contorni simili a quelli che saranno successivamente iscritti (§. 4), quei contorni saranno di mano in mano minori l' uno dell' altro, e perciò i contorni per tal modo circoscritti sono quantità decrescenti, le quali di continuo s' accostano all' arco dato, rimanendo sempre di esso maggiori.

Dobbiamo ancora dimostrare che la differenza

dell' arco dato da un contorno circoscritto; ed il suo eccesso sopra un contorno iscritto può divenir minore di qual si voglia retta data.

Chiamisi X codesta retta, ed S un' altra retta eguale ad un qualunque contorno circoscritto all' arco dato.

S' intenda iscritto all' arco stesso un contorno BKD, e circoscritto un altro simile ILM, talchè il circoscritto abbia all' iscritto ragion minore che la retta composta dalle due S ed X alla sola S. Adunque sarà la composta delle due S, X alla sola S come una retta maggiore del contorno circoscritto ILM al simile iscritto BHD. Si chiami Y codesta retta, e sarà dividendo come la X alla S, così l'eccesso della Y sopra il contorno BKD allo stesso contorno BKD (17. V). Ma il contorno BKD è minore della quantità S; dunque ancora l' eccesso in cui Y supera il contorno BKD è minore di X (14.V). Il contorno poi ILM è posto minore di Y. Dunque l' eccesso del contorno ILM sopra il contorno BKD sarà vie minore di X. In oltre tanto l'eccesso del contorno ILM sopra l'arco dato BHD, quanto l'eccesso dell' arco stesso sopra il contorno BKD è manifestamente minore che l'eccesso del contorno ILM sopra il simile contorno BKD, e perciò minore di X. Adunque la differenza tra l'arco ed il contorno iscritto o circoscritto può divenir minore di qualunque retta data, e quindi l' arco è limite dei contorni rettilinei che si ponno ad esso circoscrivere, ed iscrivere.

COROLLARIO.

§. 8. Il medesimo discorso vale pel caso in cui sia proposta l'intera circonferenza, e perciò la circonferenza di un circolo è limite di tutti i perimetri rettilinei regolari che si ponno ad essa iscrivere e circoscrivere.

TEOREMA 3.

§. 9 Gli archi simili sono proporzionali ai diametri, o semidiametri de' circoli ai quali appartengono.

Siano BD, *bd* (*Fig.* 6) archi simili; C sia il centro del primo, *c* quello del secondo, e si tirino i semidiametri CB, CD, *cb*, *cd*.

Essendo uguali gli angoli BCD, *bcd*, se dividasi per mezzo il primo colla CK, il secondo colla *ck*, saranno eguali fra loro BCK, KCD, *bck*, *kcd*. Se poi si tirino le corde BK. KD. *bk*, *kd*, saranno eguali gli angoli BKD, *bkd*, e perciò il contorno iscritto all'arco BD è equiangolo al contorno iscritto all'arco *bd*, e tutta la figura rettilinea BKDCB è simile alla figura rettilinea *bkdcb*. Nel modo stesso si potranno dimostrar simili i contorni che si ottengono bisecando gli archi BK, KD, *bk*, *kd*, e tirando le corde corrispondenti alle metà degli archi stessi, e quindi simili pure le figure rettilinee comprese rispettivamente da quei contorni e dai raggi CB, CD, *cb*, *cd*. Adunque come il contorno iscritto all'arco DB

sta al simile contorno iscritto all' arco *db*, così il raggio CD sta al raggio *cd* (4. VI e 12. V).

Ma gli archi sono limiti dei contorni iscritti (§. 7); dunque l'arco DB all'arco simile *db* sta come il semidiametro CD al semidiametro *cd* (§. 2).

COROLLARIO 1.

§. 10. Laonde ancora le intere circonferenze hanno fra loro la medesima ragione che i semidiametri rispettivi, o pure quella degli interi diametri (4. V).

COROLLARIO 2.

§. 11. Poichè la circonferenza di un circolo a quella di un altro sta come il diametro del primo a quello del secondo (§. 9), sarà permutando come la circonferenza d' un circolo al suo diametro, così la circonferenza dell' altro circolo al suo diametro; dunque la ragione della circonferenza al diametro è la medesima in tutti i circoli, e quindi i circoli sono figure tutte simili fra loro.

SCOLIO.

§. 12. Se si potesse ritrovare una retta di grandezza determinata, la qual fosse limite di un' altra retta crescente o decrescente, le grandezze della quale eguagliassero i contorni successivamente iscritti, o circoscritti al circolo, quella prima retta sarebbe eguale alla circonferenza

del

del circolo. Ma essa non fu ancor ritrovata ed è forse impossibile ritrovarla con precisione geometrica. Per ciò non si ha la misura della circonferenza circolare se non per approssimazione.

TEOREMA 4.

§. 13. La circonferenza del circolo eccede il triplo del suo diametro d' una quantità minore che la settima parte e maggiore che dieci settantesime prime parti di esso.

Sia AC il semidiametro del circolo (*Fig.* 7), A il suo centro, CB perpendicolare in C alla CA, e sia adattata nel circolo la corda CM eguale al semidiametro CA, indi conducasi AB perpendicolare a CM e concorrente in B colla BC. Sarà BC eguale alla metà di BA. Dividasi per mezzo l'angolo BAC colla retta AD, e l'angolo DAC colla AE, e l'angolo EAC colla AF, e l'angolo FAC colla AG. Sarà la BA alla AC come la BD alla DC (3. VI), e quindi componendo e permutando la BA colla AC alla BC come la AC alla CD (18, 16. V). In modo simile si dimostra essere la AD colla AC alla CD come la AC alla CE, e la AE colla AC alla CE come la AC alla CF, e la AF colla AC alla CF come la AC alla CG.

Ora se pongasi essere AB 306, sarà BC 153, ed estratta la radice della differenza tra 'l quadrato di BC, e quello di AB, si otterrà AC maggiore di 265. Adunque AC a CD avendo egual ragione che AB insieme con AC alla CB, avrà maggior ragione che 571 a 153. Perciò se pon-

gasi CD 153, sarà AC maggiore che 571, e quindi il quadrato di AD, sarà maggiore che la somma de' quadrati formati dai due numeri 571 e 153. Sarà dunque AD maggiore della radice estratta da cotal somma, cioè maggiore di 591 $\frac{1}{4}$.

Ragionando nel modo stesso trovasi AC a CE aver maggior ragione che 1162 $\frac{1}{8}$ a 153. Posta dunque CE 153, sarà AC maggiore di 1162 $\frac{1}{8}$, e quindi AE maggiore che la radice estratta dalla somma dei quadrati che si formano dai due numeri 1162 $\frac{1}{8}$, 153, cioè maggiore di 1172 $\frac{1}{8}$, e quindi AC a CF avrà maggior ragione che 2334 $\frac{1}{4}$ a 153.

Se dunque pongasi CF essere 153, sarà AC maggiore di 2334 $\frac{1}{4}$, e quindi ragionando come di sopra si troverà AF maggiore di 2339 $\frac{1}{2}$. Perciò AC a CG avrà maggior ragione che 4673 $\frac{1}{2}$ a 153, cioè posto CG essere 153, sarà AC maggiore di 4673 $\frac{1}{2}$.

Per tanto essendo l'angolo BAC la terza parte di un retto, sarà l'angolo GAC la novantesima sesta parte di due retti, e perciò sarà CG eguale alla metà del lato d' un poligono regolare di novanta sei lati circoscritto al circolo. Avendo dunque AC a CG maggior ragione che $4673\frac{1}{2}$ a 153, ancora il diametro del circolo all' intero lato del poligono di novanta sei lati circoscritto ad esso avrà maggior ragione che 4673 $\frac{1}{2}$ a 153, cioè posto il lato di quel poligono essere 153, sarà il diametro maggiore di 4673 $\frac{1}{2}$.

Ora se moltiplicheremo il numero 153 pel

numero 96 avremo il prodotto 14688 che rappresenterà la lunghezza di tutto il perimetro circoscritto, e perciò questo perimetro al diametro del circolo avrà minor ragione che 14683 a 4673 $\frac{1}{2}$, la quale è prossimamente minore che quella di 3,14283 all' unità, cioè ponendo eguale all' unità il diametro, sarà il perimetro regolare di novanta sei lati circoscritto al circolo minore di 3,14283.

Ma la frazione 0,14283 è minore di $\frac{1}{7}$; dunque il perimetro circoscritto di 96 lati eccede il triplo del diametro d' una quantità minore che $\frac{1}{7}$ del diametro stesso.

In secondo luogo pongasi BA (*Fig.* 8) il diametro del circolo BCAM... L'angolo BAC eguagli la terza parte di un retto. Si divida per mezzo l'angolo BAC colla retta AE, e l'angolo BAE colla AF, e l' angolo BAF colla AG, e finalmente l' angolo BAG colla AH, e dal punto B ai punti C, E, F, G, H, dove la circonferenza del circolo è incontrata dalle rette AC, AE, AF, AG, AH, si conducano le rette BC, BE, BF, BG, BH. Seghinsi nel punto D le due AE, BC.

Nei triangoli rettangoli EBD, EAB (31. III) sono eguali gli angoli EAB, EBD (27. III), e perciò ancora i due EBA, EDB (32. I). Adunque come AE ad EB (4. VI), così AB a BD; ma per essere diviso per mezzo dalla AE l' angolo BAC sarà AC ad AB, come CD a DB, e componendo e permutando sarà AC con AB a BC come AB a BD, cioè come AE ad EB (11. V). In simil modo si dimostrerà essere AE con AB a BE

come AF ad FB, ed AF con AB a BF come AG a BG, ed AG con AB a BG come AH ad HB.

Ora pongasi essere AB 1560, sarà BC 780 ed AC minore di 1351, perciò AE a BE avrà minor ragione che 2911 a 780, cioè posto essere BE 780, sarà AE minore che 2911, laonde in tal supposizione sarà BA minore della radice estratta dalla somma dei quadrati che si formano dai due numeri 2911 e 780, cioè sarà AB minore di 3013,69. Adunque AF ad FB avrà minor ragione che 5924,69 a 780, ovvero posto essere FB 780, sarà AF minore che 5924,69, e BA minore di 5975,82; d'onde si conchiude avere in tale ipotesi AG a GB minor ragione che 11900,51 a 780. Per tanto, posto essere BG 780, sarà AG minore di 11900,51, e perciò AB minore di 11926,05. Quindi AH ad HB avrà minor ragione che 23826,56 a 780. Ciò posto, sarà AB minore di 23839,33, ed avrà HB ad AB maggior ragione che 780 a 23839,33.

Ma per essere l'arco BC la terza parte della semicirconferenza (15. III), sarà l'arco BH la novantesima sesta parte della circonferenza intera, e quindi sarà la corda BH lato d'un poligono regolare di novanta sei lati iscritto al circolo.

Adunque il lato di questo poligono al diametro del circolo ha maggior ragione che il numero 780 al numero 23839,33, e perciò maggior ragione che 780 a $23839\frac{2}{5}$.

Moltiplicando ora il numero 780 per 96 si otterrà il prodotto 74880, e se da questo numero

pongasi rappresentato il perimetro regolare di novanta sei lati iscritto al circolo, sarà il diametro di esso minore di 23839 $\frac{2}{5}$. Ora diviso il primo numero 74880 pel secondo 23839 $\frac{2}{5}$, il quoziente sarà maggiore di 3,141; perciò se il diametro pongasi essere l'unità, il perimetro suddetto sarà maggiore che 3,141. Ma la frazione 0,141 è maggiore di $\frac{10}{71}$; dunque il perimetro regolare di novanta sei lati iscritto al circolo eccede il triplo del suo diametro d'una quantità maggiore che dieci settantesime prime parti di esso.

Si è dimostrato in oltre che il perimetro regolare di novanta sei lati circoscritto al circolo eccede il triplo del suo diametro d'una quantità minore che la settima parte del diametro stesso, e la circonferenza del circolo è maggiore del perimetro inscritto e minore del simile circoscritto; dunque la circonferenza del circolo eccede il triplo del suo diametro d'una quantità minore che la settima parte, e maggiore che dieci settantesime prime parti dello stesso diametro.

COROLLARIO.

§. 14. Adunque la ragione del diametro alla circonferenza è maggiore che quella di 7 : 22 e minore che quella di 71 : 223 (1).

(1) Posteriormente ad Archimede, Apollonio Pergeo, ed altri fra gli Antichi proposero più accurate ragioni del diametro alla circonferenza. Ma le numeriche loro espressioni sono lonta-

CAPITOLO II

DEFINIZIONE

§. 15. Si chiamino poligoni regolari iscritti ad un settore di circolo quelli che sono contenu-

ne dalla brevità di quelle che propone Archimede e singolarmente della prima di 7 : 22 , la quale fu in seguito comunemente preferita in tutti i casi che non dimandano un estremo rigore.

Del resto egli è ben verosimile che l' Inventore d' un metodo sì elegante e sottile poteva , seguendo le medesime traccie , determinare una ragione più accurata con numeri più grandi, se non si fosse proposto soltanto di provvedere agli ordinarj bisogni delle arti .

Dappoichè furono costruite le tavole trigonometriche divenne più agevole a ritrovarsi la ragione dei perimetri mentovati al diametro del circolo. Basta prendere in esse l' espressione del supposto lato iscritto o circoscritto, e moltiplicata per 96 darà il numero che esprime l' intero perimetro .

Fra le proporzioni trovate dai Moderni merita distinzione quella di Mezio che è di 113 a 355 .

Molto accurata è l' approssimazione trovata col laboriosissimo calcolo da Lodolfo da Ceulen. Egli trova la circonferenza
maggiore di 3,14159265358979323846264338327950288
e minore di 3,14159265358979323846264338327950289
prendendo il diametro eguale all' unità . Col soccorso de' metodi somministrati dall' Algebra si può spingere l' approssimazione quanto innanzi si voglia indefinitamente .

Ma pervennero ancora i recenti Geometri a determinare per costruzioni una retta abbastanza prossima in grandezza alla circonferenza , come si può vedere nella Geometria del Compasso del celebre Mascheroni L. XII n. 266 , e nell'Opera di M.r Ozanam , Recreations Mathem. , e nella seguente costruzione attribuita al P. Kolkanski della Comp. di G.

Sia BDA (Fig. F) *una data semiperiferia circolare* , AC *sia il suo raggio* ; AB *il diametro* .

Dal punto B *s' innalzi alla* AB *la perpendicolare* BM , *ed alla retta* BC *nel punto* C *s' applichi l' angolo* BCM *eguale alla metà dell' angolo d' un triangolo equilatero . Dal punto* A *s' in-*

ti dai due raggi del settore e da un contorno rettilineo regolare iscritto all'arco del settore nel modo indicato al (§. 4). Chiaminsi poi poligoni regolari circoscritti quelli che sono contenuti dai raggi prolungati del settore medesimo e da un contorno regolare circoscritto (§. citato). Dicansi inoltre poligoni regolari iscritti ad un segmento di circolo le figure contenute da contorni regolari iscritti all'arco, e dalle rette che uniscono gli estremi di essi contorni; poligoni poi regolari circoscritti si chiamino quelli che sono contenuti da contorni regolari circoscritti all'arco, e dalle rette che pure uniscono gli estremi de' contorni medesimi.

PROBLEMA 2.

§. 16. A qualunque settore di circolo iscrivere un poligono regolare, e circoscrivere un altro simile, tal che il circoscritto ecceda l'iscritto d'una quantità minore di qualsivoglia data della medesima specie.

Sia CAB il dato settore, X la data quantità (*Fig.* 9).

Chiamisi P un qualunque poligono rettilineo circoscritto al settore CAB (§. 15). Vi sarà una retta maggiore del raggio BC, e tale che ab-

nalzi perpendicolare alla stessa AB *la* AR, *e si faccia tripla di* AC. *Pel punto* M *dove si tagliano le* CM, BM *si conduca al punto* R *la* MR, *che sarà prossima in grandezza alla semiperiferia.*

La dimostrazione risulta dal paragone del valore trigonometrico di RM *col valore già conosciuto* (§. 12) *della semicirconferenza supposto il diametro eguale all'unità.*

bia alla CB la ragione medesima che la quantità P insieme colla X ha alla sola P. Sia CR tal retta, e CD media proporzionale fra CR e CB. Si iscriva all' arco AB un contorno rettilineo regolare (§. 5) e circoscrivasi un altro simile, tal che il circoscritto all' iscritto abbia ragione minore che la CR alla CD.

Perchè il contorno circoscritto è simile all' iscritto, saranno equiangoli, e perciò simili (20 e 4 VI), i poligoni circoscritto ed iscritto, che insistono sopra di essi contorni. Dunque il poligono circoscritto al simile iscritto avrà duplicata ragione di quella che ha il contorno circoscritto al simile contorno iscritto (12. V).

Ma la ragione del contorno circoscritto al simile iscritto si è posta minore che quella di CR a CD, dunque la ragione del poligono circoscritto all' iscritto è minore che la duplicata ragione di CR a CD, ovvero la semplice di CR a CB (*Def.* 10.V).

In oltre, perchè sta CR a CB come la supposta quantità P insieme colla X alla P, pongasi una quantità Y maggiore del poligono circoscritto, la quale abbia all' iscritto ragione eguale che la quantità P insieme colla X alla sola P.

Sarà dividendo, l'eccesso di Y sopra il poligono iscritto allo stesso poligono iscritto come la X alla P (17. V). Ma la P è sempre maggiore del poligono iscritto, dunque ancora la X sarà maggiore dell' eccesso di Y sopra lo stesso poligono iscritto, e quindi X sarà vie maggiore dell' eccesso in cui il poligono circoscritto supera l' iscritto.

COROLLARIO.

§. 17. Il problema si eseguirà nello stesso modo se sia dato l' intero circolo invece del settore. Si dividerà il circolo in settori eguali, e si opererà sopra ciascheduno di essi come fu indicato precedentemente.

TEOREMA 5.

§. 18. Qual si voglia settore di circolo è limite dei poligoni regolari che si ponno successivamente ad esso circoscrivere ed iscrivere.

I poligoni insistenti sopra contorni successivamente maggiori, iscritti al settore, costituiscono una serie di quantità manifestamente crescenti, le quali s' accostano sempre più al settore senza mai poterlo eguagliare.

In oltre ogni poligono circoscritto al settore si divide in triangoli ciascun de' quali ha per base un lato del contorno circoscritto, e per altezza il raggio del settore. Dunque ogni poligono circoscritto eguaglia un triangolo che abbia la base eguale al contorno circoscritto che termina il poligono, e per altezza il raggio del settore. Laonde i poligoni circoscritti sono proporzionali ai rispettivi contorni dai quali son terminati (VI. 1). Ma quei contorni se abbiano il numero de' loro lati successivamente maggiore costituiscono una serie di quantità decrescenti (§. 7); dunque ancora i poligoni terminati da quei contorni costi-

tuiscono una serie di quantità decrescenti, le quali s'accostano alla grandezza del settore senza mai poterlo eguagliare.

Finalmente potendosi circoscrivere al dato settore un poligono, ed iscrivere un altro simile, tal che il circoscritto ecceda l'iscritto d'una quantità minore di qual si voglia data della medesima specie (§. 16), si potrà per conseguenza tanto circoscrivere, quanto iscrivere al settore medesimo un poligono tale che la differenza tra 'l poligono ed il settore sia minor di qualunque data quantità superficiale. Laonde il settore è limite dei poligoni regolari successivamente ad esso circoscritti od iscritti (§. 1).

COROLLARIO.

§. 19. Per la stessa ragione il circolo intero è limite dei poligoni regolari che ponno essere ad esso iscritti o circoscritti.

TEOREMA 6.

§. 20. Ogni settore di circolo eguaglia un triangolo che abbia per base una retta eguale all'arco, e per altezza una retta eguale al raggio dello stesso settore.

Rappresenti DB (*Fig.* 10) una retta eguale all'arco del dato settore, e CD perpendicolare in D alla DB rappresenti il suo raggio. Tirata la CB dico essere il triangolo CBD eguale al settore.

Se concepiscasi circoscritto al settore un poli-

gono regolare, il contorno circoscritto sul quale insiste esso poligono sarà maggiore che l'arco del settore, e perciò presa una retta DF eguale a quel contorno, sarà DF maggiore della DB.

In oltre tutto il poligono circoscritto si può risolvere in tanti triangoli fra loro eguali, quanti sono i lati del contorno sul quale insiste. Ciascheduno di questi triangoli avrà per base un lato del contorno e per altezza un raggio del settore. Adunque il poligono circoscritto eguaglia un triangolo, la cui base eguagli il contorno sul quale insiste, e l' altezza eguagli il raggio del settore. Questo triangolo sarà DCF. Ma continuando a circoscrivere al settore poligoni successivamente minori si potrà pervenire ad uno il quale ecceda il settore d' una quantità minor che qual si voglia data (§. 16).

Si adatti nell' angolo CBF ed al lato CB il triangolo CBE eguale a quella data quantità (42, 41. I).

Se all' arco del settore si circoscrivano contorni regolari successivamente minori (§. 5) si potrà pervenire ad uno che ecceda l' arco d' una quantità minore della retta BE.

Per le cose indicate superiormente un tal poligono sarà eguale ad un triangolo minore del triangolo CDE, e maggiore del triangolo CDB, perchè la lunghezza del contorno sul quale insiste sarà maggiore della DB e minore della DE.

Dunque circoscrivendo al settore poligoni successivamente minori e costruendo triangoli come CDF rispettivamente eguali ad essi poligoni, i

poligoni costituiscono una serie di quantità le quali s' accostano al settore senza mai poterlo eguagliare, ma l' eccesso d' un poligono sopra il settore può divenir minore di qualunque data quantità della medesima specie; i triangoli poi rispettivamente eguali ai detti poligoni costituiscono una serie di quantità le quali s'accostano al triangolo CDB senza poterlo mai eguagliare, ma la differenza può divenir parimenti minore di qual si voglia data quantità della medesima specie.

Per la qual cosa il settore è limite dei poligoni, come il triangolo CDB è limite dei triangoli costruiti come CDF eguali rispettivamente ad essi poligoni (§. 1). Adunque il settore ed il triangolo CDB hanno fra loro la medesima ragione di eguaglianza che fra loro conservano le quantità variabili, delle quali sono limiti rispettivamente (§. 3), e perciò il dato settore eguaglia un triangolo la cui base eguagli l'arco, e l' altezza eguagli il raggio del settore medesimo.

COROLLARIO.

§. 21. È chiaro che potendosi applicare il medesimo ragionamento all' intero circolo, ne viene che il circolo eguaglia un triangolo, la cui base eguagli la circonferenza del circolo, e l' altezza eguagli il semidiametro.

TEOREMA 7.

§. 22. La superficie d' un prisma iscritto, o circoscritto ad un cilindro retto detratte le basi è uguale ad un rettangolo, la cui base sia il contorno di una delle basi del prisma, e l' altezza il lato del cilindro.

I piani che racchiudono il prisma iscritto, o circoscritto ad un cilindro retto sono tanti rettangoli ognuno de' quali ha per base uno dei lati di una delle basi del prisma, e per altezza il lato del cilindro. Dunque la superficie del prisma senza le basi essendo la stessa cosa che tutti questi rettangoli presi insieme è uguale ad un rettangolo che abbia per base il contorno di una delle basi del prisma, e per altezza il lato del cilindro.

OSSERVAZIONE

§. 23. Abbiamo considerata la superficie dei prismi iscritti, e circoscritti ad un cilindro detratte le loro basi. Lo stesso faremo sempre in appresso non solo per le superficie dei prismi, ma per quelle ancora delle Piramidi, dei cilindri, e dei coni, quando non avvertiamo espressamente del contrario.

TEOREMA 8.

§. 24. La superficie di un cilindro retto è limi-

te delle superficie di tutti i prismi iscritti, o circoscritti al medesimo cilindro (*Fig.* 11).

Sia X uno spazio dato qualunque. Esisterà sempre una retta EF tale che il rettangolo EFNM la cui altezza FN pareggia un lato AB del cilindro retto ABCD sia minore dello spazio dato X. Alla base CB del cilindro si può sempre iscrivere un poligono regolare, e circoscrivere un altro simile, talchè la differenza tra i contorni dei due poligoni sia minore di EF (§. 7). Ora se sopra questi due poligoni si innalzino due prismi retti della stessa altezza che il cilindro, sarà uno di questi prismi iscritto e l'altro circoscritto al cilindro, e la differenza tra le loro superficie sarà minore del rettangolo EFNM, come facilmente si inferisce dal Teorema precedente. Dunque la differenza tra le superficie del cilindro, e del prisma iscritto e quella altresì tra la superficie del prisma circoscritto, e del cilindro saranno vie minori del rettangolo EFNM, e conseguentemente dello spazio dato X, poichè è manifesto che la superficie del cilindro è sempre maggiore di quella del prisma iscritto, e minore di quella del circoscritto. Dunque le superficie dei prismi iscritti restando sempre minori, e le superficie dei prismi circoscritti restando sempre maggiori della superficie del cilindro, se le avvicinano continuamente per modo che la differenza può divenire minore di qualunque dato spazio. Dunque la superficie del cilindro è limite di quella di tutti i prismi iscritti e circoscritti al medesimo cilindro (§. 1).

TEOREMA 9.

§. 25. La superficie di un cilindro retto è uguale ad un rettangolo, la cui base sia eguale alla circonferenza di una delle basi del cilindro, e la cui altezza sia eguale al lato del cilindro stesso.

Sia ABDC il dato cilindro (*Fig.* 12), FGHE il rettangolo, la cui base FG eguaglia la circonferenza di una base del cilindro, ed FE eguaglia l'altezza.

Sulla base FG del rettangolo EFGH prendasi FM eguale al contorno di un poligono qualunque iscritto alla base CD del cilindro, e condotta la MN perpendicolare ad FG si formi il rettangolo EFMN. Essendo FM sempre minore di FG, anche il rettangolo EFMN sarà sempre minore del rettangolo EFGH. Sia poi X uno spazio dato qualunque. Si potrà prendere LG tale che guidata LI perpendicolare ad FG, il rettangolo ILGH sia minore di X. Ora FG è limite di FM (§. 7), e però FM potrà crescere in guisa che il punto M cada fra L e G, e allora la differenza tra il rettangolo EFGH, ed il rettangolo EFMN sarà minore del dato spazio X. Dunque il rettangolo EFMN restando sempre minore del rettangolo EFGH se gli va avvicinando per modo che la differenza può divenir minore di qualunque spazio dato. Dunque il rettangolo EFGH è limite di tutti i rettangoli EFMN. Ma questi rettangoli sono sempre uguali alla superficie dei prismi iscritti al cilindro ABCD (§. 21), e la superficie di

questo cilindro è limite di quella di tutti i prismi iscritti (§. 24). Dunque la superficie del cilindro ABCD è eguale al rettangolo EFGH (§.3).

COROLLARIO I.

§. 26. Essendo i rettangoli in ragion composta delle basi, e delle altezze (23. VI), le superficie dei cilindri retti sono in ragione composta dei lati dei cilindri, e delle circonferenze delle basi. E perchè le circonferenze dei circoli stanno fra loro come i diametri (§. 11), le superficie dei cilindri retti sono anche in ragion composta dei lati dei cilindri e dei diametri delle basi.

COROLLARIO 2.

§. 27. Allorchè i cilindri retti sono simili, i loro lati hanno la stessa ragione dei diametri delle basi; quindi le superficie dei cilindri retti simili stanno fra loro in ragione duplicata dei diametri delle basi, ed anche in ragione duplicata dei lati dei cilindri.

COROLLARIO 3.

§. 28. La superficie di un cilindro sta a ciascuna base come il lato del cilindro alla quarta parte del diametro di essa base. Imperciocchè ciascuna base del cilindro è uguale ad un rettangolo, il quale abbia per base la circonferenza della stessa base del cilindro e per altezza la quarta parte

del

del diametro (§. 21). Ma la superficie cilindrica è uguale ad un rettangolo il quale abbia la medesima base, e la cui altezza sia eguale ad un lato del cilindro. Dunque la superficie cilindrica sta a ciascuna base come il lato del cilindro alla quarta parte del diametro di essa base (1. VI).

TEOREMA 10.

§. 29. La superficie di un cilindro retto è uguale ad un circolo, il cui semidiametro egua-
gli la media proporzionale fra il diametro di una delle basi, e il lato del cilindro.

Sia ACDB (*Fig.* 12) il dato cilindro, AB un diametro della base, AC il lato. Si chiami K la media proporzionale tra AB ed AC.

La superficie del cilindro ACDB sta alla base come il lato AC del cilindro alla quarta parte del diametro di essa base (§. 28). Ma la base AB sta al circolo del diametro K come il quadrato di AB al quadrato di K (2. XII), cioè per essere K media proporzionale fra AD ed AC, come il diametro AB al lato AC (30. VI). Dunque per eguaglianza perturbata (23. V) la superficie del cilindro ACDB al circolo dal diametro K come il diametro AB alla sua quarta parte, ossia come 4 ad 1. Ora il circolo dal diametro doppio di K ossia dal semidiametro K sta al circolo dal diametro K come il quadrato di due K al quadrato di K cioè come quattro ad uno. Dunque la superficie del cilindro sta al circolo dal diametro K come il circolo dal semidiametro K sta allo stesso circolo dal

diametro K. Perciò la superficie del cilindro è eguale al circolo del semidiametro K.

TEOREMA II.

§. 30. La superficie di una piramide circoscritta ad un cono retto è eguale ad un triangolo la cui base sia il contorno della base della piramide e l' altezza il lato del cono.

Sia il cono retto dal vertice A (*Fig.* 13) e dalla base GHE, il cui centro sia D. BC rappresenti un lato del poligono circoscritto al circolo GHE ed ABC uno dei triangoli i quali comprendono la piramide circoscritta al dato cono.

Dal vertice A si conduca la AE al punto di contatto del lato BC della base della piramide colla circonferenza della base del cono. Sarà AE il lato del cono; e perchè per l' ipotesi l' asse AD è perpendicolare alla base GEH sarà il piano ADE perpendicolare al piano CDB (18. XI). Ora BC è perpendicolare a DE, sezion comune dei due piani CDB ADE. Dunque BE è anche perpendicolare al piano ADE (XI. *def.* 4) e conseguentemente è pure perpendicolare ad AE (XI. *def.* 3). Dunque AE lato del cono è l' altezza del triangolo ABC. Si dimostrerà nella stessa maniera che tutti gli altri triangoli che hanno il vertice comune in A e racchiudono la piramide circoscritta al cono hanno per altezza il lato del cono. Ciascuno poi de' medesimi triangoli ha per base uno dei lati della piramide. Dunque la superficie della piramide circoscritta che è formata da tutti quei

triangoli insieme è eguale ad un triangolo solo, la cui base sia eguale al contorno della base della piramide, e l' altezza il lato del cono .

TEOREMA 12.

§. 31. La superficie di una piramide regolare iscritta ad un cono retto è eguale ad un triangolo, il quale abbia per base il contorno della base della piramide, e per altezza la perpendicolare abbassata dal vertice del cono sopra un lato qualunque della base della piramide .

Sia lo stesso cono proposto (§. 30), GH rappresenti un lato d' un poligono iscritto al circolo GHE; AGH sia uno de' triangoli i quali comprendono la piramide iscritta .

Tutti i triangoli che racchiudono la piramide hanno eguali basi ed eguali pure que'lati, i quali concorrono al punto A , perchè le loro basi sono lati di un poligono regolare , e gli altri lati sono lati di un medesimo cono retto ; sono dunque ancora equiangoli e della stessa altezza . Ora questa altezza è la perpendicolare abbassata dal vertice del cono sopra un qualunque dei lati della base della piramide; dunque la superficie della piramide che risulta da tutti quei triangoli presi insieme è eguale ad un triangolo solo che abbia per base il contorno della base della piramide, e per altezza la suddetta perpendicolare .

TEOREMA 13.

§. 32. Un poligono regolare iscritto ad un circolo è eguale ad un triangolo, la cui base sia il contorno del poligono, e l' altezza eguagli la perpendicolare abbassata dal centro ad un qualunque dei lati.

La dimostrazione si omette perchè ognuno può facilmente trovarla da sè medesimo.

TEOREMA 14.

§. 33. Se ad un cono retto si iscriverà una piramide, e si circoscriverà un' altra insistenti ambedue sopra basi regolari e simili, la superficie della piramide circoscritta starà alla superficie dell' iscritta in ragione minore di quella della base della piramide prima alla base della seconda. Supponendo, come è lecito il fare, che i lati della base di una piramide siano paralleli a quelli della base dell' altra, rappresenti BC (*Fig.* 13) un lato della base della piramide circoscritta, e GH il lato corrispondente della piramide iscritta. Dal centro D della base del cono si conduca al punto di contatto E la retta DE, la quale taglierà il lato GH in R. I punti E, R si uniscano col vertice A del cono dalle rette AE, AR, e si guidi RL parallela ad AE. Sarà AE il lato del cono, AR la perpendicolare abbassata dal vertice A sul lato GH, e DR la perpendicolare abbassata dal cen-

tro della base della piramide iscritta sopra il lato GH della medesima base.

La superficie della piramide circoscritta sta alla sua base come il lato AE del cono al semidiametro DE della base (§§. 30, 32). La superficie poi della piramide iscritta sta alla sua base, come la perpendicolare AR alla perpendicolare DR (§§. 31, 32). Ma essendo RL parallela ad AE, come AE a DE, così sta RL a DR (2. VI). Inoltre RL sta a DR in ragion minore di quella di AR a DR, perchè RL è minore di AR. Dunque la superficie della piramide circoscritta sta alla sua base in ragion minore di quella della superficie della piramide iscritta alla sua base. Laonde permutando, sarà la superficie della piramide circoscritta alla superficie della piramide iscritta in minor ragione di quella della base della prima alla base della seconda.

PROBLEMA 3.

§. 34. Ad un cono retto iscrivere una piramide regolare, e circoscrivere un' altra, la cui base sia simile a quella dell' iscritta, e la superficie della circoscritta ecceda quella dell' iscritta d' una quantità minore che qual si voglia data della medesima specie.

Sia BCDA il dato cono retto (*Fig.* 14), F il centro della sua base, FC un semidiametro, X una data quantità superficiale.

Si chiami P la superficie d' una piramide qual si voglia circoscritta al cono, e pongasi FR tale

che sia la ragione di FR ad FC eguale a quella che ha la quantità P insieme colla X alla sola P. Prendasi FS media proporzionale (13. VI) tra FR ed FC, e si iscriva al circolo BDC un contorno regolare, e circoscrivasi un altro simile tal che il circoscritto abbia all'iscritto ragione minore, che FR ad FS (§. 5). Si proverà come al (§. 16) che il poligono circoscritto all' iscritto ha ragion minore che la quantità P insieme colla X alla sola P. Ciò posto se si costituiscano sui due poligoni due piramidi, i vertici delle quali coincidano con quello del cono, la superficie dell' una sarà circoscritta, e quella dell' altra sarà iscritta al cono stesso. Ma la superficie circoscritta alla iscritta avrà minor ragione che la base circoscritta alla base iscritta. Adunque la superficie piramidale circoscritta alla superficie piramidale iscritta avrà minor ragione che la quantità P insieme colla X alla sola P.

Per la qual cosa vi sarà una superficie maggiore della superficie piramidale circoscritta, che avrà alla superficie piramidale iscritta la medesima ragione che ha la quantità P insieme colla X alla sola P. Quella superficie maggiore della piramidale circoscritta si chiami Y. Sarà dunque l'eccesso della Y sopra la superficie piramidale iscritta alla stessa superficie piramidale iscritta come la X alla P (17. V). Ma la P sarà sempre per ipotesi maggiore della superficie piramidale iscritta; dunque ancora la X sarà maggiore dell' eccesso in cui la Y supera la stessa superficie piramidale iscritta (14. V). Vie maggiore sarà dun-

que la X dell' eccesso in cui la superficie piramidale circoscritta supera l' iscritta.

TEOREMA 15.

§. 35. La superficie d' un cono retto è limite delle superficie piramidali circoscritte ed iscritte a quella del cono.

Continuando a circoscrivere alla base del cono poligoni regolari successivamente minori, ed innalzando sopra di essi altrettante piramidi, che abbiano il vertice comune con quello del cono, le superficie di tali piramidi saranno proporzionali ai contorni delle loro basi (§. 30) e (1.VI). Laonde essendo successivamente minori i contorni delle basi (§. 7), saranno pure successivamente minori l' una dell' altra le superficie piramidali circoscritte al cono, e perciò queste superficie costituiscono una serie di quantità decrescenti, le quali si accostano alla grandezza della superficie conica, rimanendo sempre di essa maggiori.

Iscrivendo alla base del medesimo cono poligoni regolari successivamente maggiori l' uno dell' altro, e sopra di essi elevando altrettante piramidi che abbiano il vertice comune col cono, i perimetri di tali poligoni saranno successivamente maggiori l' uno dell' altro, e le perpendicolari condotte dal vertice sopra di essi diverranno pure maggiori successivamente. Perciò la superficie delle piramidi insistenti su que' poligoni iscritti, le quali saranno iscritte alla superficie conica,

diverranno di mano in mano maggiori (§. 31), e quindi le superficie medesime costituiscono una serie di quantità crescenti, le quali s' accostano alla grandezza della superficie conica, ma rimangono sempre di essa minori .

Finalmente nella serie delle piramidi circoscritte, ed in quella delle inscritte si potrà pervenire a due piramidi, l'una inscritta e l'altra circoscritta insistenti ambedue sopra basi simili, e differenti l' una dall' altra d' una quantità minore di qual si voglia dato spazio superficiale (§. 34). Molto minore sarà allora la differenza fra la superficie conica, e la superficie piramidale circoscritta o pure iscritta. Adunque la superficie del cono è limite delle superficie piramidali ad essa iscritte o circoscritte (§. 1).

TEOREMA 16.

§. 36. La superficie d' un cono retto è uguale ad un triangolo, la cui base sia una retta eguale alla circonferenza della base conica, e la cui altezza eguagli il lato del cono.

Nel triangolo rettangolo CDE (*Fig.* 10) sia la base DB eguale alla circonferenza della data base conica, CD normale a DB eguagli il lato del cono; dico il triangolo DCB essere eguale alla superficie del cono stesso.

Posto che X sia uno spazio dato qualunque, e prese DF , DE, la prima delle quali sia eguale al contorno della base di una qual si voglia piramide circoscritta al cono, e la seconda sia tale che

il triangolo CBE sia minore dello spazio dato X, si dimostrerà in una maniera simile a quella del (§. 20) che il triangolo CBD è limite di tutti i triangoli CFD. Ora questi triangoli sono sempre eguali alla superficie delle piramidi circoscritte al cono (§. 30), e la superficie del cono è limite di quelle delle piramidi (§. 35). Dunque (§. 3.) la superficie conica ABDC è eguale al triangolo CDB.

COROLLARIO I.

§. 37. Le superficie dei coni retti sono in ragion composta dei lati del cono e della circonferenza delle basi, ed anche in ragion composta dei lati dei coni e dei diametri delle basi (23. VI).

COROLLARIO 2.

§. 38. Le superficie dei coni retti simili stanno fra loro in ragion duplicata non meno dei lati dei coni che dei diametri delle basi (20. VI).

COROLLARIO 3.

§. 39. La superficie di un cono retto sta alla base del cono come il lato del cono al semidiametro della base (1. VI).

COROLLARIO 4.

§. 40. La superficie del cilindro retto ABCD

(*Fig.* 15) sta alla superficie del conó retto BEC, che ha la stessa base e la stessa altezza, come il lato AB del cilindro alla metà del lato BE del cono. Imperciocchè la superficie del cilindro ABCD è eguale ad un rettangolo, la cui base sia la circonferenza della base BC e l'altezza il lato AB (§. 25). Ma la superficie del cono BEC è eguale ad un triangolo che abbia per base la circonferenza della base BC, e per altezza il lato EB (§. 36), e perciò è anche eguale ad un rettangolo, la cui base sia la medesima circonferenza, e l'altezza la metà del lato BE. Dunque la superficie del cilindro ABCD sta alla superficie del cono BEC come il lato AB del cilindro alla metà del lato BE del cono.

TEOREMA 17.

§. 41. La superficie di un cono retto è eguale ad un circolo, il cui raggio sia medio proporzionale fra il lato del cono e il semidiametro della base.

Sia BECG (*Fig.* 15) il dato cono retto, BCG la sua base, BC un diametro di essa, BE un lato del cono, F il centro della base, BK media proporzionale tra BF e BE; dico essere la superficie del cono eguale al circolo descritto col semidiametro BK.

Il circolo del semidiametro BK sta alla base BC come il quadrato di BK al quadrato di BF, (2. XII) cioè come BE a BF. Ma anche la superficie del cono BEC sta alla base BC come BE

a BF (§. 39). Dunque la superficie del cono BEC è eguale al circolo del semidiametro BK (9. V).

TEOREMA 18.

§. 42. Se un triangolo sia tagliato da una retta parallela alla base ed intercetta fra gli altri due lati, il rettangolo contenuto da uno di essi e dalla base, eguaglia il rettangolo contenuto dalla porzione del lato stesso intercetta fra 'l vertice e la retta secante, e dalla medesima secante, insieme col rettangolo contenuto dalla rimanente porzione del lato e dalla somma della secante colla base.

Sia (*Fig.* 16) il triangolo ABF tagliato dalla retta EG parallela a BF. Dico essere il rettangolo contenuto dalle AB, BF eguale ai due rettangoli, l' uno de' quali è contenuto dalle AE, EG, l' altro dalla BE e dalle EG, BF insieme prese come una linea sola.

S' innalzi BL perpendicolare ad AB, ed eguale a BF, e compito il rettangolo BM si conduca la diagonale AL. Dal punto E si guidi EN parallela ad LB, la quale tagli AL in O, e per O si conduca PQ parallela ad AB. Essendo BL eguale a BF sarà anche EO eguale ad EG. Dunque il rettangolo BM è eguale al rettangolo compreso dalle AB BF, il rettangolo EQ è eguale a quello compreso dalle AE EG, il rettangolo BN è eguale a quello compreso dalle BE BF, e finalmente il rettangolo BO è eguale a quello compreso dalle BE EG. Ora il rettangolo BO è uguale

al rettangolo OM, e però i due rettangoli BN, OM presi insieme sono eguali al rettangolo compreso da BE, e dalle due BF, EG prese insieme. Inoltre i tre rettangoli EQ, BN, OM formano il rettangolo BM. Dunque il rettangolo compreso dalle AB BF è eguale al rettangolo compreso da AE EG con insieme il rettangolo compreso dalla BE, e dalle due BF, ed EG prese insieme.

TEOREMA 19.

§. 43. Se un cono retto sia segato da un piano parallelo alla base, la superficie conica intercetta fra la base ed il piano secante eguaglia un circolo, il semidiametro del quale sia medio proporzionale fra la somma dei semidiametri della base, e della sezione, e la parte del lato del cono intercetta fra la base ed il piano secante.

Sia ABL (*Fig.* 17) il dato cono, EH rappresenti il diametro della sezione parallela alla base, BL il diametro di essa base.

Sia CR media proporzionale fra AB e BF, CS media proporzionale fra AE ed EG, CK media proporzionale tra BE, e la somma delle BF, EG. Dico essere il circolo KV descritto col raggio CK eguale alla superficie conica intercetta fra la base, ed il piano secante.

Si descrivano i circoli RX, ST coi raggi CR, CS. Sarà il primo eguale alla superficie conica ABL, ed il secondo alla superficie conica AEH (§ 41). Ora il rettangolo contenuto dalle AB BF è eguale al rettangolo contenuto dalle AE EG con insieme il rettangolo compreso da EB, e dal-

le due BF ed EG prese insieme (§. 42). Inoltre il rettangolo dalle AB, BF è eguale al quadrato di CR, il rettangolo dalle AE, EG è eguale al quadrato di CS, e il rettangolo compreso da EB e dai due semidiametri BF, ed EG presi insieme è eguale al quadrato di CK (17. VI). Dunque il quadrato di CR è eguale ai quadrati di CS, e di CK; essendo poi i circoli come i quadrati dei diametri (1. XII), e però anche dei semidiametri, il circolo RX è eguale ai due circoli ST, KV. Ma il circolo RX è eguale alla superficie conica ABL. Dunque questa superficie è anche eguale ai due circoli ST, KV. Ma la superficie conica AEH, parte della superficie ABL, è eguale al circolo ST; dunque la rimanente contenuta fra i due circoli paralleli BL, EH è eguale al circolo KV.

DEFINIZIONI.

§. 44. La retta che termina un segmento di circolo dicasi base del segmento stesso. Il punto che divide per mezzo l' arco dicasi vertice. La perpendicolare condotta dal vertice sulla base dicasi altezza; se quella perpendicolare si prolunghi oltre la base fin che sia eguale al diametro del circolo, cui spetta il dato segmento, dicasi asse del segmento. L' estremità di tal asse opposta al vertice dicasi termine esteriore dell' asse medesimo. Se si compia il settore corrispondente al dato segmento, l' asse di questo dicasi ancora asse del settore.

TEOREMA 20.

§. 45. Se ad un segmento di circolo sia iscritto un poligono regolare di numero pari di lati, e tali che niuno di essi sia parallelo all' asse del segmento ; se il termine esteriore dell' asse si congiunga col vertice dell' angolo prossimo all' altro termine dell' asse medesimo, e si tirino quelle corde perpendicolari all' asse, le quali congiungono a due a due i vertici degli angoli del poligono, sarà il rettangolo contenuto dalla somma di esse corde colla metà della base, e da un lato del poligono, eguale al rettangolo contenuto dall'altezza del segmento e dalla corda, la quale congiunge il termine esteriore dell' asse col vertice dell' angolo prossimo all' altro termine.

Sia il segmento circolare ADFA (*Fig.* 18), DF la sua base, A il vertice, AQ l' altezza, AE l' asse, ABCDFGHA il poligono iscritto. Si tirino le corde BH, CG, e la BE. Dico essere il rettangolo compreso dal lato AB e da una retta eguale alle corde BH, CG insieme colla DQ, eguale al rettangolo contenuto dalle BE, AQ.

Imperciocchè sian tirate le rette CH, DG. Gli angoli ABI, IHK, KCL, LGP, PDQ sono tutti eguali fra loro, perchè insistono sopra eguali archi. Gli angoli formati dalle BH, CG, DQ in I, L, Q col diametro AE sono retti. Adunque sono simili i triangoli ABI, IHK, KCL, LGP, PDQ (4. VI. *coroll.*), e perciò come BI ad AI, così HI ad IK, così CL ad LK, così GL ad LP,

così DQ a PQ. Laonde come un solo antecedente al suo conseguente così tutti gli antecedenti insieme a tutti insieme i conseguenti (12. V). Ma gli antecedenti compongono la somma delle corde BH, CG colla DQ, e tutti i conseguenti compongono la AQ (11. V); dunque sta BI ad AI come la somma delle BH, CG colla DQ alla AQ. Ma come BI ad AI, così sta BE alla AB (4. VI); perciò come BE ad AB, così la somma delle BH, CG, DQ alla AQ, e quindi il rettangolo contenuto dalle BE, AQ eguaglia quello che è contenuto dalla AB e da una retta eguale alla somma delle BH, CG, DQ (16. V).

COROLLARIO.

§. 46. Se in luogo del segmento pongasi il circolo intero, e ad esso iscritto un poligono regolare ABCDEFGHA d' un numero pari di lati, e tale che niun lato sia parallelo al diametro che congiunge i vertici di due angoli opposti, la dimostrazione procederà nel modo stesso, e perciò si conclude che il rettangolo contenuto da un lato AB e dalla somma delle corde BH, CG, DF eguaglia il rettangolo contenuto dal diametro intero AE e dalla BE.

OSSERVAZIONE.

§. 47. Tutte le rette BH, CG, DF sono tagliate dal diametro AE perpendicolarmente e per metà. Essendo poi uguale l' angolo BCG all' an-

golo HGC, e l' angolo DCG all' angolo FGC, i lati BC, HG, e parimenti i lati CD, GF prolungati concorreranno in un medesimo punto col diametro AE, i due primi da una parte, ed i due ultimi dall'altra. Se dunque il poligono ABCDEFGH si ravvolgerà intorno al diametro AE, i suoi lati descriveranno delle superficie coniche, cioè i lati contigui alle estremità A, E descriveranno due superficie coniche intere, e gli altri delle superficie coniche troncate. È duopo per altro osservare che tutte le superficie descritte nel ravvolgimento non potranno esser coniche se alcuno fra i lati del poligono sia parallelo al diametro AE, poichè in tal caso vi sarebbero due lati paralleli al diametro stesso AE, i quali descriverebbero una superficie cilindrica.

DEFINIZIONI.

§. 48. Il circolo sul quale insiste un segmento sferico dicasi base dello stesso segmento. Se pel centro della base intendasi condotto perpendicolare ad essa un piano che seghi il segmento sferico, la sezione sarà un segmento circolare; se quel segmento circolare intendasi rotar intorno al proprio asse (§. 44) genererà il dato segmento sferico. Ora il vertice, l' altezza, l' asse, il termine esteriore dell' asse del segmento circolare dicansi ancora vertice, altezza, asse, termine esteriore dell' asse del segmento sferico.

TEOREMA 21.

§. 49. Se in un segmento di circolo sia iscritto un poligono regolare d' un numero pari di lati, e tali che niuno d' essi sia parallelo all' asse del segmento circolare (§. 48): e se il poligono iscritto roti intorno all' asse del segmento medesimo, le superficie coniche descritte da'suoi lati (§. 47.) saranno eguali, prese insieme, ad un circolo, il cui semidiametro eguagli la media proporzionale tra l' altezza del segmento circolare, e la corda la quale congiunge il termine esteriore dell' asse col vertice dell' angolo prossimo all altro termine.

Sia (*Fig.* 18) ABDFHA il dato segmento, A il suo vertice, DF la base, AQ l' altezza, AE l' asse, ABCDFGHA il poligono iscritto, BE la supposta corda che unisce il termine esteriore E dell' asse col vertice B dell' angolo prossimo all' altro termine A. Dico le superficie generate dai lati del poligono nella sua rotazione essere eguali, prese insieme, ad un circolo, il cui semidiametro eguagli la media proporzionale tra le rette BE AQ.

Siano tirate le corde BH, CG che uniscono ordinatamente a due a due i vertici degli angoli opposti e sono perpendicolari all' asse, ovvero parallele alla base DF.

Essendo divise per mezzo tutte le rette BH, CG, DF ne'punti I, L, Q dall' asse AE, ed eguali fra loro i lati iscritti del poligono, sarà il rettan-

golo compreso dalla AB e dalla somma delle BH, CG, DQ eguale ai rettangoli che si comprendono dalla AB e dalla BI, dalla BC e dalle BI, CL insieme prese, dalla CD e dalle CL, DQ insieme prese.

Siano ora S media proporzionale tra AB, e BI, R media proporzionale tra BC, e BI con CL, T media proporzionale tra CD, e CL con DQ, X media proporzionale tra AQ, e BE. Perchè il rettangolo compreso da AQ e BE è eguale al rettangolo compreso da AB, e dalle rette BH, CG, DQ prese insieme (§. 45), sarà il quadrato (17. VI) di X eguale a tutti insieme i quadrati di R, S, T. Dunque anche il circolo descritto col raggio X è eguale a tutti insieme i circoli descritti co' semidiametri R, S, T, perchè i circoli (1. XII) stanno fra loro, come i quadrati dei semidiametri. Ma il circolo descritto col semidiametro S è eguale alla superficie conica descritta dal lato AB (§. 41), e i circoli descritti co' raggi R, T sono eguali ai segamenti di superficie coniche descritte dai lati BC, CD (§. 43). Dunque il circolo descritto col semidiametro X è eguale a tutte insieme le superficie coniche descritte dai lati del poligono ABCDFGH nella rotazione intorno all' asse AE.

COROLLARIO.

§. 50. In vece del dato segmento se pongasi l' intero circolo ed il poligono ad esso iscritto ABCDEFGHA, la dimostrazione procederà nel

modo stesso considerando l' intero diametro AE in luogo della AQ, e l' intera corda DF in luogo della DQ . Laonde si conchiude che tutta la superficie descritta nella rotazione del perimetro del poligono iscritto eguaglia un circolo, del quale il semidiametro sia medio proporzionale fra 'l diametro AE e la corda BE .

TEOREMA 22.

§. 51. Se in un segmento di circolo sia iscritto un poligono regolare di numero pari di lati, e circoscritto un altro simile per tal modo che niun lato di essi sia parallelo all'asse (§. 44) del segmento, e roti intorno all' asse medesimo il piano comune dei poligoni e del segmento , la superficie descritta nella rotazione dal contorno circoscritto alla superficie descritta dal contorno iscritto sta nella medesima ragione che il poligono circoscritto all' iscritto.

Sia (*Fig.* 19) ABDFHA il dato segmento, A il suo vertice , DF la base, AE l'asse, ABCDEFGHA il poligono iscritto , IKLMOPQ il simile circoscritto (§. 15) . Se il piano comune dei poligoni e del segmento roti intorno all' asse AE , dico la superficie descritta dal contorno IKLMOPQI a quella che si descrive dal simile contorno ABCDFGHA avere la ragione medesima che il poligono circoscritto IKLMOPQI al simile iscritto ABCDFGHA .

Al poligono IKLMOPQ sia circoscritto il circolo ILMP , e si conducano RDM , KN , BE . Le rette DF , MO , essendo tagliate ad angoli retti

in T e V dall' asse AE saranno parallele tra loro, però i triangoli RMV, RDT saranno simili (4. VI); dunque RV ad RM come RT ad RD, ossia RV ad IR come RT ad AR (18. V), e componendo IV ad IR come AT ad AR (16. V), e permutando IV ad AT come IR ad AR. Ma IR ad AR come IN ad AE; dunque IV ad AT come IN ad AE (11. V). Per la somiglianza poi degli altri due triangoli IKN, ABE sarà KN a BE come IN ad AE. Dunque le due ragioni di IV ad AT, e di KN a BE sono eguali alla ragione di NI ad AE. Ora le superficie coniche circoscritte sono eguali ad un circolo il cui semidiametro sia medio proporzionale fra IV e KN, e le superficie coniche iscritte sono eguali ad un circolo, il cui semidiametro sia medio proporzionale fra AT e BE (§. 49). Dunque poichè i circoli stanno fra loro come i quadrati dei semidiametri, le superficie circoscritte stanno alle iscritte come il rettangolo di IV e KN al rettangolo di AT, EB, cioè in ragione composta di IV ad AT, e di KN a BE (23. VI). Ma si è veduto che le due ragioni di IV ad AT, e di KN a BE sono eguali a quella di IN ad AE. Dunque le superficie circoscritte stanno alle superficie coniche iscritte in ragione duplicata di IN ad AE, cioè come il quadrato di IN al quadrato di AE; ma anche il poligono circoscritto sta al poligono iscritto come il quadrato di IN al quadrato di AE. Dunque le superficie coniche circoscritte stanno alle superficie coniche iscritte come il poligono circoscritto al poligono iscritto.

COROLLARIO.

§. 52. Se pongasi il circolo intero ed interi i poligoni, circoscritto ed iscritto, sussiste pure in tal caso la dimostrazione pigliando l' intero diametro AE in vece della AT, e l' intero diametro IN invece della IV. Laonde l' intera superficie descritta nella rotazione dal perimetro circoscritto al circolo a quella che si descrive dal perimetro iscritto sta nella medesima ragione che il poligono circoscritto al simile iscritto.

PROBLEMA 4.

§. 53. Ad un dato segmento di superficie sferica circoscrivere ed iscrivere un sistema di superficie coniche tali che le circoscritte sian generate per la rotazione d' un contorno rettilineo regolare simile a quello per la cui rotazione si generano le iscritte, ed il sistema delle prime abbia sopra quello delle seconde un eccesso minore di qual si voglia data quantità superficiale.

Sia (*Fig.* 19) ABDFA il segmento circolare per la cui rotazione intorno al suo asse (§. 48) si genera il dato segmento sferico, e sia data la quantità superficiale X.

Chiamisi P un poligono qual si voglia circoscritto al segmento circolare ABDFA ed S la superficie generata dal suo contorno circoscritto all' arco ABDFA rotando intorno all'asse AE del segmento.

Si ponga la retta *m* che abbia alla *n* quella ragione medesima che ha la quantità S insieme colla X alla sola S, e trovisi la retta *o* (13. V) media proporzionale tra *m* ed *n* .

Ciò posto circoscrivasi all'arco ABDFA un contorno regolare, ed iscrivasi un altro simile, tal che il circoscritto abbia all' iscritto ragion minore che *m* ad *o* (§. 5) .

I poligoni circoscritto ed iscritto saranno equiangoli, ed avrà il primo al secondo duplicata ragione di quella, che ha il contorno circoscritto al simile iscritto, cioè ragion minore che la duplicata di *m* ad *o* , ovvero che la semplice di *m* ad *n* .

Ma il sistema delle superficie coniche generate per la rotazione del contorno circoscritto al sistema di quelle generate nel modo stesso dal contorno iscritto ha quella ragione che ha il poligono circoscritto al simile iscritto (§. 51); dunque il sistema delle superficie coniche generate dal contorno circoscritto al sistema di quelle che son generate dal simile contorno iscritto ha ragion minore che *m* ad *n*, cioè ragion minore che la quantità S insieme colla X alla sola S. Ora col modo adoperato nel (§. 34) si dimostrerà che il sistema delle superficie coniche generate dal contorno circoscritto eccede il sistema di quelle che son generate dal simil contorno iscritto d'una quantità minore di X .

Il primo sistema è poi manifestamente circoscritto ed il secondo iscritto alla superficie che si genera per la rotazione dell' arco ABDFA d' in-

torno all'asse del dato segmento. Adunque si è fatto ciò che ricercavasi.

TEOREMA 23.

§. 54. Qualunque segmento di superficie sferica è limite di tutte le superficie che son generate per la rotazione (§. 47) dei contorni regolari circoscritti, od iscritti all'arco generatore del dato segmento di superficie sferica.

I contorni circoscritti all'arco d'un numero di lati successivamente maggiore costituiscono una serie di quantità decrescenti. I contorni iscritti successivamente simili ai circoscritti costituiscono una serie di quantità crescenti (§. 7).

Le superficie generate per la rotazione dei contorni circoscritti, a quelle generate per la rotazione dei simili contorni iscritti hanno ragion duplicata di quella dei contorni generatori circoscritti ai corrispondenti iscritti (§. 51).

Dunque le superficie circoscritte al segmento sferico formano una serie di quantità decrescenti, le quali s'accostano sempre più alla grandezza della superficie sferica del dato segmento, rimanendo di essa sempre maggiori. Le superficie poi iscritte costituiscono una serie di quantità crescenti, le quali pure s'accostano alla grandezza della superficie sferica del dato segmento, rimanendo sempre di essa minori.

Ma la differenza tra la superficie sferica del segmento, ed un sistema di superficie coniche circoscritte od iscritte (§. 53) può divenir mino-

re di qual si voglia data quantità della medesima specie. Dunque la superficie del segmento sferico è limite di tutte le superficie coniche iscritte o circoscritte che son generate per la rotazione de'contorni rettilinei regolari iscritti o circoscritti all' arco generatore della superficie del dato segmento.

COROLLARIO.

§. 55. Potendosi applicare il medesimo ragionamento al caso che trattisi dell'intera superficie d' una sfera per rispetto alle superficie coniche iscritte o circoscritte, che si generano per la rotazione di poligoni iscritti o circoscritti al circolo generatore della sfera, ne viene che la superficie della sfera è limite di quelle superficie ad essa iscritte o circoscritte.

TEOREMA 24.

§. 56. La superficie di un segmento di sfera è eguale ad un circolo il cui raggio sia la retta condotta dal vertice del segamento alla circonferenza della sua base.

Sia una sfera e in essa un circolo massimo AGE (*Fig.*2c), del quale DAK sia un segamento. Condotto il diametro AE il quale divida DK per metà in V, sarà A il vertice del segamento sferico di cui è sezione il segamento circolare DAK, e sarà D un punto della circonferenza della base dello stesso segamento sferico. Se si unirà AD, e col

centro C, e il raggio CT eguale ad AD si descriverà il cerchio PTY, la superficie del predetto segamento sferico sarà eguale a questo circolo.

Imperocchè dato uno spazio qualunque X, esisterà una retta CR minore di CT colla quale come raggio descrivendo un cerchio QRS, che abbia per centro C, la differenza tra i circoli PTY QRS sia minore del dato spazio X. Prendasi una terza proporzionale dopo AV e CR. Potrà questa essere collocata tra il punto E, e la circonferenza EGA, perchè essendo AE terza proporzionale dopo AV, e AD, ed essendo CR minore di AD, deve la terza proporzionale dopo AV e CR essere minore di AE. Sia dunque EH terza proporzionale dopo AV e CR, e si unisca CH. Dividendo l'angolo ACD per metà, e dividendo di nuovo la metà per metà, e così successivamente si arriverà in fine ad un angolo ACB minore di AEH. Si conduca AB, e sarà AB il lato di un poligono di lati eguali, e di numero pari, inscrivibile al segmento DAK. Potrà anche supporsi che questo poligono non abbia alcun lato parallelo al diametro AE, poichè se non fosse tale si potrebbero con una nuova bisezione rendere tutti i lati del poligono inclinati al diametro AE. Tirata la corda BE sarà questa maggiore di HE, e però il rettangolo contenuto dalle AV, EB sarà maggiore del rettangolo contenuto dalle AV HE. Dunque la media proporzionale tra AV, e BE è maggiore della media proporzionale tra AV ed HE, cioè di CR. Sarà poi sempre la media proporzionale fra AV e BE minore di AD,

perchè AD è media proporzionale fra AV ed AE. Dunque i circoli che hanno per raggi le medie proporzionali fra AV e BE senza mai eguagliare o superare il circolo PTY se gli vanno accostando per modo, che la differenza può divenir minore di qualunque dato spazio X. Dunque il circolo PTY è limite di tutti i predetti circoli, ma le superficie coniche iscritte al segamento sferico sono sempre eguali ai medesimi circoli (§. 49), e la superficie del segamento sferico è limite delle superficie coniche iscritte (§. 54). Dunque la superficie del segamento sferico è eguale al circolo PTY, il cui raggio è la retta condotta dal vertice del segamento alla circonferenza della sua base (§. 2).

COROLLARIO.

§. 57. Quando invece del segmento sia proposta l' intera superficie sferica, allora la AD coincide colla AE, e quindi CT essendo eguale, in tal caso, ad AE, il circolo TY è quadruplo del circolo ADK, che è il massimo della proposta sfera.

Ma si otterrà immediatamente la medesima conclusione ragionando sull' intera superficie sferica nel modo stesso che fu adoperato al (§. 56).

Posto il raggio CT eguale al diametro AE ed una quantità X superficiale, si potrà iscrivere alla data superficie sferica un sistema di superficie coniche tale che differisca dalla superficie sferica d'una quantità minore di X (§. 53).

Se descrivasi col centro in C un circolo eguale

al sistema delle superficie coniche iscritte, tal circolo sarà minore di quello che si descrive col raggio CT (§. 50). Continuando ad iscrivere alla superficie sferica sistemi di superficie coniche successivamente maggiori, e a descrivere col centro C circoli eguali rispettivamente a quei sistemi di superficie coniche, questi hanno per limite la superficie conica, ed i circoli hanno per limite quello che si descrive col raggio CT. Adunque esso circolo eguaglia la superficie sferica (§. 2), e perciò la superficie della sfera è quadrupla del circolo massimo di essa sfera.

TEOREMA 25.

§. 58. La superficie d' un cilindro retto circoscritto ad una sfera è eguale alla superficie della sfera, e se il cilindro e la sfera siano tagliati da piani perpendicolari all' asse, ciascun segamento della superficie cilindrica sarà eguale al corrispondente segmento della superficie sferica.

Sia PHVS (*Fig.* 21) il cilindro retto circoscritto alla data sfera BEGF, BG l' asse comune, KL il diametro della sezione fatta nel cilindro, ON quello della sezione fatta nella sfera da un piano perpendicolare all' asse BG.

Il lato HP del cilindro è eguale al diametro PS della base; e perchè la superficie di qualunque cilindro sta alla base come il lato del cilindro alla quarta parte del diametro della base (25) la superficie del cilindro HPSV sarà quadrupla della base PRS. Ora questa è uguale al circolo massi-

mo della sfera, e la superficie della sfera è quadrupla del circolo massimo (54). Dunque la superficie del cilindro HPSV è eguale alla superficie della sfera; il che doveva dimostrarsi in primo luogo .

Condotte le BO, OG sarà BO media proporzionale fra GB BI, e GO media proporzionale fra GB, GI . Dunque il circolo del raggio BO sarà eguale alla superficie cilindrica HL (29); e il circolo del raggio GO sarà eguale alla superficie cilindrica KS . Ma il primo di questi circoli è anche eguale alla superficie sferica OBN, ed il secondo è eguale alla superficie sferica OGN (§.56). Dunque la superficie cilindrica HL è eguale alla superficie sferica OBN, e la superficie cilindrica KS è eguale alla superficie sferica OGN . Che se vi sarà un altro piano CD perpendicolare esso pure a BG, il quale tagli il cilindro e la sfera, si dimostrerà nello stesso modo che la superficie cilindrica HD è eguale alla superficie sferica EBF. Perciò anche la superficie cilindrica CL chiusa fra i due piani CD , KL è eguale alla corrispondente superficie sferica OEFN. Dunque se la sfera e il cilindro sono tagliati da piani perpendicolari all' asse del cilindro ciascun segamento della superficie cilindrica è eguale al corrispondente segmento di superficie sferica, siccome si doveva dimostrare in secondo luogo .

CAPITOLO III.

TEOREMA 26.

§. 59. I cilindri stanno ai cilindri, e i coni ai coni in ragion composta delle basi e delle altezze.

Siano i due cilindri ABCD EFGH (*Fig.* 22). Dal più alto EFGH si tagli la porzione KFGL della stessa altezza che il cilindro ABCD. Siano P, Q, R tre rette tali, che la base BC stia alla base FG come P a Q, e l'altezza AB ossia FK stia all'altezza EF come Q ad R. Bisogna dimostrare che il cilindro ABCD sta al cilindro EFGH, come P ad R.

Il cilindro ABCD sta al cilindro KFGL come la base BC alla base FG, perchè i cilindri egualmente alti stanno fra loro come le basi (11. XII). Il cilindro KFGL sta al cilindro EFGH come l'altezza FK all'altezza EF, perchè i cilindri che hanno medesima base stanno fra loro come le altezze (14. XII). Ma la base BC sta alla base FG come P a Q, e l'altezza FK sta all'altezza EF come Q ad R. Dunque il cilindro ABCD sta al cilindro KFGL come P a Q, e il cilindro KFGL sta al cilindro EFGH come Q ad R. Dunque per eguaglianza ordinata il cilindro ABCD al cilindro EFGH sta come P ad R.

Dimostrata poi la verità del Teorema pei cilindri, è anche dimostrata pei coni, essendo i coni la terza parte dei cilindri, che hanno la medesima base e la medesima altezza.

TEOREMA 27.

§. 60. Ad un settore di circolo sia iscritto un poligono regolare (§. 15), tale che niun lato sia parallelo all'asse del settore (§.44). Rotando il poligono intorno a quell'asse, genererà un solido composto di porzioni coniche (§. 47), il quale perciò potrà essere chiamato solido conico. Dico tal solido essere eguale ad un cono, la cui base eguagli la superficie del solido stesso generata dal contorno iscritto all'arco del dato settore, e l'altezza eguagli la perpendicolare condotta dal centro del circolo cui spetta il dato settore sopra un lato del contorno iscritto all'arco del settore medesimo.

Sia (*Fig.* 23) ADQFA il dato settore, AE l'asse, ABCDQFGHA il poligono regolare iscritto, QP la perpendicolare condotta dal centro Q sopra un lato AB del contorno iscritto all'arco FAD. Dico, il solido generato per la rotazione del poligono ABCDQFGHA intorno ad AE essere eguale ad un cono la cui base eguagli la superficie generata dal contorno DCBAHGF, e l'altezza eguagli la PQ.

Si conducano il raggio QB e la perpendicolare BV sopra il diametro AE. Il solido generato dalla rivoluzione del triangolo ABQ intorno ad AE è eguale ad un cono che abbia per base la superficie generata dal lato AB e per altezza la perpendicolare QP. Imperocchè il cono generato dalla rivoluzione del triangolo rettangolo ABV sta al co-

no generato dalla rivoluzione dell' altro triangolo rettangolo QBV come AV a QV, poichè i coni di base eguale stanno fra loro come le altezze (14. XII). Dunque componendo (18. V) il solido generato dal triangolo ABQ sta al cono generato dal triangolo BQV come QA a QV. Ma un cono il quale abbia per base il circolo del semidiametro BV e per altezza QA sta esso pure al cono generato dal triangolo QV come QA a QV. Dunque il solido generato dal triangolo ABQ è eguale ad un cono, il quale abbia per base il circolo del raggio BV, e per altezza QA. Ora la superficie generata dal lato AB è eguale ad un circolo il quale abbia per semidiametro la media proporzionale fra AB, e BV (§. 41). Dunque il circolo del semidiametro BV sta alla predetta superficie come il quadrato di BV al rettangolo compreso da AB e BV, cioè come BV ad AB, o pure come QP a QA, perchè i triangoli ABV, AQP, che hanno comune l' angolo in A e gli angoli in V e P retti, sono simili (4. VI). Dunque i due coni uno dei quali abbia per base il circolo del raggio BV e per altezza QA, e l' altro abbia per base un circolo eguale alla superficie generata da AB e per altezza QP, hanno le basi in ragione reciproca delle altezze, e perciò sono (15. XII) eguali tra loro. Ma si è già veduto che il solido generato dal triangolo ABQ è eguale ad un cono, il quale abbia per base il circolo del semidiametro BV, e per altezza QA. Dunque il predetto solido è eguale ad un cono, la cui base sia eguale alla superficie generata dal lato AB, e la cui altezza sia eguale alla perpendicolare PQ.

Si prolunghino AQ, e BC finchè s' incontrino in T, e si abbassi dal centro Q la perpendicolare QO sopra BC. Si dimostrerà in un modo simile al precedente che il solido generato dalla rivoluzione del triangolo TBQ intorno a TQ è eguale ad un cono il quale abbia la base eguale alla superficie generata dalla retta BT, e l' altezza eguale alla perpendicolare QO, ossia PQ. Si dimostrerà ancora, che il solido generato dalla rivoluzione del triangolo TCQ intorno a TQ è eguale ad un altro cono, la cui base sia eguale alla superficie generata dalla retta TC, e l'altezza eguale alla QO, ossia PQ. Ora la differenza fra quest' ultimo solido e quello generato dalla rivoluzione del triangolo TBQ è il solido generato dalla rivoluzione dell' altro triangolo BCQ intorno ad AE, e la differenza tra i due coni della medesima altezza PQ o PO che hanno per basi l' uno la superficie generata dalla retta TC, e l'altro la superficie generata dalla retta TB è eguale ad un cono, la cui altezza sia PQ, e la base la superficie generata dalla BC. Dunque il solido generato dalla rivoluzione del triangolo BQC intorno alla QA è eguale ad un cono la cui base sia la superficie generata dal lato BC, e l' altezza la perpendicolare PQ. Continuando sulle medesime traccie si dimostrerà che il solido generato dall' altro triangolo CQD, è eguale ad un cono che abbia per altezza la perpendicolare PQ e per base la superficie generata dal lato CD. Dunque tutto il solido generato dalla rivoluzione del poligono ABCDQFGHA intorno al diametro AE è egua-

eguale ad un cono, la cui base sia eguale alla superficie del solido e l'altezza eguale alla perpendicolare PQ.

TEOREMA 28.

§. 61. Ad un settore di circolo sia iscritto un poligono regolare d'un numero pari di lati, e tale che niun d'essi sia parallelo all'asse del settore (§. 44.); al settore medesimo sia circoscritto un poligono simile all'iscritto; se il piano di tali figure roti intorno all'asse del settore, il settore medesimo descriverà un settore sferico, ed i due poligoni descriveranno due solidi conici, l'uno circoscritto, l'altro iscritto al settore sferico. Dico il solido circoscritto avere al solido iscritto ragion triplicata di quella che il lato del poligono circoscritto ha a quello dell'iscritto.

Sia DRFAD (*Fig.* 19) il dato settore, AE l'asse, DCBAHGFRD il poligono iscritto, MLKIQPORM il simile circoscritto.

Sia circoscritto il circolo ILNP; si conduca la RS normale ai due lati paralleli IK, AB in S ed Y, e sian tirate le basi MO, DF l'una del segmento MIO, l'altra del simile segmento DAF. L'asse AE prolungato ad incontrare la circonferenza circoscritta in I, N, segherà le predette basi in V e T rispettivamente.

Il solido circoscritto è eguale ad un cono, la cui base sia eguale alla superficie del medesimo solido, e la cui altezza sia eguale al raggio RS (60);

e il solido iscritto è eguale ad un cono, la cui base sia eguale alla superficie dello stesso solido, e la cui altezza sia eguale alla perpendicolare RY. Ora la superficie del solido circoscritto è eguale ad un circolo, il cui raggio sia medio proporzionale fra la retta IV e la corda KN, e la superficie del solido iscritto è eguale ad un circolo, il cui raggio sia medio proporzionale fra la retta AT e la corda BE (§. 49). Stando adunque i coni in ragion composta delle basi e delle altezze (59), e stando i circoli come i quadrati dei raggi (2. XII) il solido circoscritto sta al solido iscritto in ragion composta di quella del rettangolo compreso dalle IV e KN al rettangolo compreso dalle AT e BE, e del raggio RS alla perpendicolare RY, cioè in ragion composta di IV ad AT, di KN a BE, e di RS ad RY. Ma per la somiglianza dei triangoli IKN ABE, sta KN a BE come IK ad AB, e per la somiglianza dei poligoni circoscritto ed iscritto sta IK ad AB come IV ad AT. Parimenti per la somiglianza dei triangoli ISR, AYR, RS ad RY come IS ad AY, come IK ad AB. Dunque le tre ragioni di IV ad AT, di KN a BE, e di RS a RY sono eguali ciascuna alla ragione di IK ad AB. Dunque il solido circoscritto sta al solido iscritto in ragion triplicata di IK ad AB (V. *def.* 11), cioè in ragion triplicata di quella che ha il lato del poligono circoscritto al corrispondente lato dell' iscritto.

COROLLARIO.

§. 62. Se pongasi il circolo intero, ed interi i poligoni, circoscritto ed iscritto al circolo, sussiste il medesimo ragionamento, sol che invece delle AT, IV siano considerate le AE, IN. Dunque il solido conico circoscritto alla sfera generata per la rotazione del dato circolo sta al corrispondente solido conico iscritto in ragion triplicata di quella che il lato del poligono generatore circoscritto ha al lato del simile poligono generatore iscritto.

PROBLEMA 5.

§. 63. Dato un settore sferico, circoscrivere, ed iscrivere ad esso un solido conico tale che la differenza tra esso ed il settore sferico sia minore di qual si voglia data quantità della medesima specie (*Fig.* 24).

Sia BCADB il settor circolare per la cui rotazione si genera il dato settore sferico, e si ponga X un dato qual si voglia spazio solido.

Si chiami S un solido conico qualunque circoscritto al settore sferico dato, e pongasi la retta N avere alla M quella ragione che il solido S insieme con X ha al solo S.

Prendasi P media proporzionale (13. VI) tra M ed N, O media tra M e P, Q media tra P ed N. Saranno Q, P, O, M in proporzione continua, e la ragione di Q ad M, triplicata (V. *def.* 11) di

quella che ha Q a P, sarà minore (8. V) che la ragione di N ad M.

All' arco BDA si iscriva un contorno regolare, di numero pari di lati, e tale, che niuno di essi sia parallelo all' asse del settore. Si circoscriva in oltre all' arco stesso un contorno simile all' iscritto e tale che abbia il circoscritto all' iscritto ragion minore che Q a P (§. 5). Sopra quei contorni insisteranno due poligoni, l' uno circoscritto, e l' altro iscritto al settor circolare. Se questo ed i poligoni rotino insieme d' intorno all' asse comune (§. 44), il primo descriverà il supposto settore sferico, ed i secondi descriveranno rispettivamente due solidi conici, l' uno circoscritto, e l'altro iscritto al settore sferico.

Il solido conico circoscritto al corrispondente solido conico iscritto ha ragion triplicata di quella che ha il lato del poligono circoscritto al corrispondente lato dell' iscritto (§. 61), ed il lato del circoscritto al corrispondente lato dell' iscritto sta come tutto il contorno circoscritto a tutto il contorno iscritto (12. V). Adunque il solido conico circoscritto al corrispondente iscritto ha ragion minore che la triplicata di Q a P, cioè ragion minore che quella di Q ad M, e per conseguenza vie minore che quella di N ad M, ovvero che quella di S insieme con X al solo S.

Ragionando ora nel modo stesso che abbiamo adoperato altre volte, si conchiuderà che l' eccesso del solido conico circoscritto sopra il corrispondente iscritto ha allo stesso solido conico iscritto ragion minore che X ad S. Ma S è sem-

pre maggiore del solido iscritto; dunque ancora X sarà maggiore dell'eccesso, in cui il solido conico circoscritto supera l'iscritto (14. V). Molto minore sarà perciò la differenza tra 'l settore sferico, ed il solido conico circoscritto, od iscritto ad esso.

TEOREMA 29.

§. 64 Ogni settore sferico è limite dei solidi conici tanto circoscritti, quanto iscritti ad esso.

I solidi conici circoscritti ai corrispondenti solidi conici iscritti hanno ragion triplicata di quella che i contorni dei poligoni generatori de' solidi circoscritti hanno ai simili contorni de' poligoni generatori degli iscritti (§. 61). All' arco del settor circolare, che genera il settore sferico, continuando a circoscrivere ed iscrivere contorni simili, d'un numero pari di lati successivamente maggiore, e tali che niun lato sia parallelo all'asse (§. 44), i contorni circoscritti costituiranno una serie di quantità decrescenti, e gli iscritti costituiranno una serie di quantità crescenti (§. 5).

Adunque i solidi conici generati dai poligoni che insistono sui contorni circoscritti costituiranno una serie di quantità decrescenti, ed i solidi conici corrispondenti generati dai poligoni che insistono sui contorni simili iscritti costituiranno una serie di quantità crescenti. Inoltre i solidi conici circoscritti accostandosi alla grandezza del dato settore sferico, rimangono sempre di esso maggiori, ed i corrispondenti solidi conici

iscritti accostandosi pure alla grandezza del dato settore sferico rimangono sempre di esso minori; ma la differenza tra 'l settore sferico e qualunque dei solidi conici ad esso circoscritti, o pure iscritti, può rendersi minore di qual si voglia data quantità della medesima specie (§. 63). Dunque il dato settore sferico è limite di tutti i solidi conici circoscritti od iscritti ad esso.

COROLLARIO.

§. 65. Lo stesso ragionamento può manifestamente essere applicato all'intera sfera per rispetto ai solidi conici ad essa circoscritti, ovvero iscritti. Dunque la sfera è limite di quei solidi.

TEOREMA 30.

§. 66. Ogni settore sferico eguaglia un cono, la base del quale sia un circolo eguale alla superficie sferica del dato settore, e l'altezza eguagli il raggio del settore medesimo.

Sia (*Fig.* 19) FRDAF il settore di circolo, per la cui rotazione intorno all'asse AE si genera il dato settore sferico. Dico tal settore essere eguale ad un cono, la base del quale sia un circolo eguale alla superficie generata dall'arco DAF nella rotazione intorno all'asse AE, e l'altezza sia eguale al raggio AR.

S'intendano circoscritti al settore poligoni regolari di numero pari di lati successivamente maggiore, e tali che niuno di essi sia parallelo all'asse AE. Uno di tali poligoni sia MLKIQPORM.

Il settore sferico generato per la rotazione del settor circolare intorno all' asse AE (§. 64) è limite dei solidi conici circoscritti che son generati per la rotazione dei poligoni circoscritti, come MLKIQPORM .

Ciò posto sia (*Fig.* 20) QRS un circolo eguale alla superficie sferica generata dall' arco del dato settore (§. 56), ed il circolo PTY concentrico al primo eguagli la superficie generata dal contorno MLKIQPORM (§. 49) . Il circolo PT sarà sempre maggiore del circolo QR, e potrà accostarsi alla grandezza di esso per modo che la differenza sia minore di qual si voglia data quantità della medesima specie (§. 53). Laonde un circolo PT potrà avere al circolo QR minor ragione che una data quantità qual si voglia ad un' altra di essa minore .

Ora si concepiscano costituiti sulle basi PT , QR due coni retti , che abbiano la medesima altezza eguale al raggio del dato settore .

I supposti coni saranno tra loro nella ragione delle basi (11. XII) . Perciò il cono dalla base PT a quello dalla base QR potrà avere minor ragione che una data quantità qual si voglia ad un' altra di essa minore ; e perciò il cono dalla base PT potrà eccedere il cono che ha la base QR d' una quantità minore che qual si voglia data della medesima specie . Adunque il cono dalla base QR è limite dei coni dalle basi PT (§. 1) . Ma i coni dalle basi PT sono rispettivamente eguali ai solidi conici circoscritti al dato settore sferico (§. 60) , ed il settore medesimo è limite

di quei solidi conici (§. 64). Dunque il settore sferico eguaglia il cono che ha per base il circolo QR e per altezza il raggio del settore (§. 3).

COROLLARIO.

§. 67. Quando invece del settore si ponga la sfera intera, applicando a questo caso il discorso fatto superiormente, si dimostra nello stesso modo essere la sfera eguale ad un cono, la base del quale sia un circolo eguale alla superficie della sfera, e l'altezza sia eguale al raggio della sfera medesima.

TEOREMA 31.

§. 68. La superficie intera di un cilindro retto circoscritto ad una sfera e la sua solidità sono sesquialtere della superficie e della solidità della sfera.

La superficie di un cilindro circoscritto ad una sfera è eguale, senza le basi, alla superficie della sfera (§. 58). Ma le due basi, eguali ciascuna ad un circolo massimo della sfera, sono la metà della superficie della sfera (§. 57). Dunque la superficie intera del cilindro retto circoscritto alla sfera sta alla superficie della sfera come 3 a 2; come si doveva dimostrare in primo luogo.

Il cilindro retto circoscritto alla sfera sta al cono della medesima base ed altezza come 3 ad 1 (10. XII). Ma il cono della medesima base ed

altezza del cilindro sta al cono che ha per base la superficie della sfera, e per altezza il suo semidiametro in ragion composta di 1 a 4, e di 2 ad 1 (§. 69), perche la base del primo cono che è eguale ad un circolo massimo della sfera sta a quella del secondo, come 1 a 4 e l'altezza del primo cono che è eguale al diametro della sfera sta all' altezza del secondo, come 2 ad 1. Dunque il cono della medesima base ed altezza del cilindro sta al cono che ha per base la superficie della sfera e per altezza il suo semidiametro, cioè sta alla sfera (§. 67) come 2 a 4, ossia come 1 a 2. Dunque per egualità ordinata il cilindro retto circoscritto alla sfera sta alla sfera come tre a due; come si doveva dimostrare in secondo luogo.

Pagina	Linea	Errori	Correzioni
13	26	FD	AD
19	22	in punto	in un punto
24	9	ABC	A B C
25	ult.	BF	DF
26	17	EF	DF
28	26	(*Fig.* 32)	(*Fig.* 33)
36	12	BDG	BDC
	28	FHC	FHG
37	27	EF	BF
51	20	ABME	ABNE
68	2	toccino	tocchino
78	20	EFG	EGF
138	1	(24. I)	(14. I)
141	2	come la B	come la C
151	7	KNMD	KNMT
159	3	(*Fig.* 169)	(*Fig* 168)
165	10	EBD	EBA
	11	FBD	FBA
166	29	EDB	ABE
171	24	(*Fig.* 196)	(*Fig* 186)
201	8	GH	GK
215	ult.	(11. XI)	(11. II)
227	6	il lato	il quadrato del lato
233	1	(4. XI)	(4. XIII)
	3	PS	CS
	9	IQ	HQ
245	19	AD	AB
246	14	AV	CV
248	12	P, Q,	Q, P,
	15	G	H
249	21	LT	LI
252	14	BHD	BKD
256	20	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
271	20	AD	AB
283	13	RV	KV
289	20	ABCDEFGHA	ABCDFGHA
301	9	triangolo QV	triangolo QBV
302	18	*in qualche copia* PO	QO

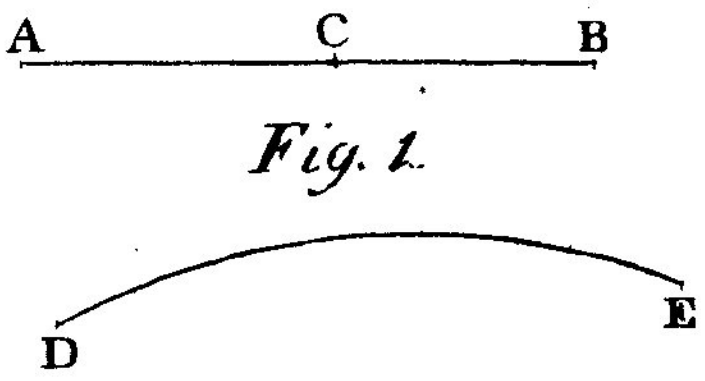
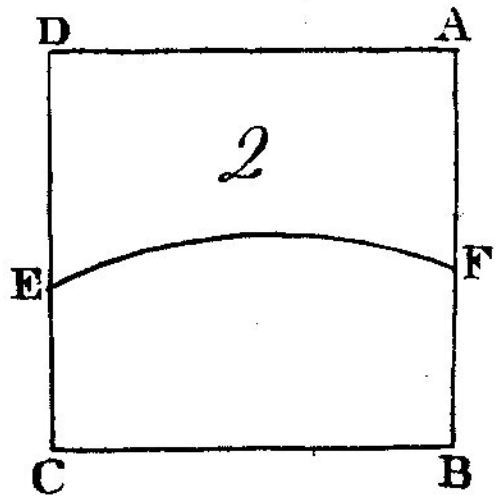
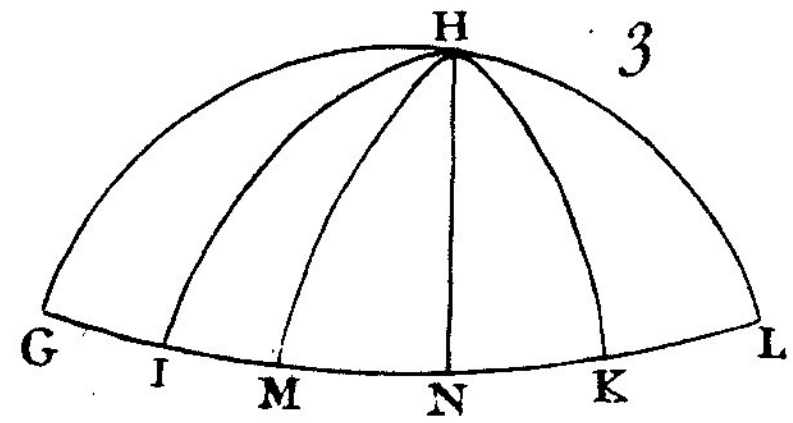
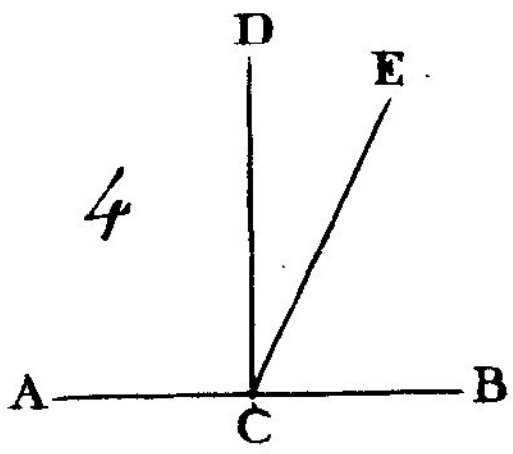
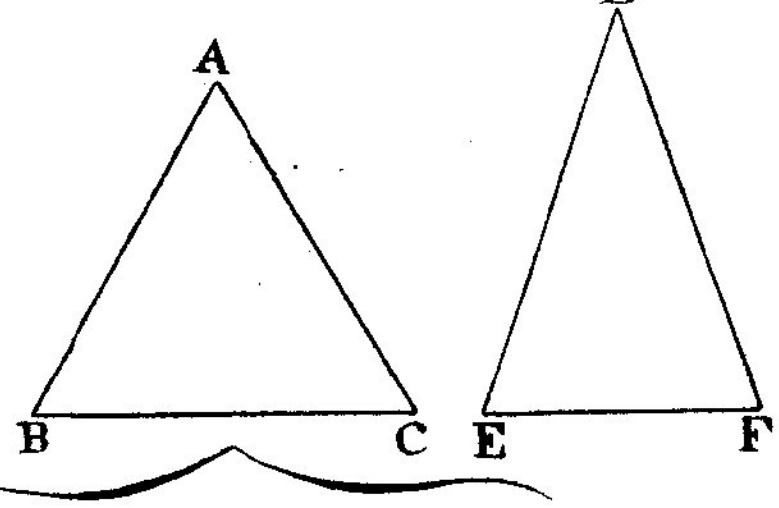

A
C
B
D
E

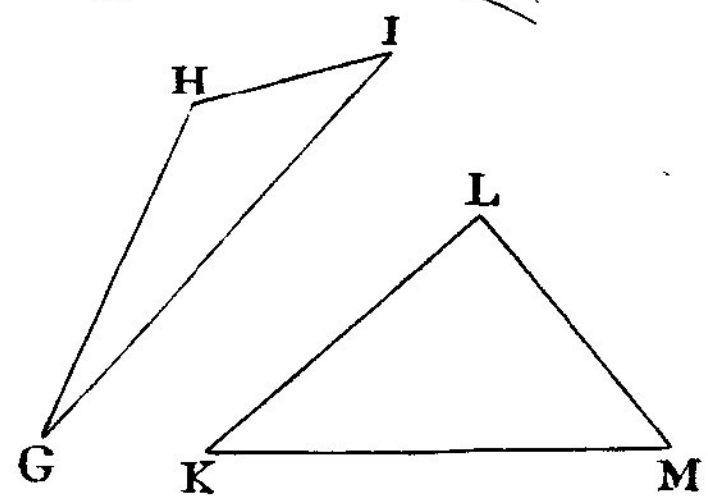
Fig. 1.

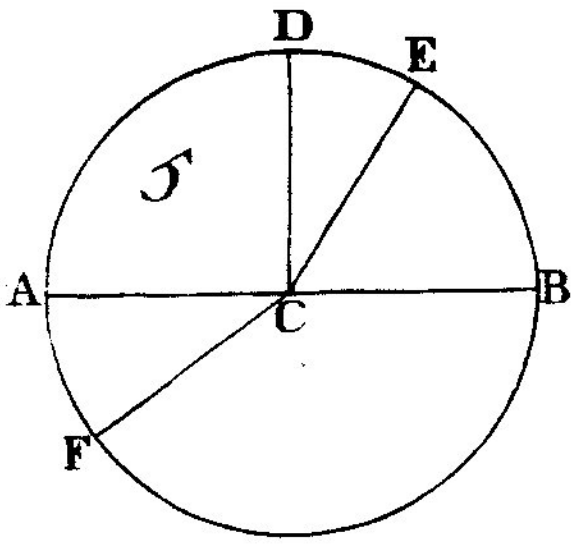

D
A
2
E
F
C
B

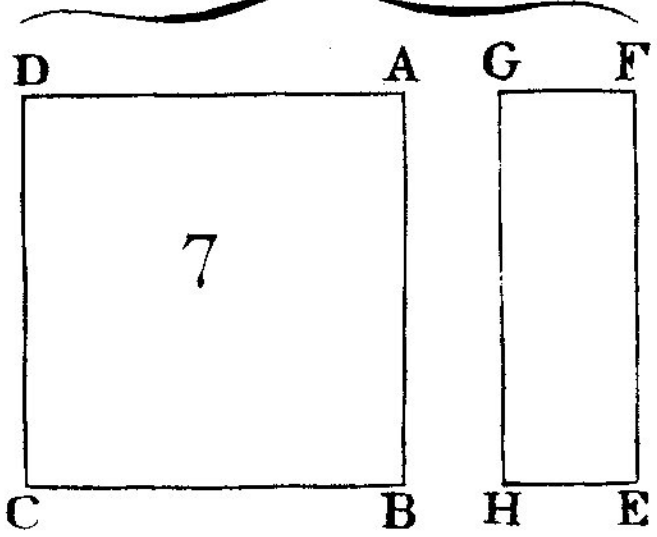

H
3
G
I
M
N
K
L

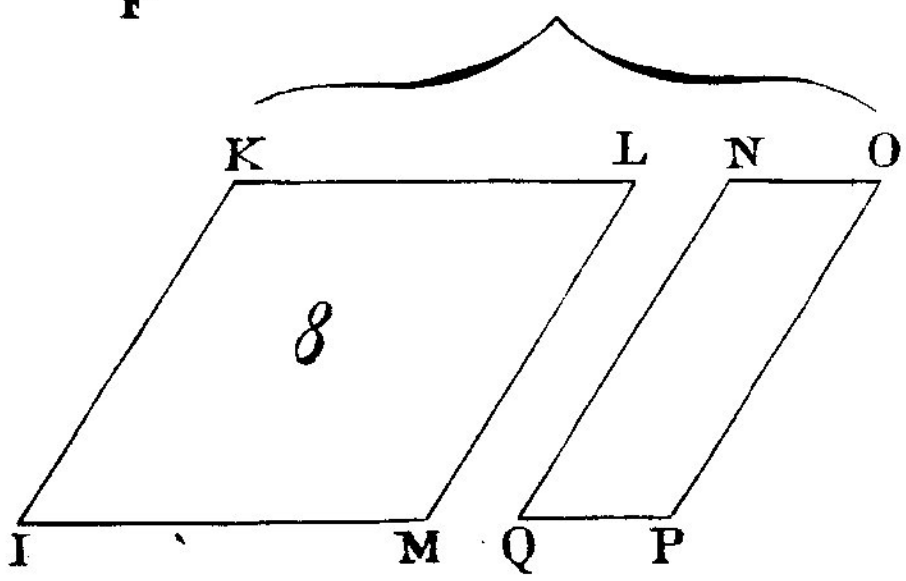

D
E
4
A
C
B

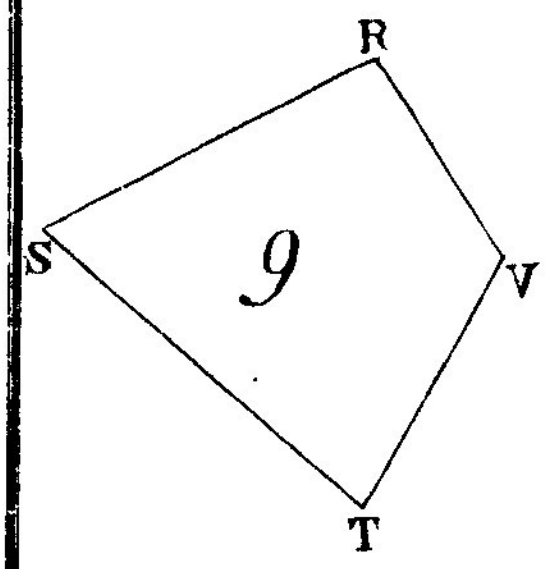

A
B
C
6
D
E
F

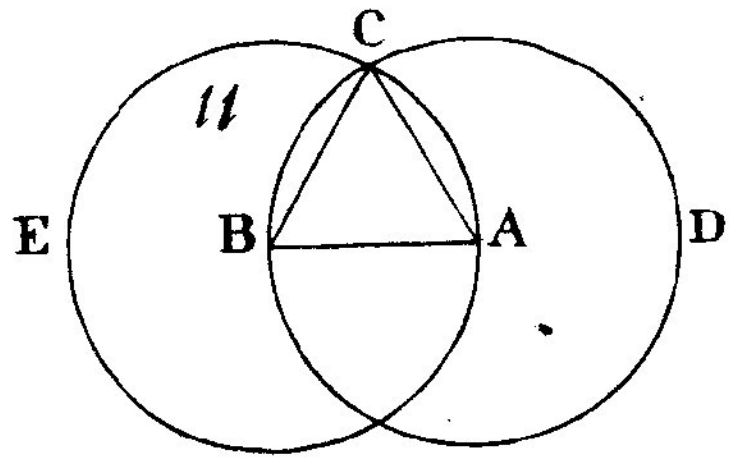

I
H
L
G
K
M

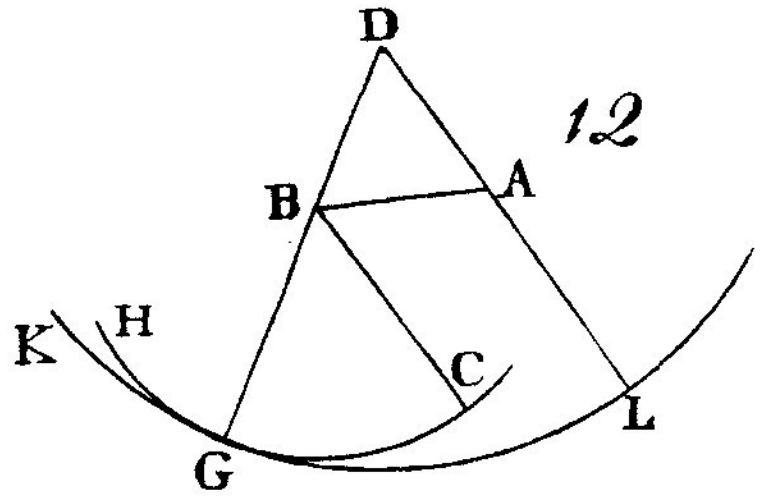

D
E
5
A
C
B
F


D
A
G
F
7
C
B
H
E

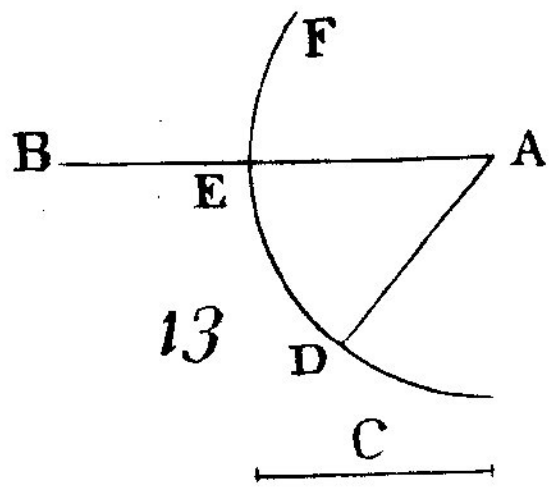

K
L
N
O
8
I
M
Q
P

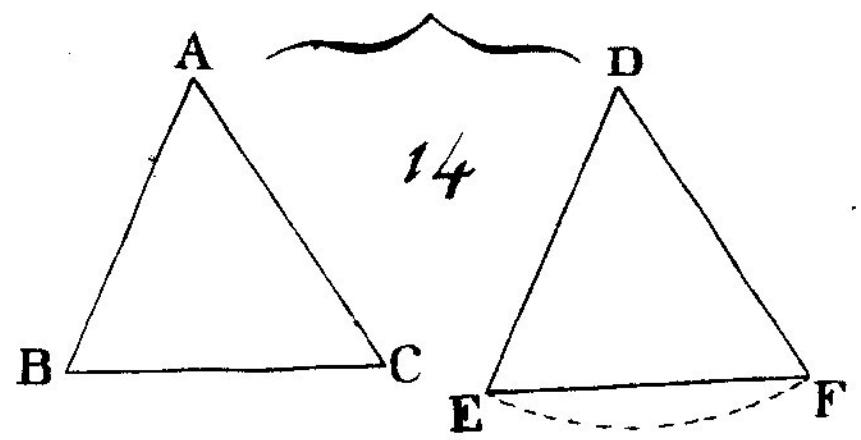

R
9
S
V
T


C
11
E
B
A
D

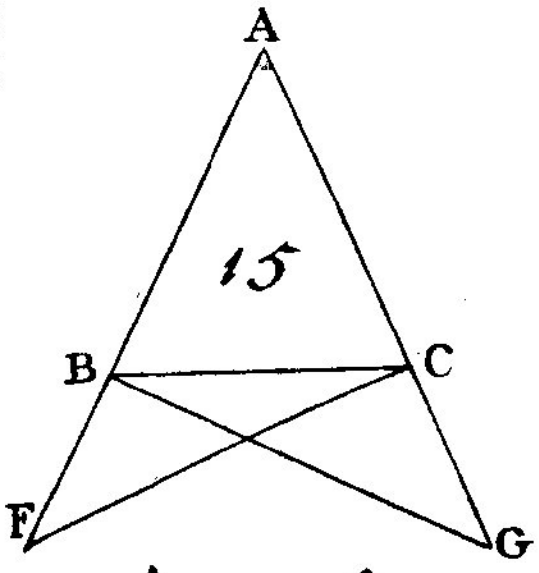

D
12
B
A
K
H
C
G
L

A
10
B
C
D

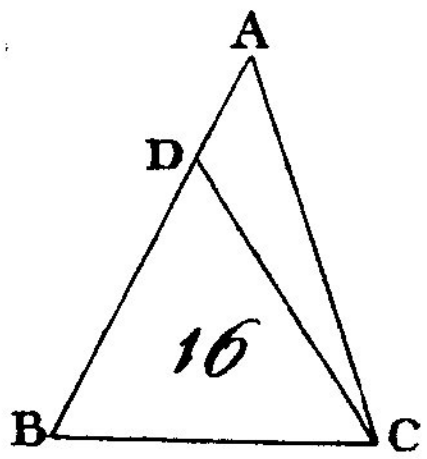

F
B
A
E
13
D
C


A
D
14
B
C
E
F

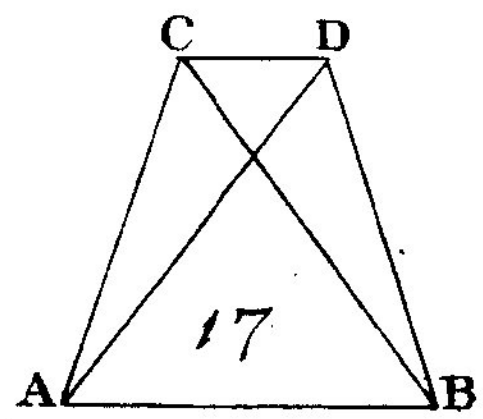
15



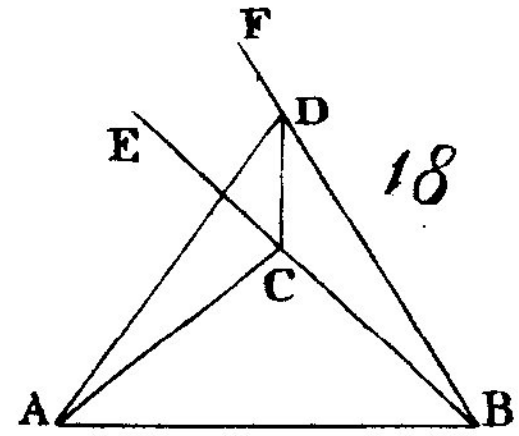
16



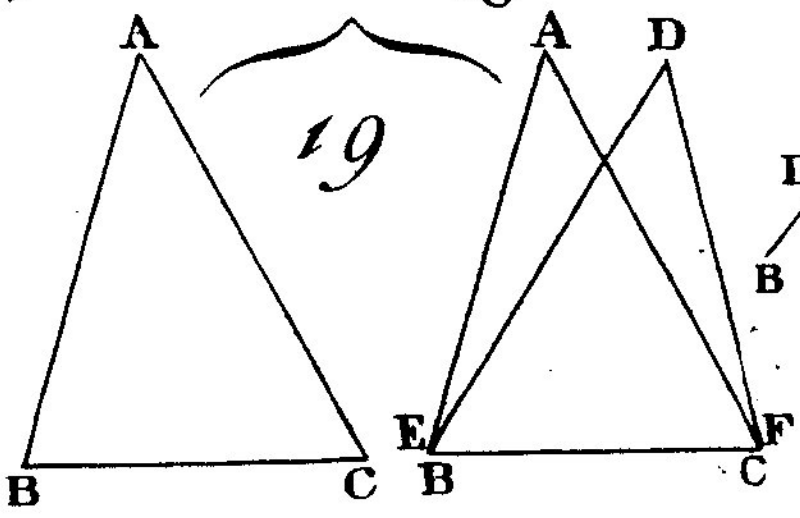
17



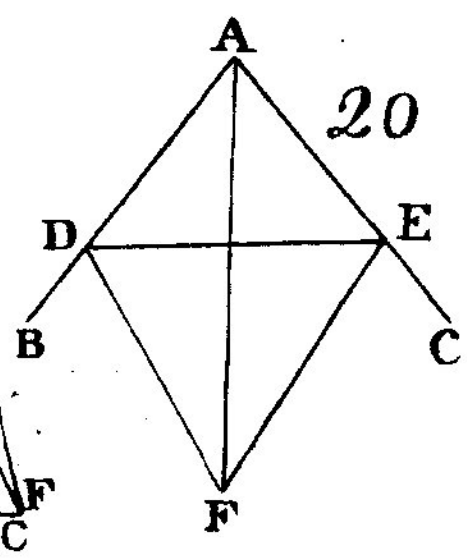
18



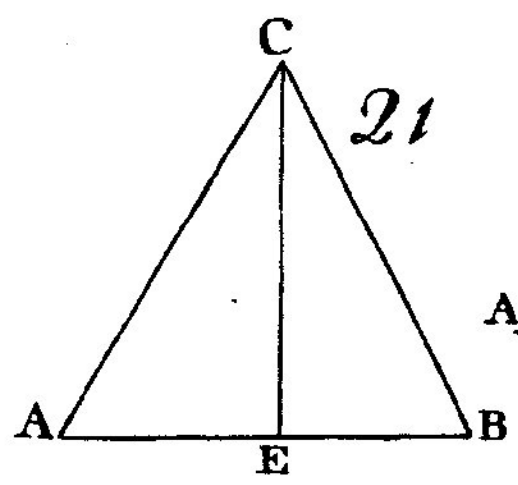
19



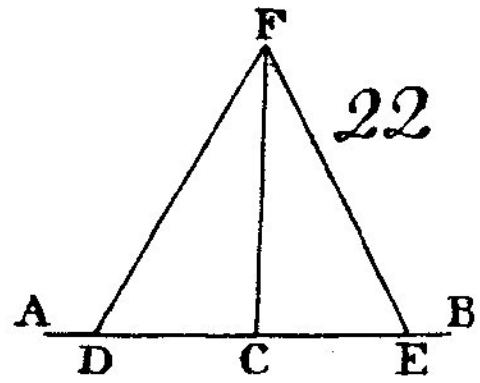
20



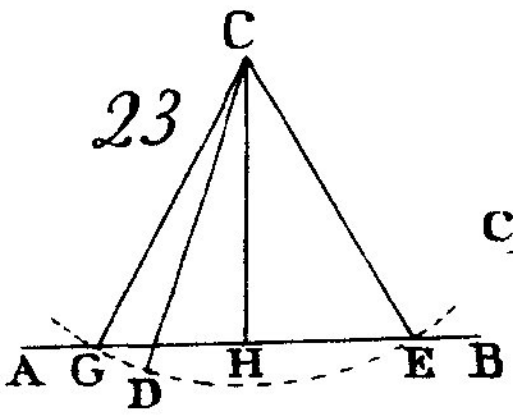
21



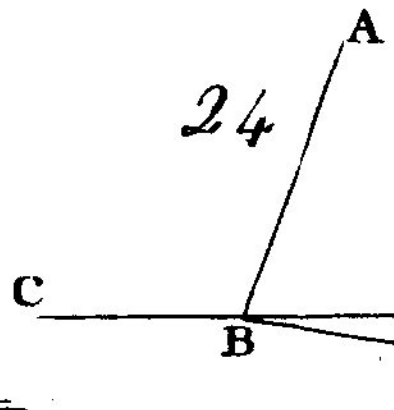
22



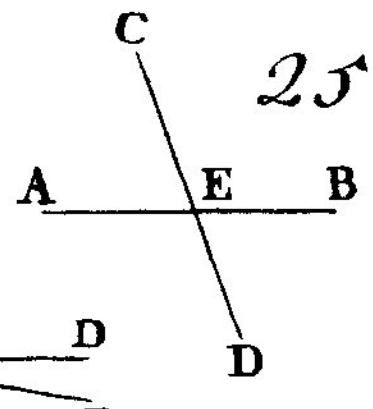
23



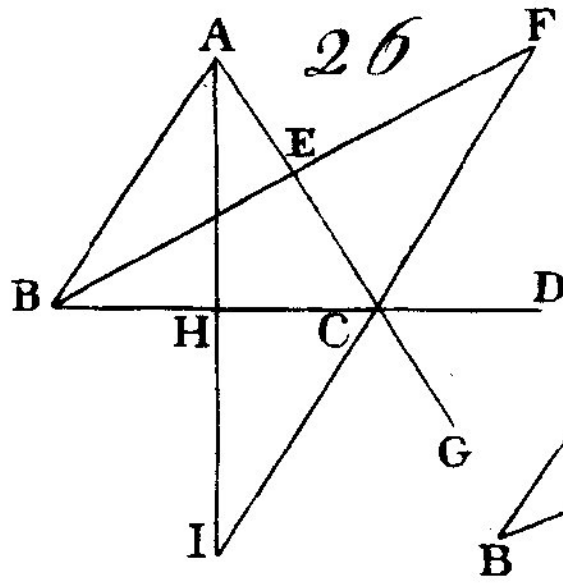
24



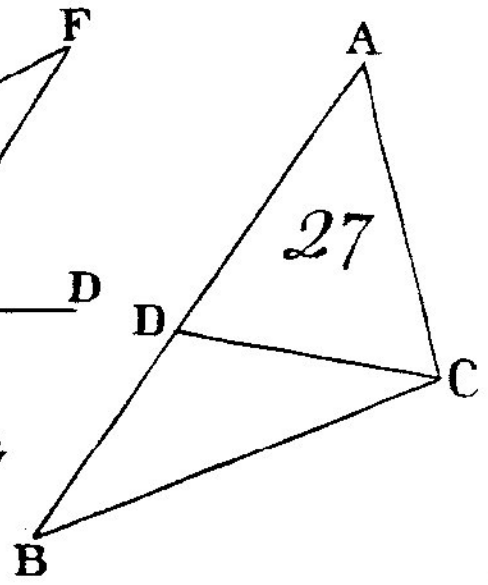
25



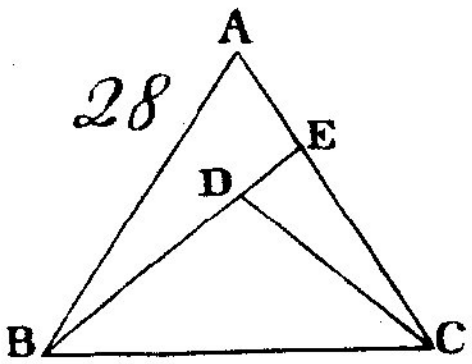
26



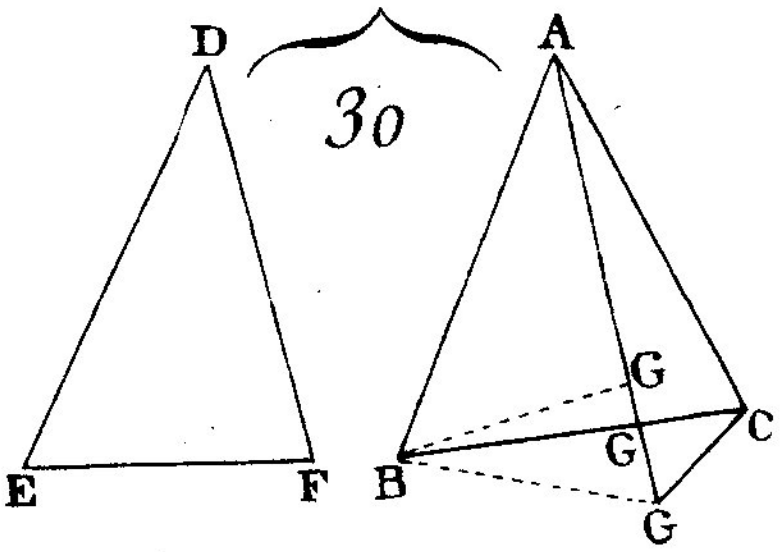
27



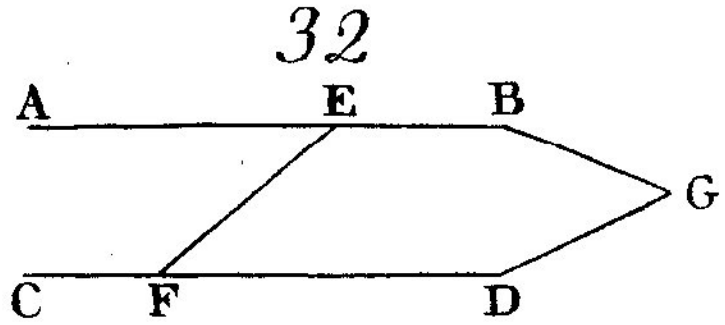
28



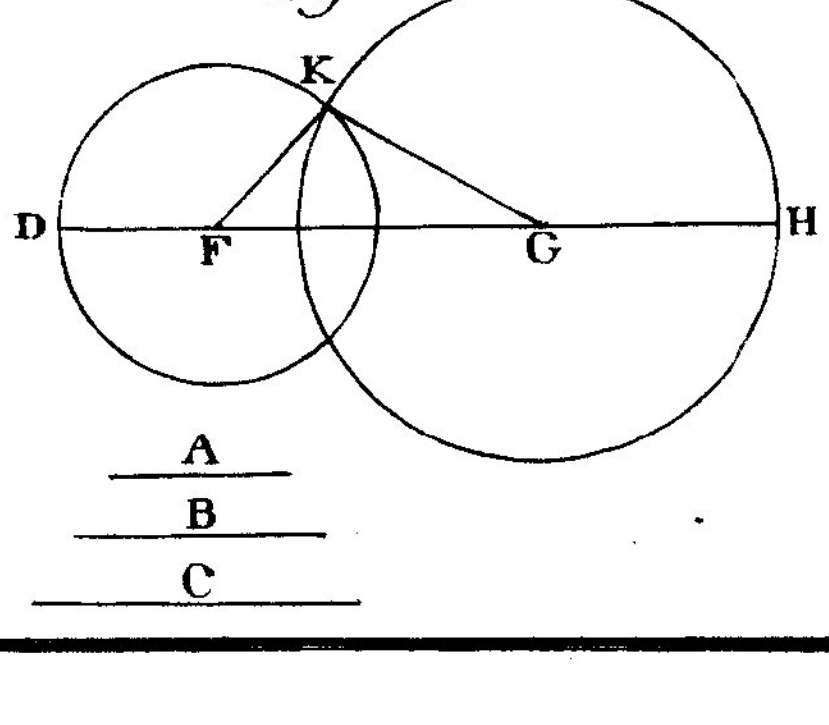
30



32

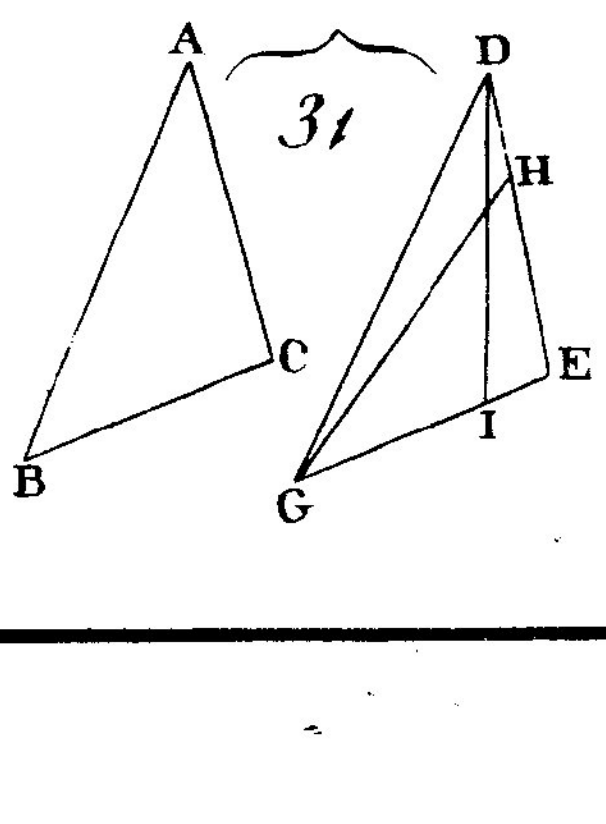


29

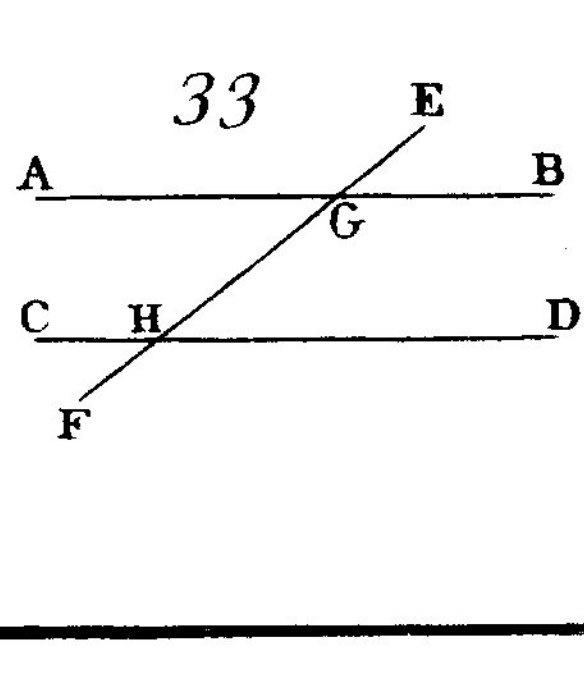


A
B
C

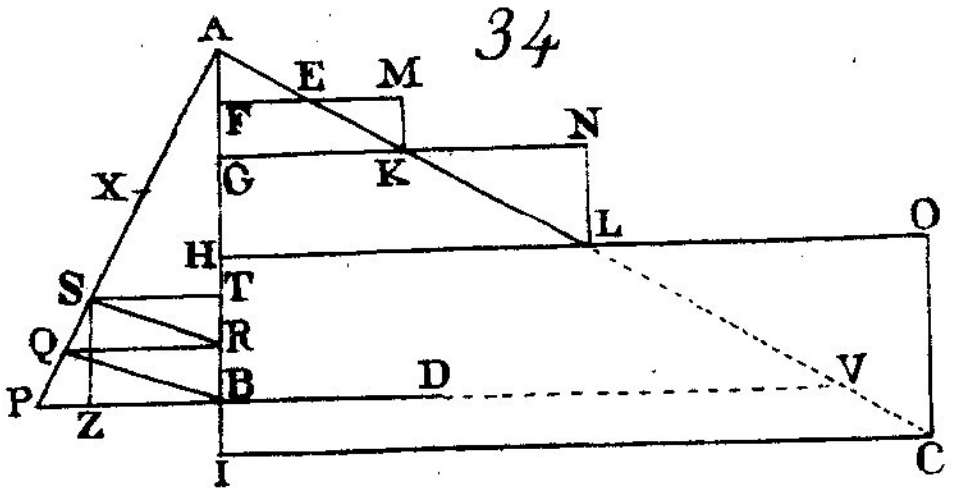
31



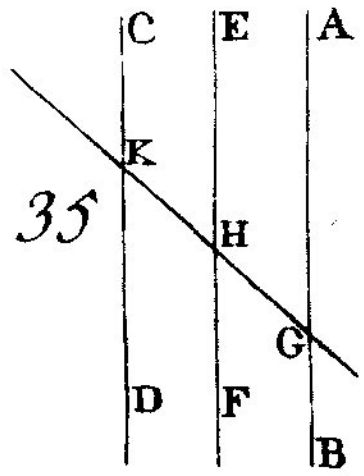
33



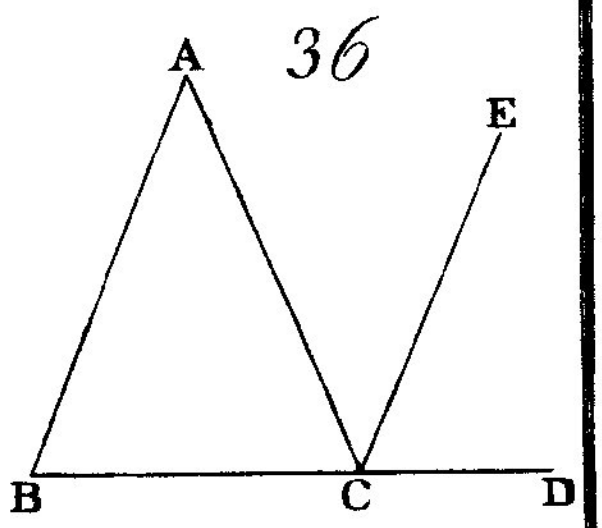
34



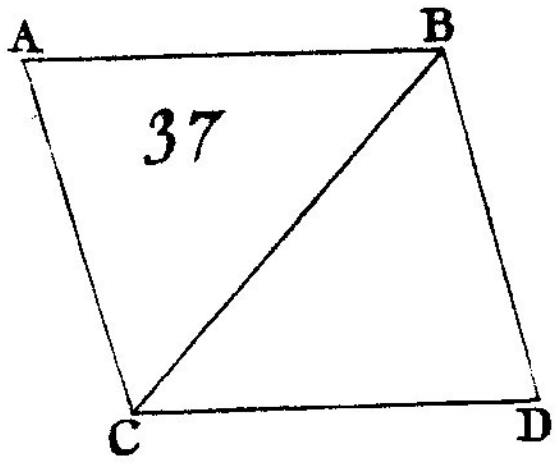
35



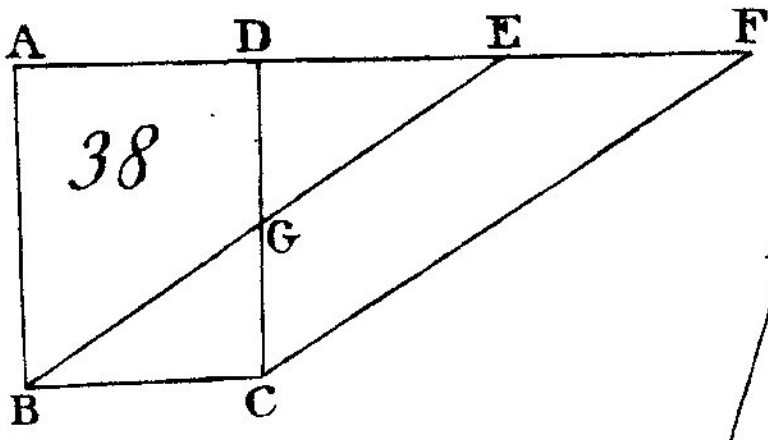
36



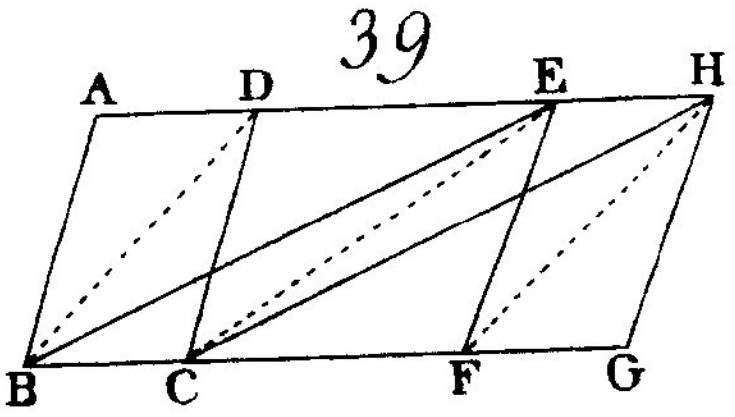
37



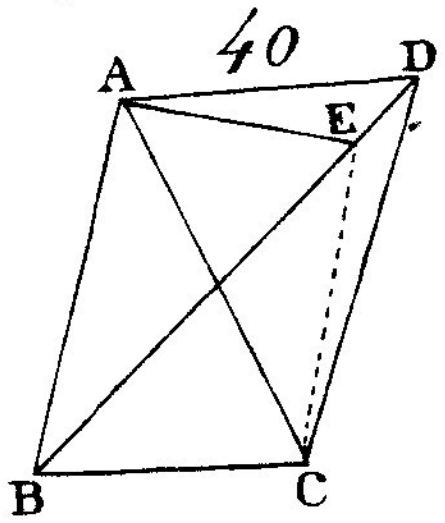
38



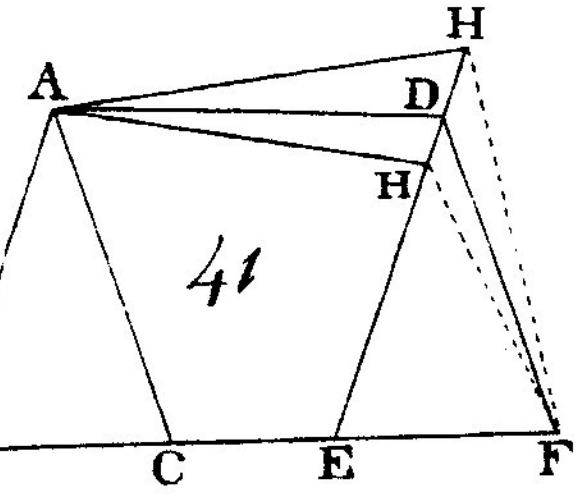
39



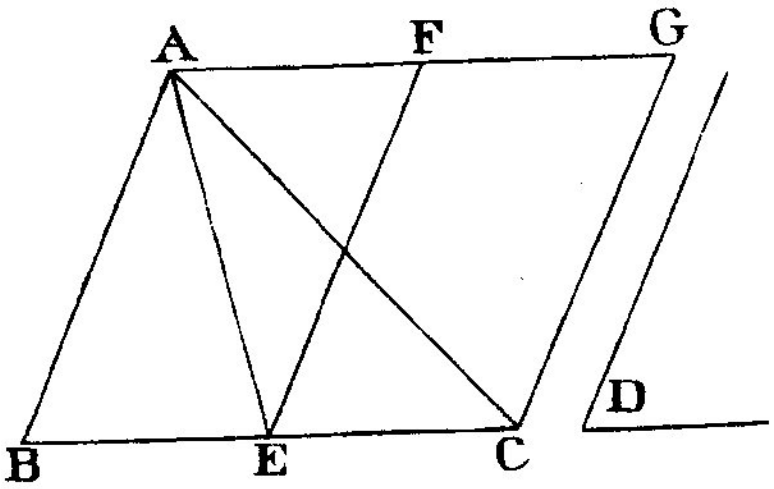
40



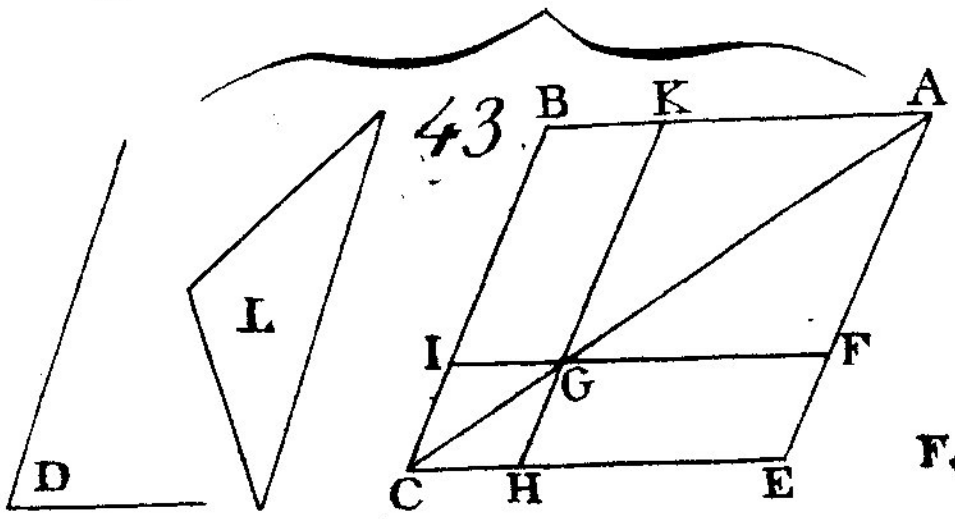
41



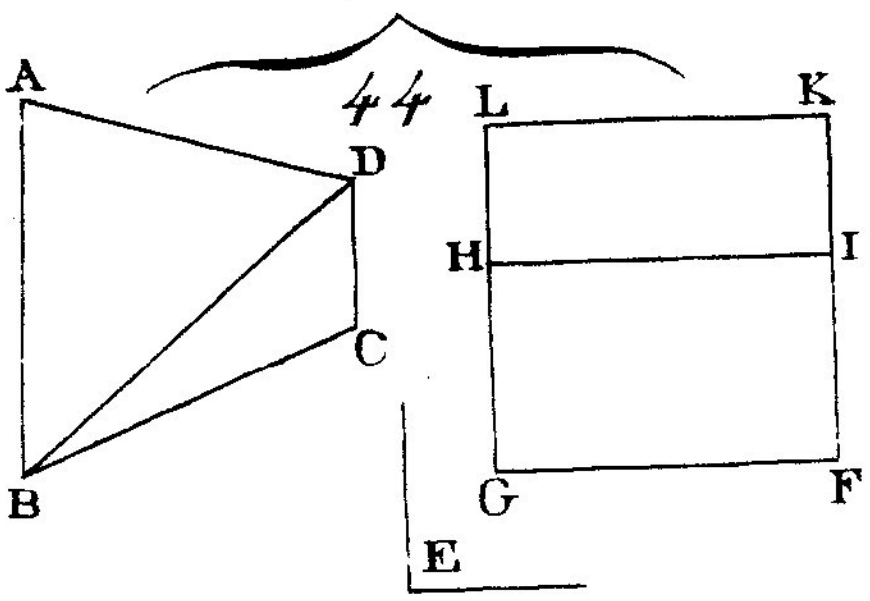
42



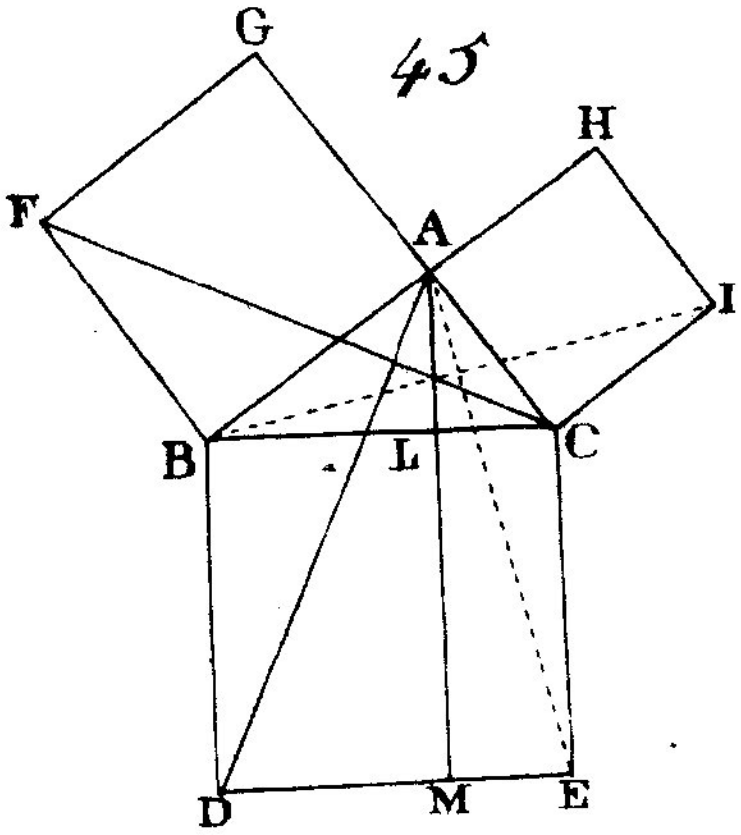
43



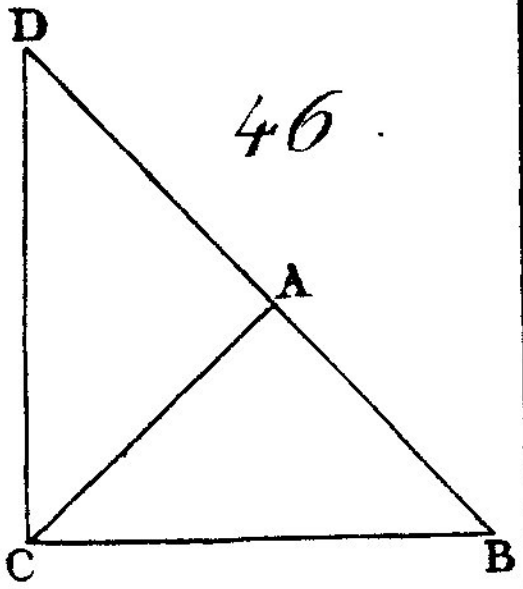
44

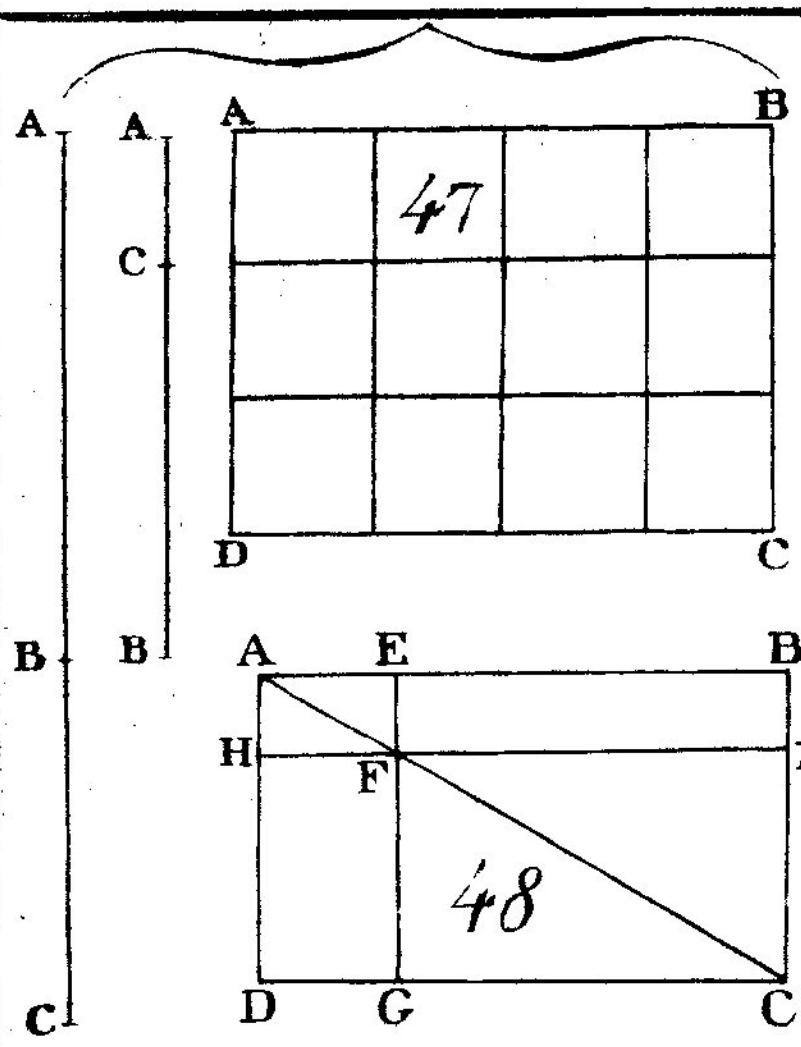


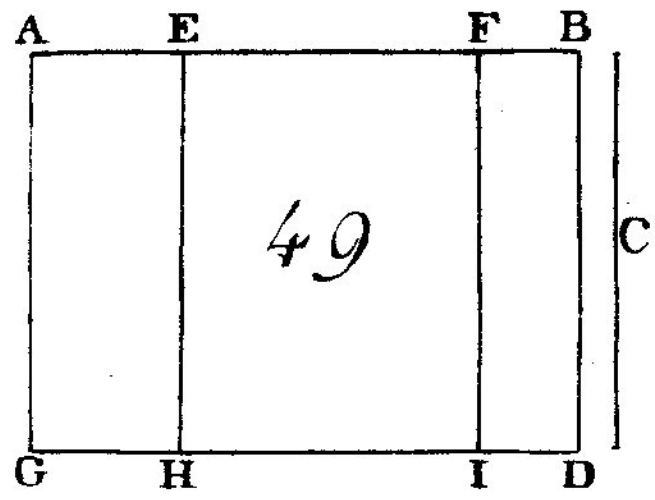
45

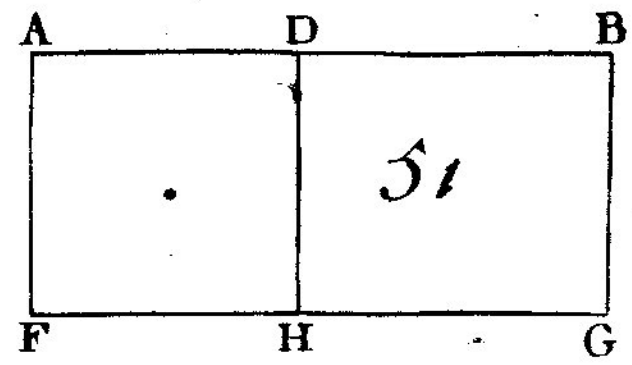


46

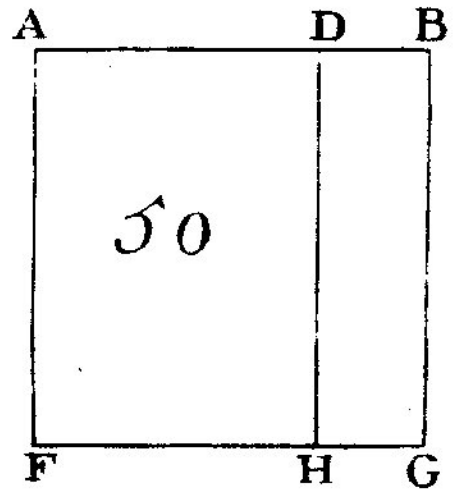


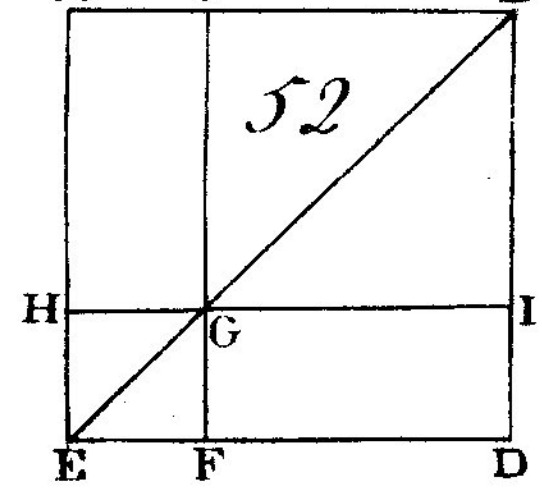

A
A
B
B
C
A
B
47
D
C

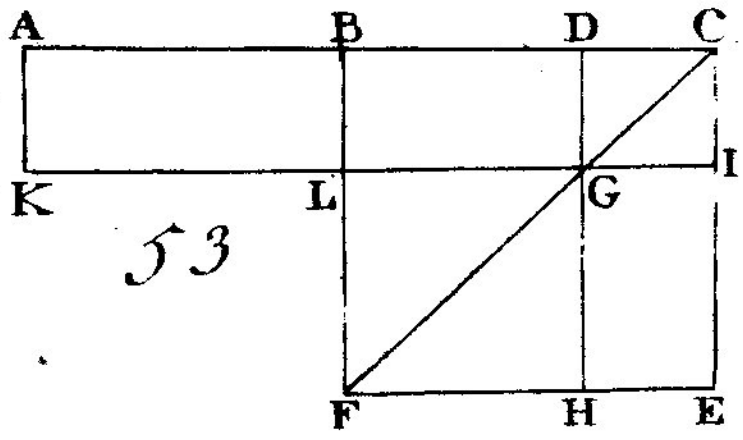

A
E
F
B
49
C
G
H
I
D

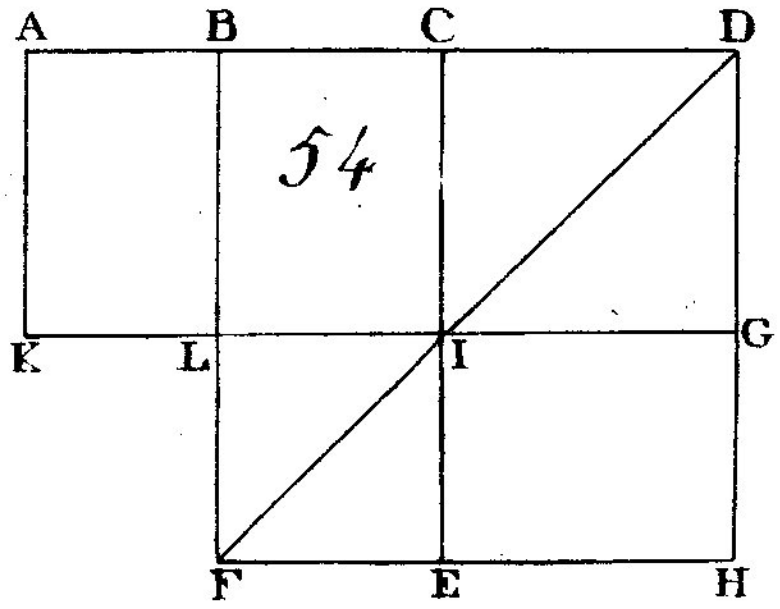

A
D
B
51
F
H
G

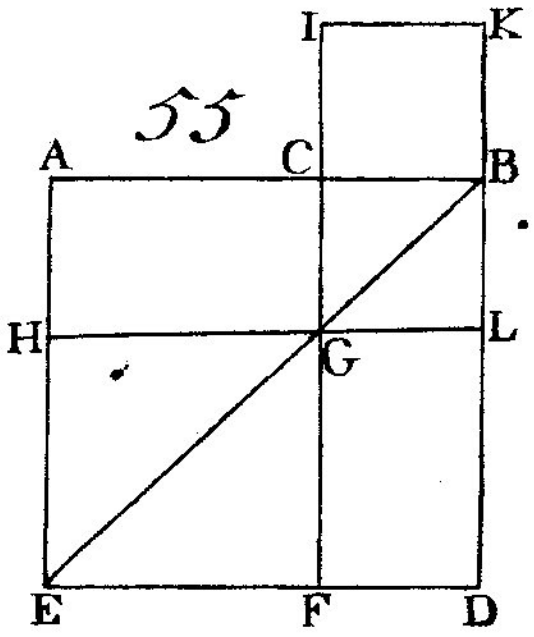
A
E
B
H
F
I
48
D
G
C

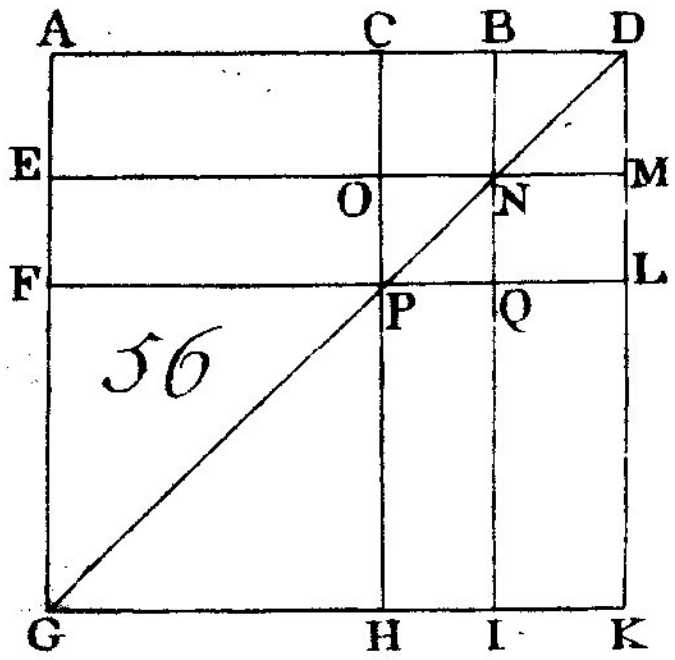

A
D
B
50
F
H
G

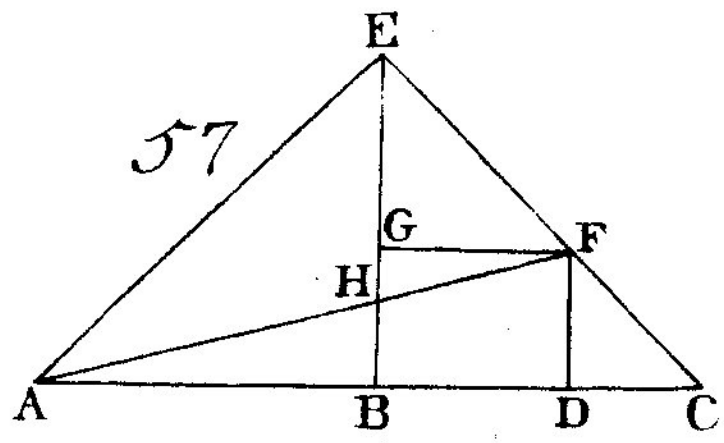

A
C
B
52
H
G
I
E
F
D

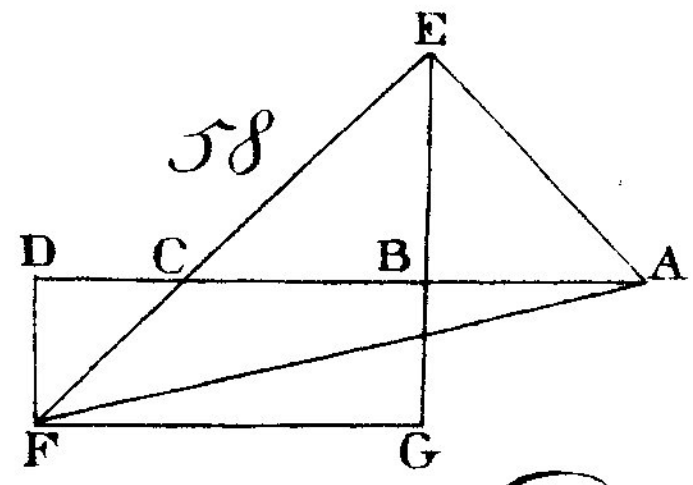

A
B
D
C
I
K
L
G
53
F
H
E

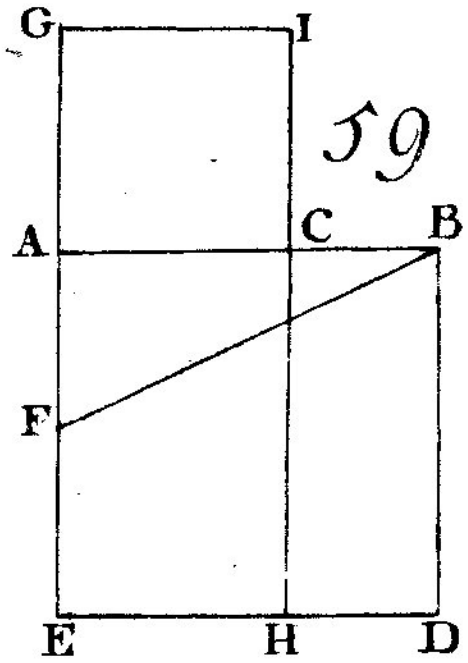

A
B
C
D
54
K
L
I
G
F
E
H

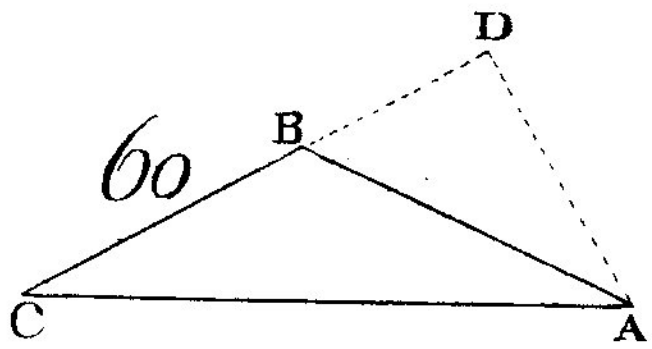

I
K
55
A
C
B
H
G
L
E
F
D

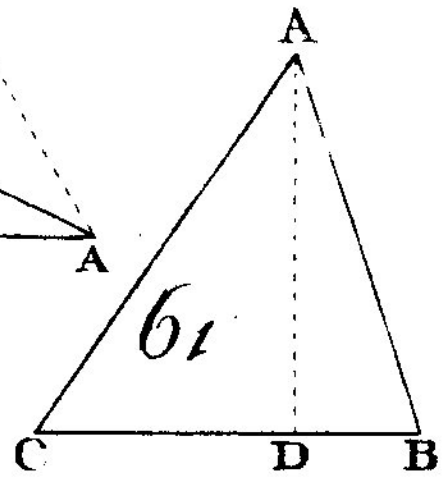

A
C
B
D
E
O
N
M
F
P
Q
L
56
G
H
I
K

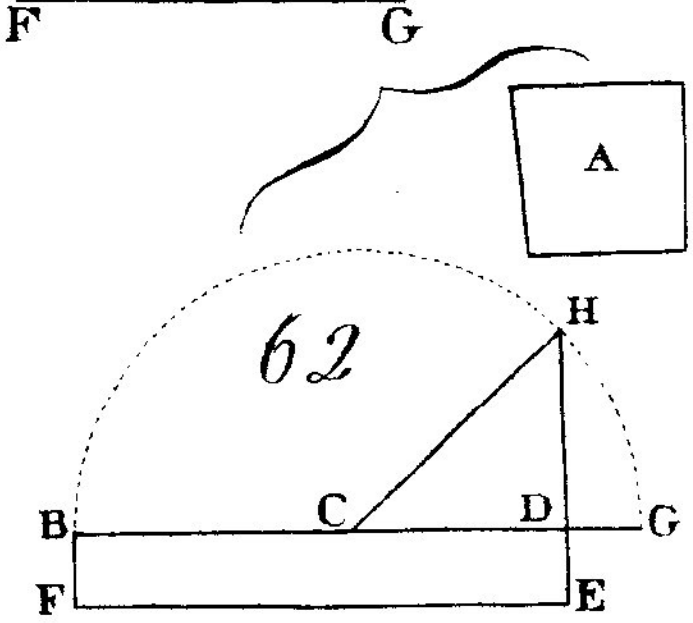

E
57
G
F
H
A
B
D
C

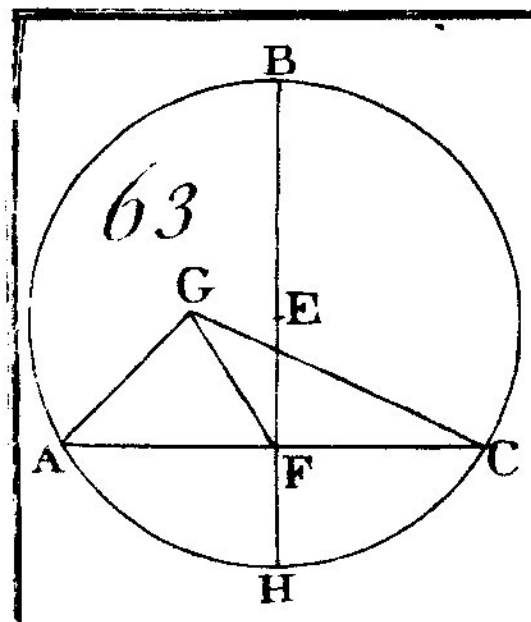

E
58
D
C
B
A
F
G


G
I
59
A
C
B
F
E
H
D

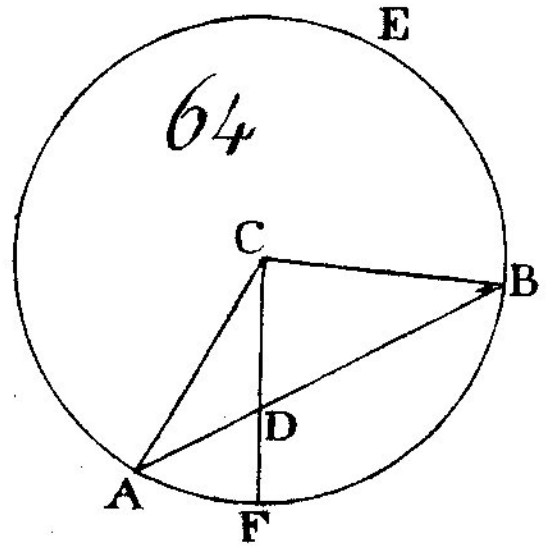

D
B
60
C
A


A
61
C
D
B

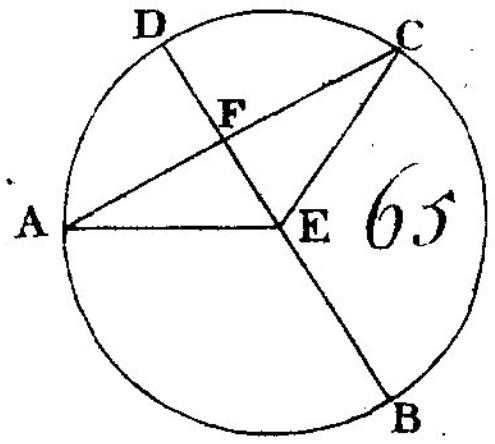

G
A
62
H
B
C
D
G
F
E



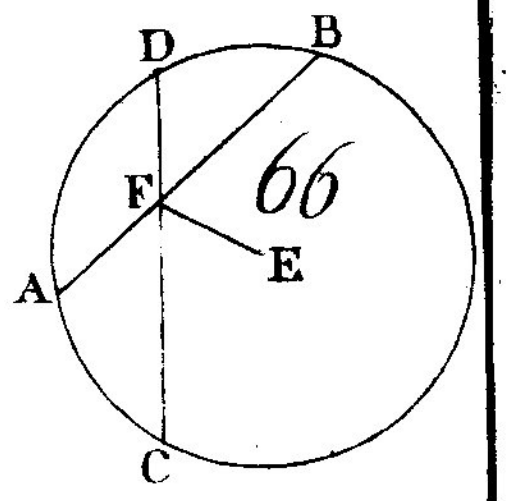
63



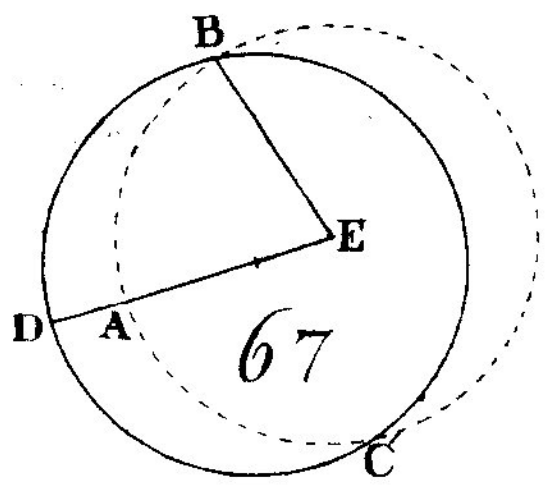
64



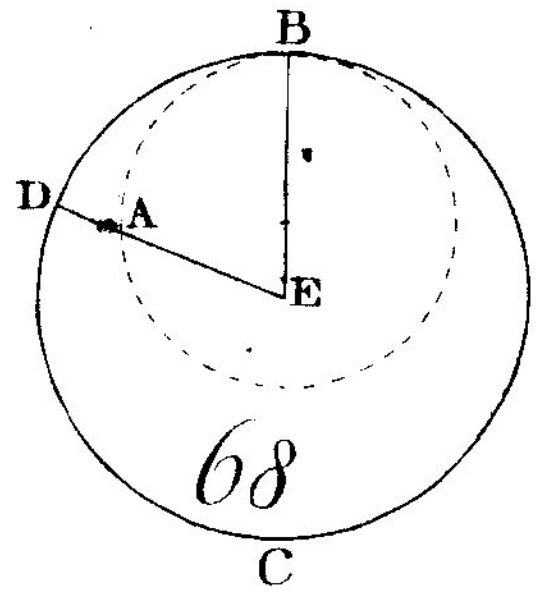
65



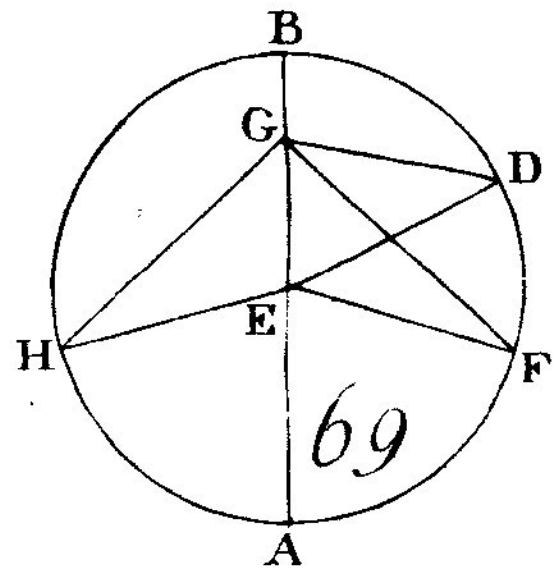
66



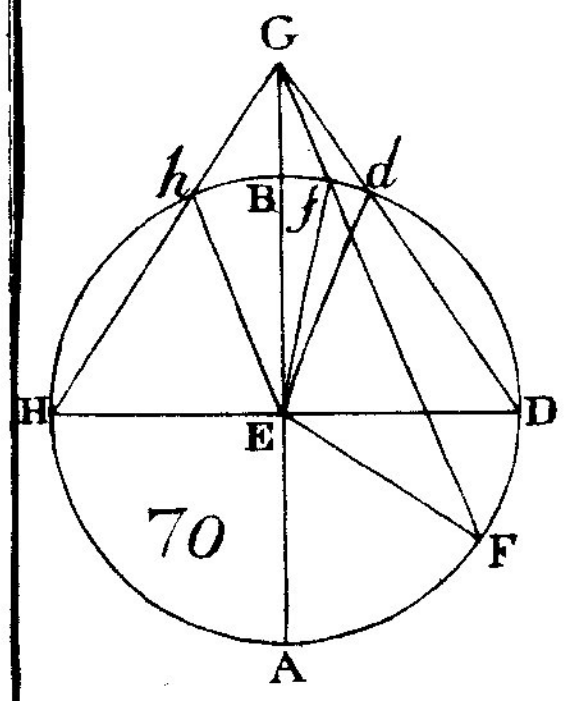
67



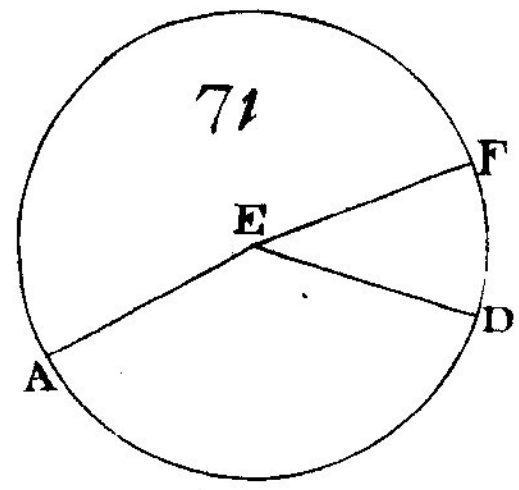
68



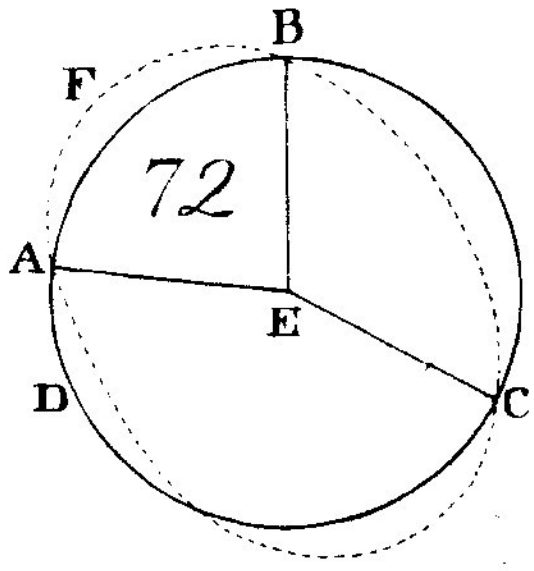
69



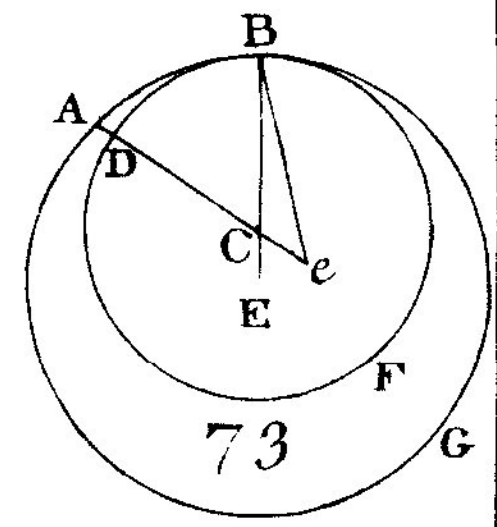
70



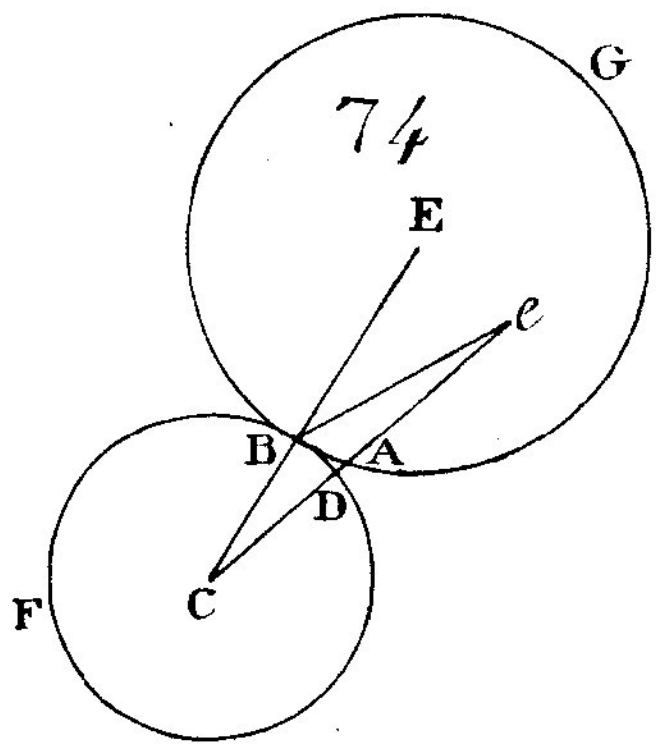
71



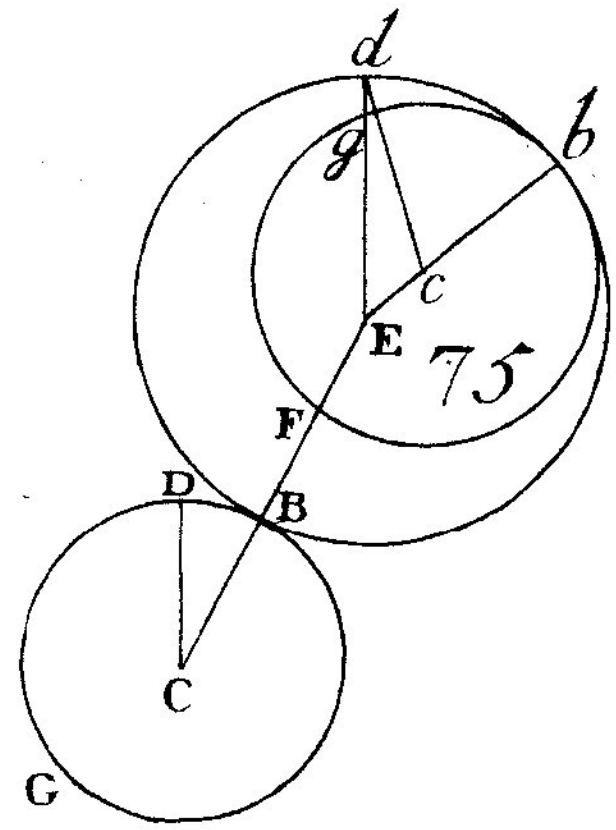
72



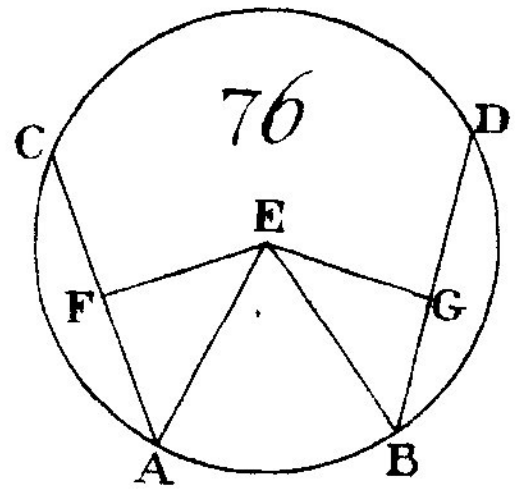
73



74

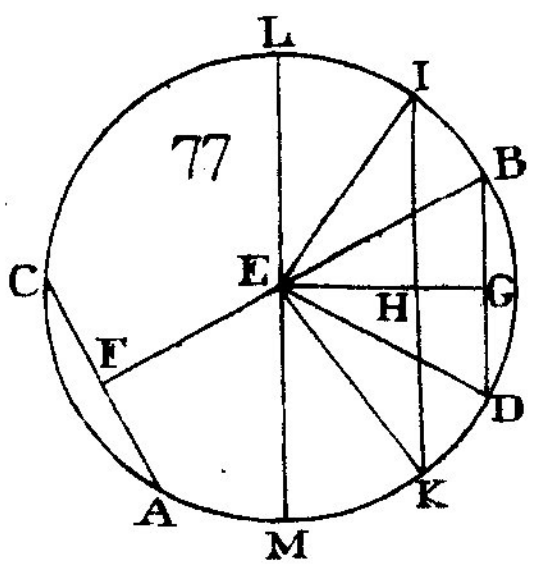


75

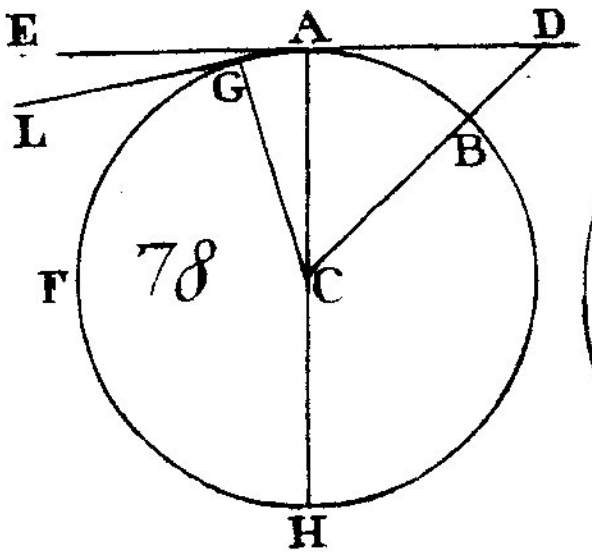


76

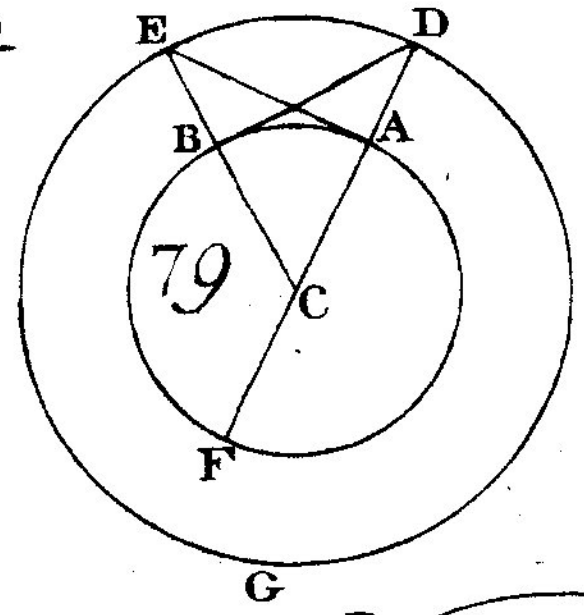
77



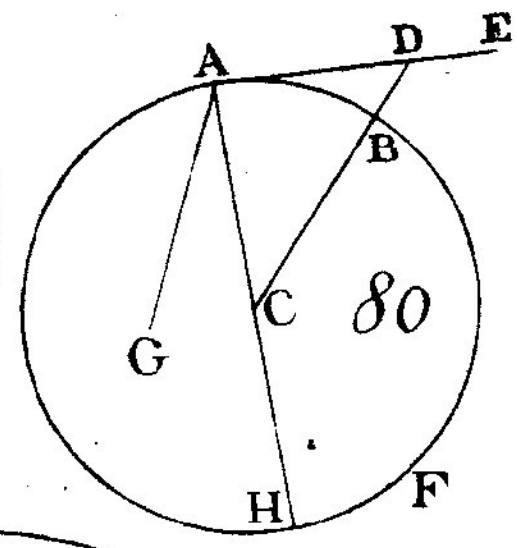
78



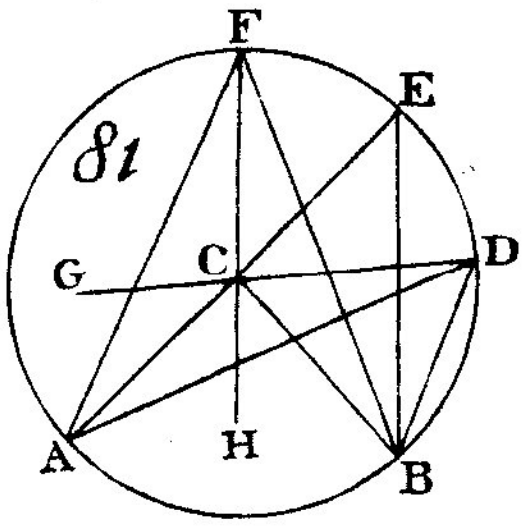
79



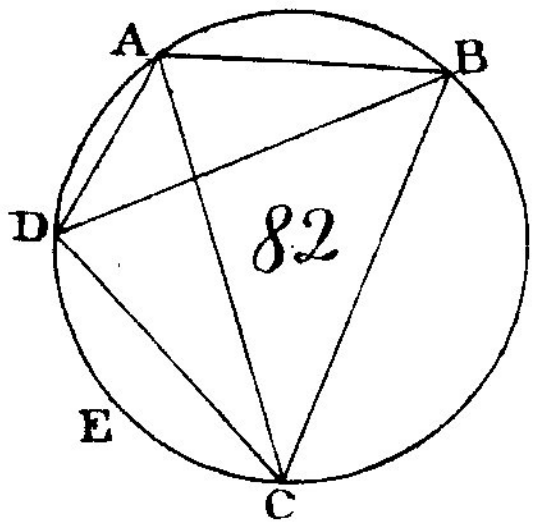
80



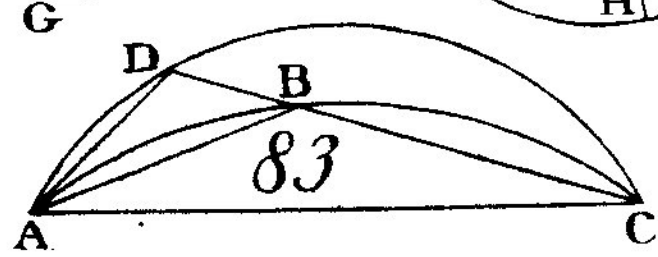
81



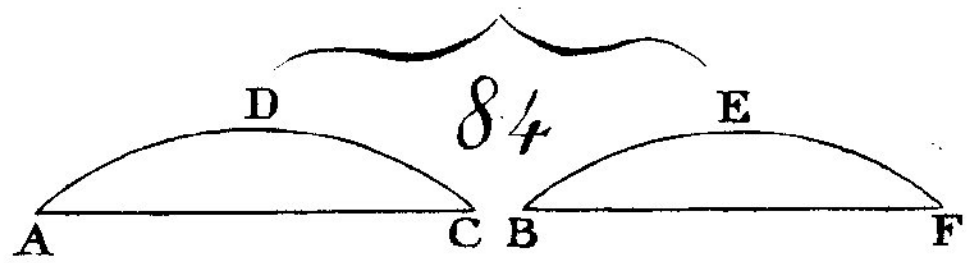
82



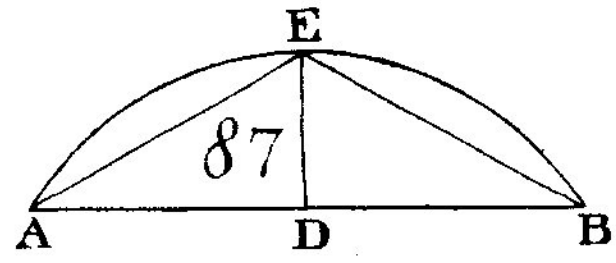
83



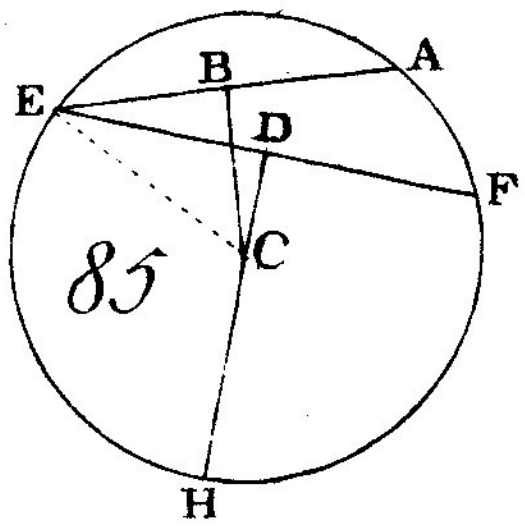
84



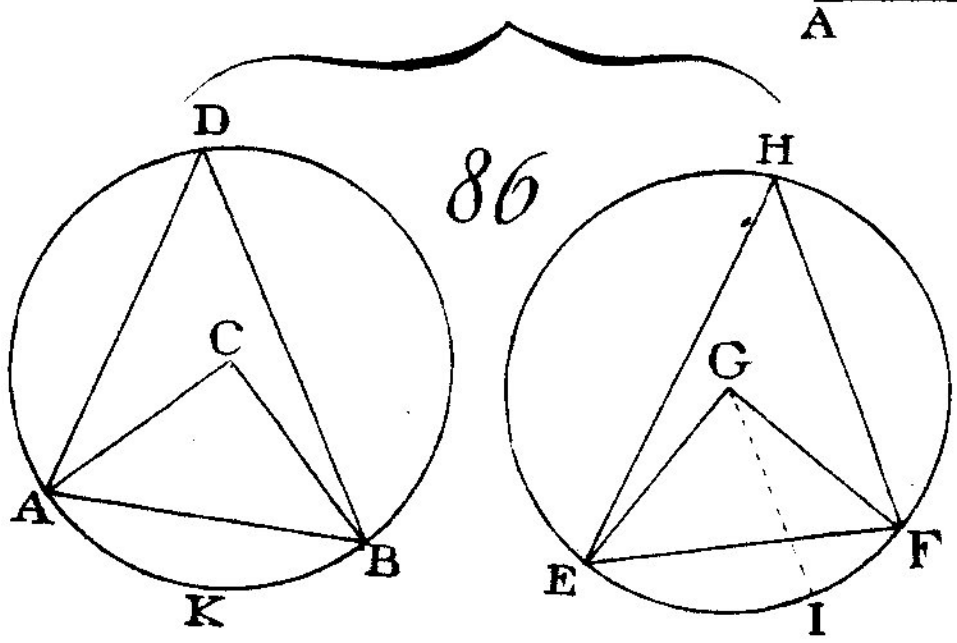
87



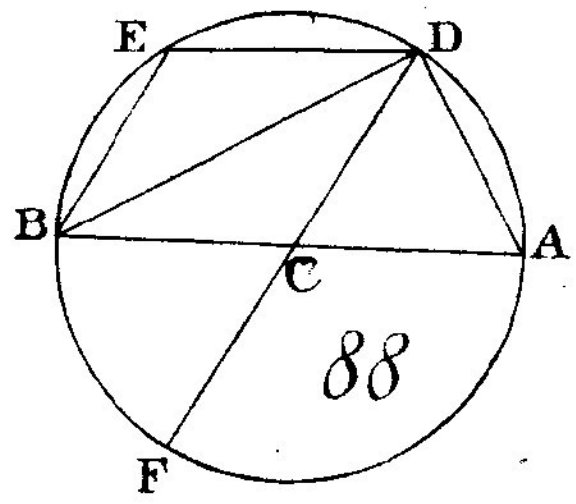
85



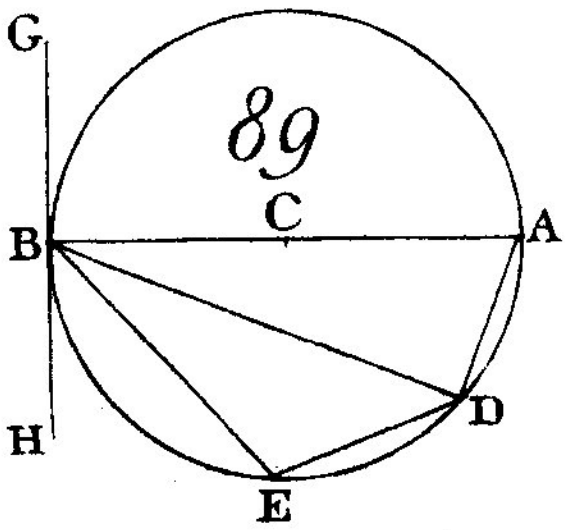
86



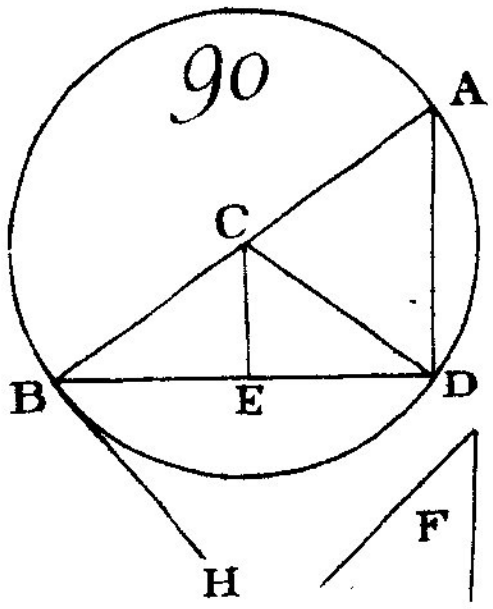
88



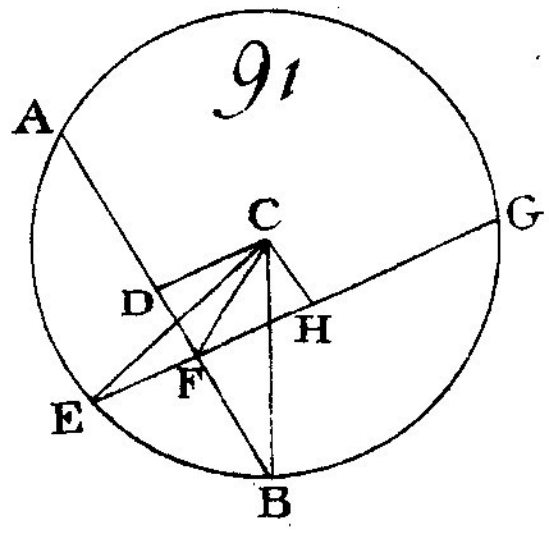
89



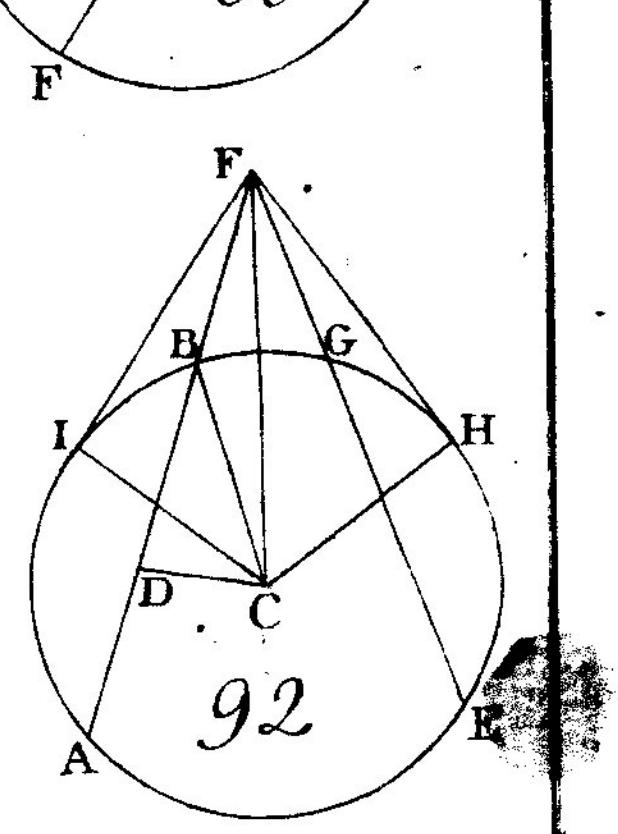
90

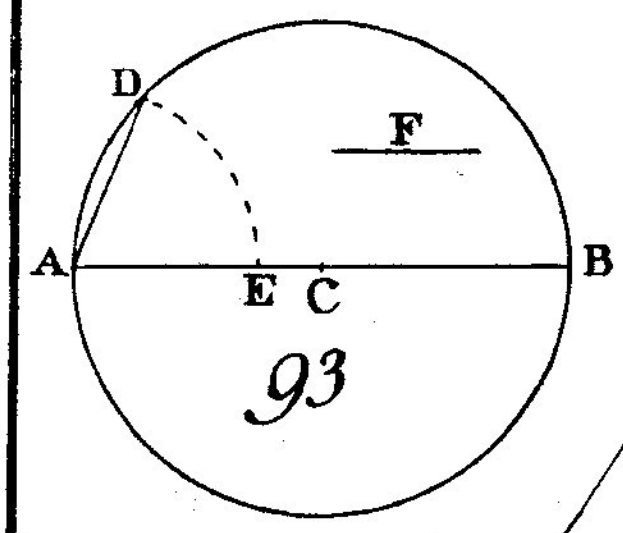


91

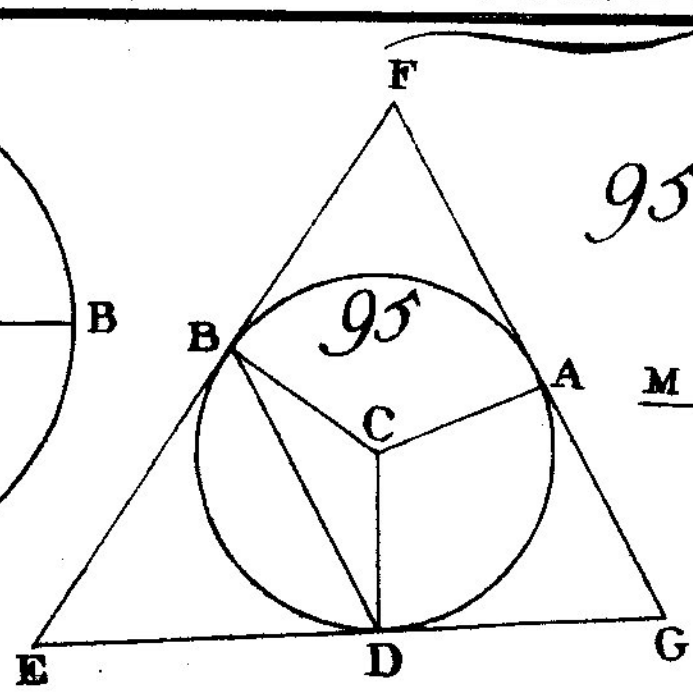


92

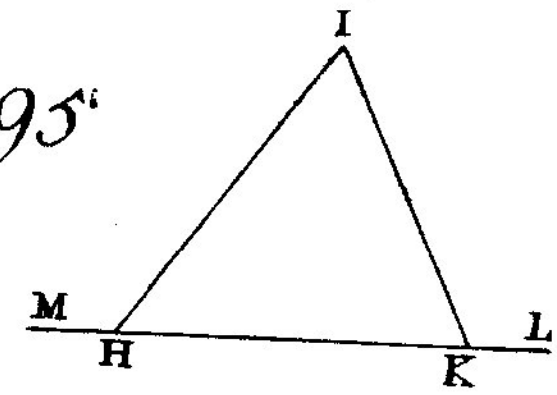




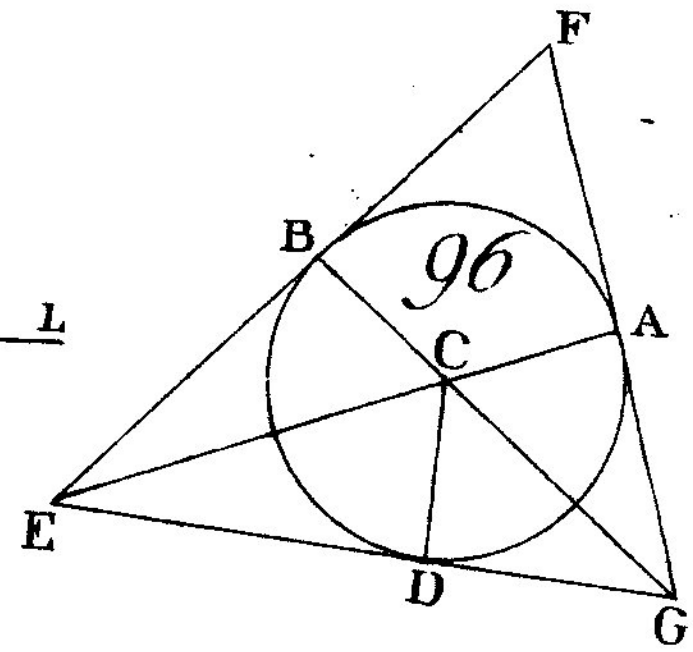
93



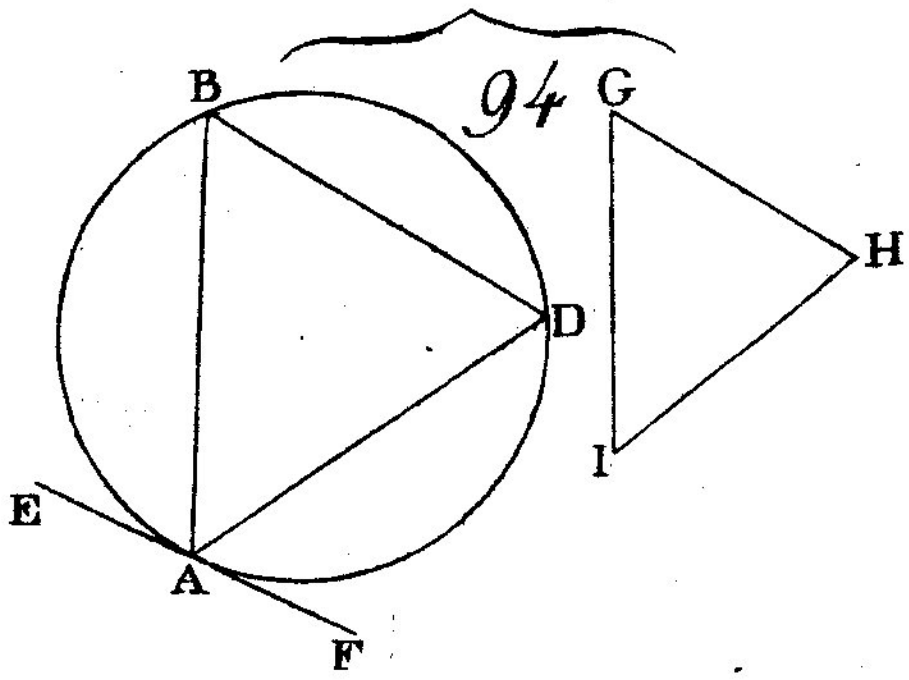
95



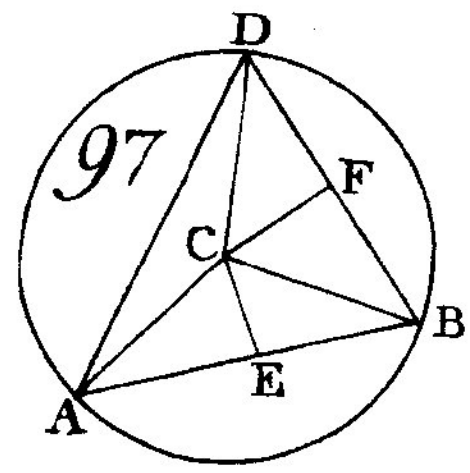
95'



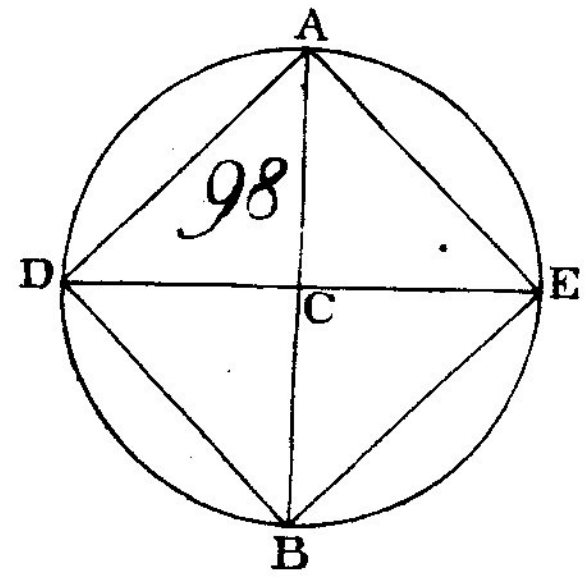
96



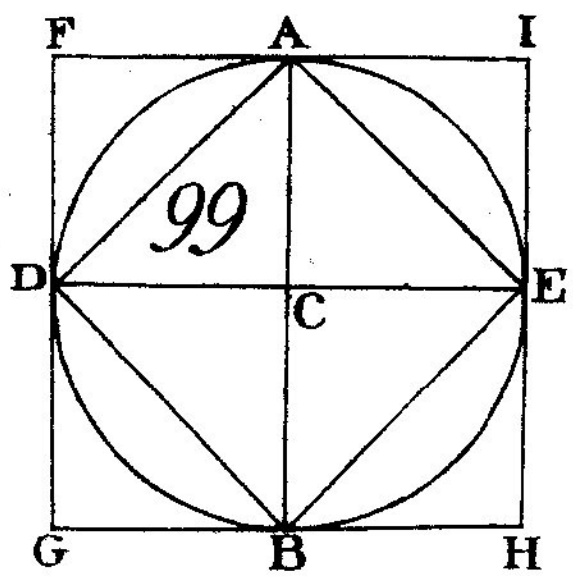
94



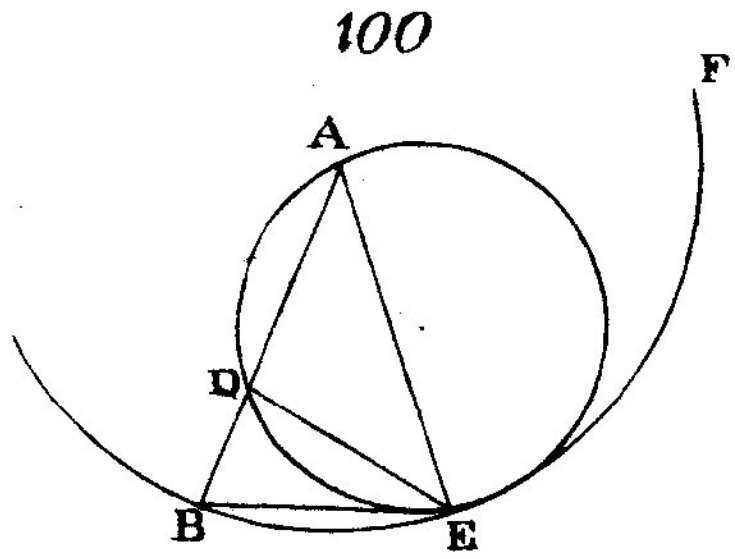
97



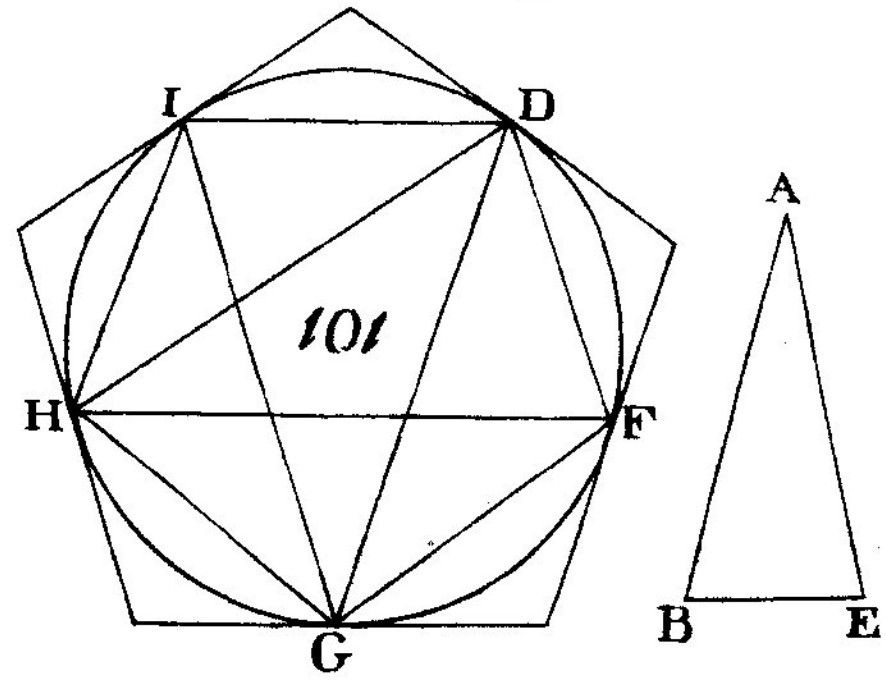
98



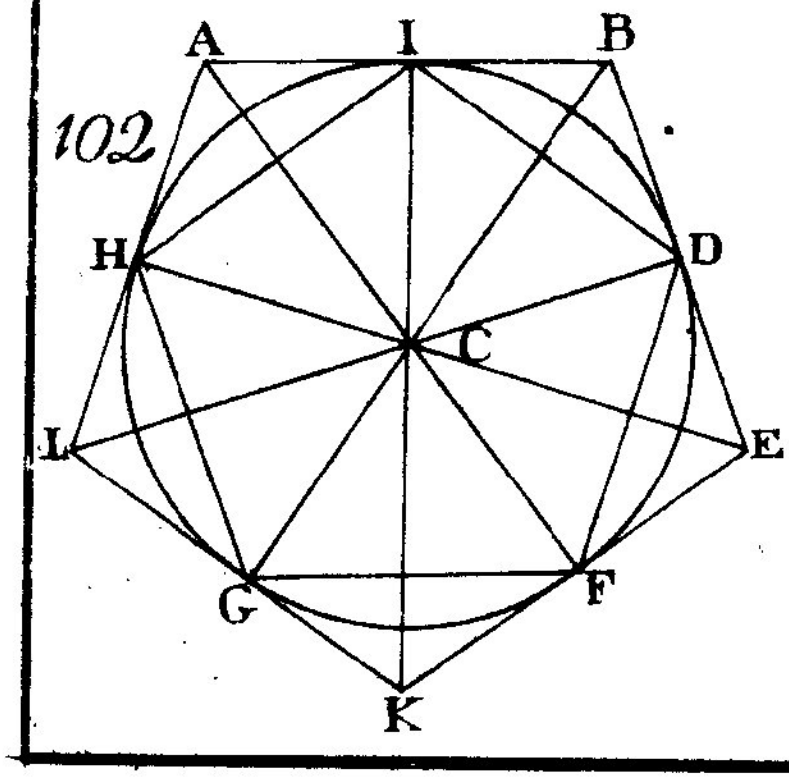
99



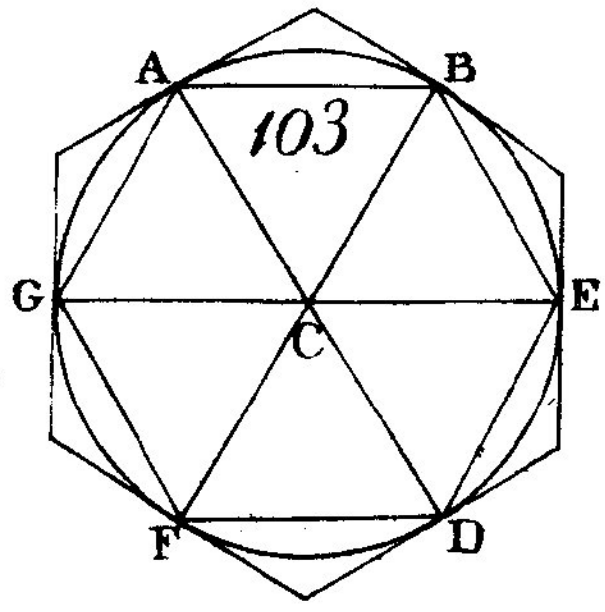
100



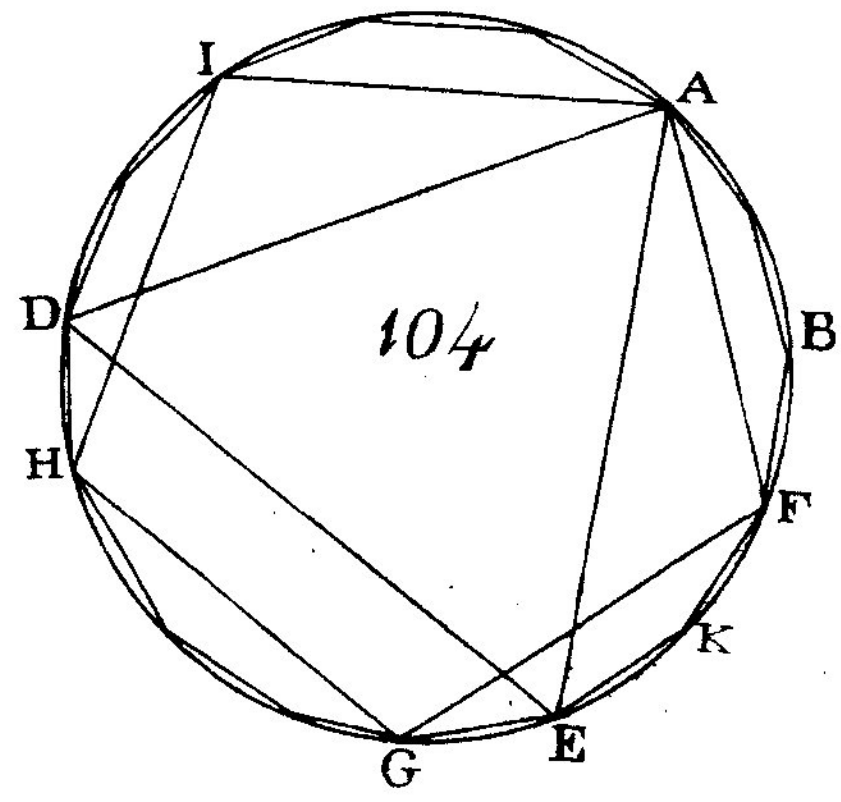
101



102



103



104

105

A B C D F G H I L M N O

E K P

106

F G H A D E B C

107

I H G A B C K L M D E F

108

K E A B G M I F C D H N

109

G A E B C F D

110

A G B E C H D F

111

D A E B C F

112

E F H G A C B D K

113

A B C

114

A C B

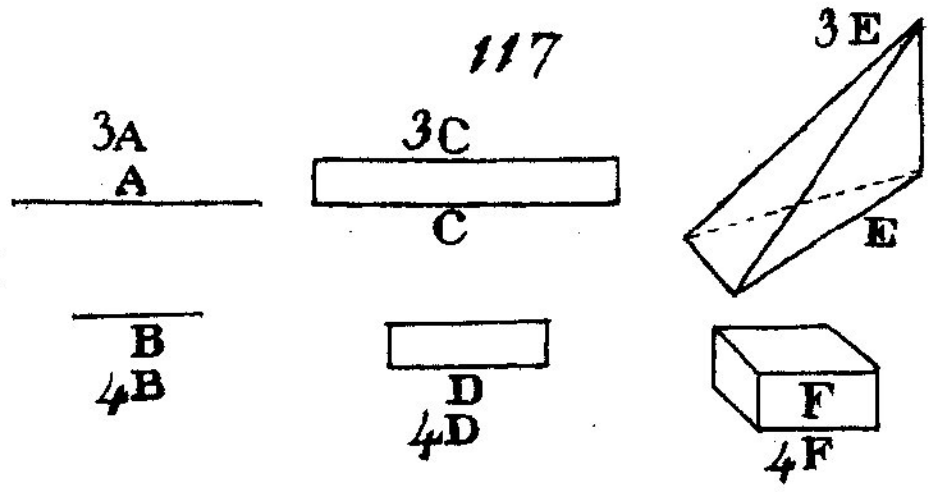
115

3A A 4B B 3C C 4D D 3E E 4F F

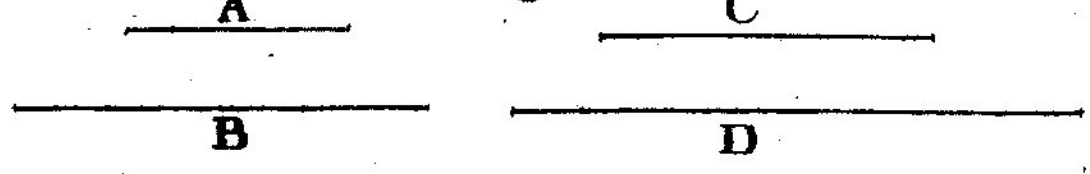
116

3A A 4B B 3C C 4D D 3E E 4F F

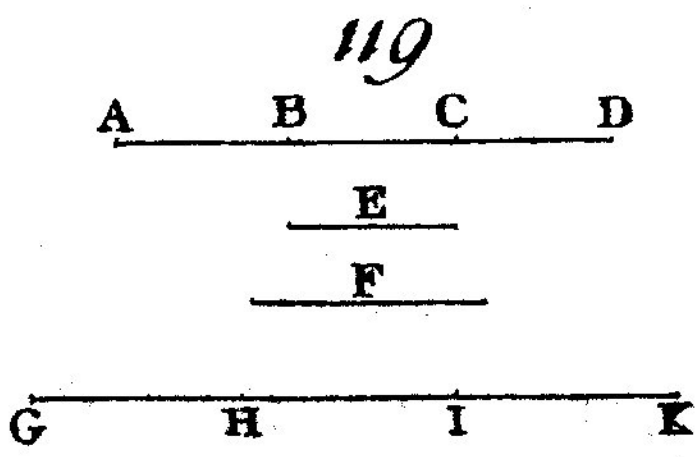
117



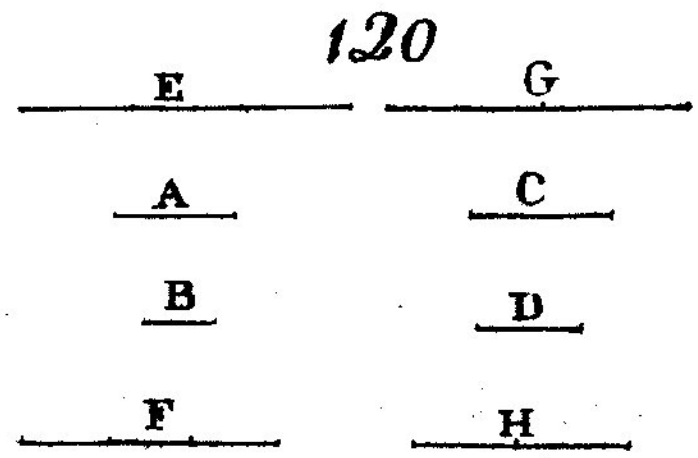
118



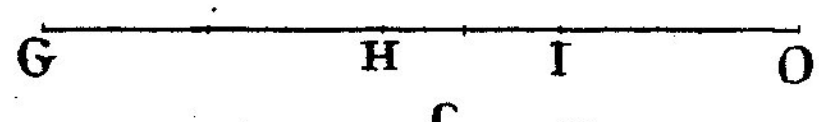
119



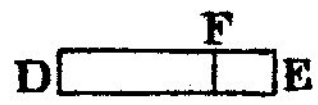
120

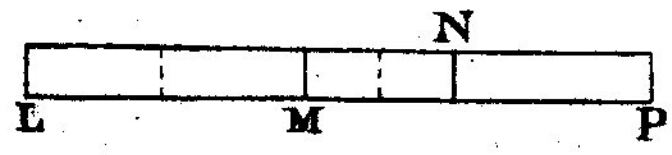


121

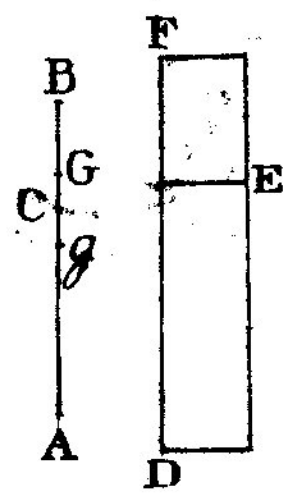




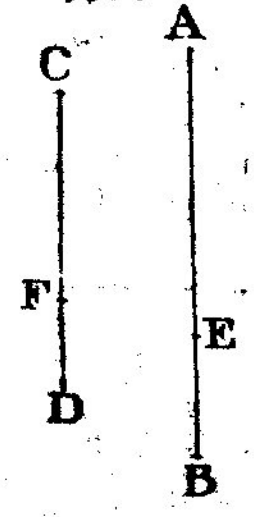




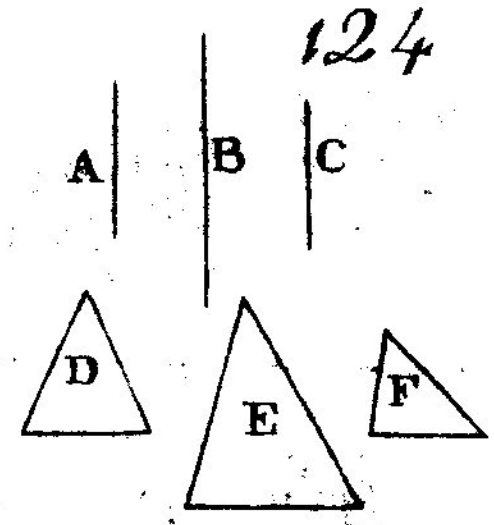
122



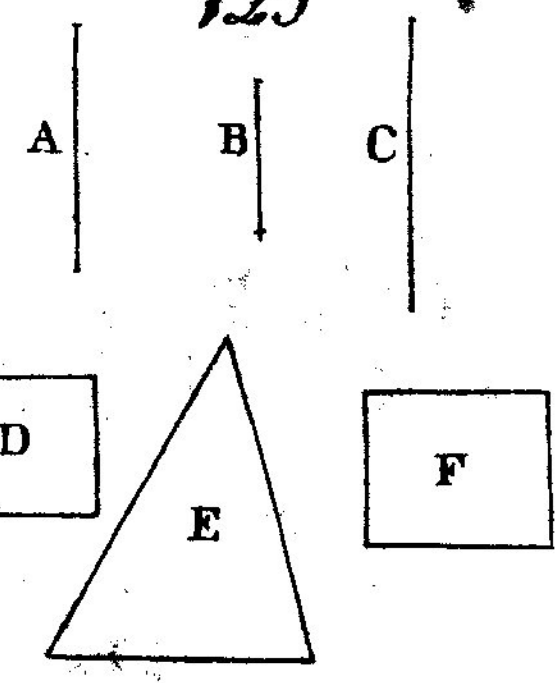
123



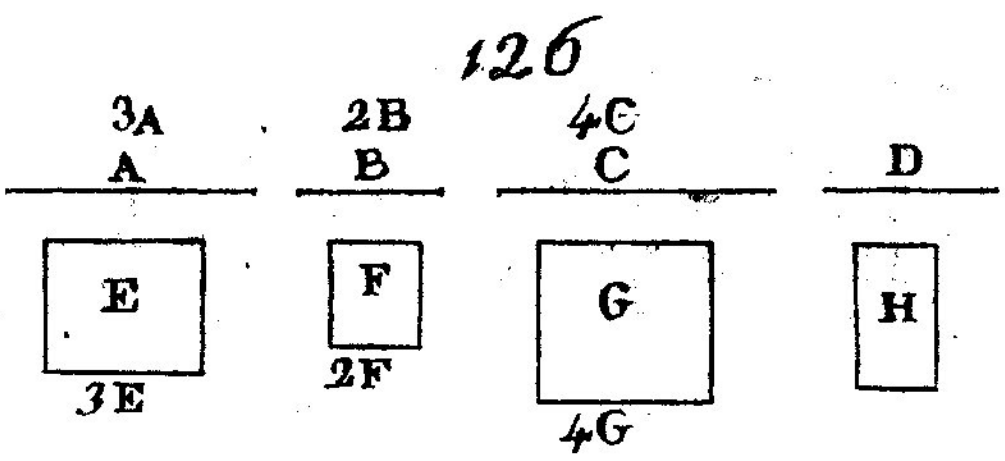
124



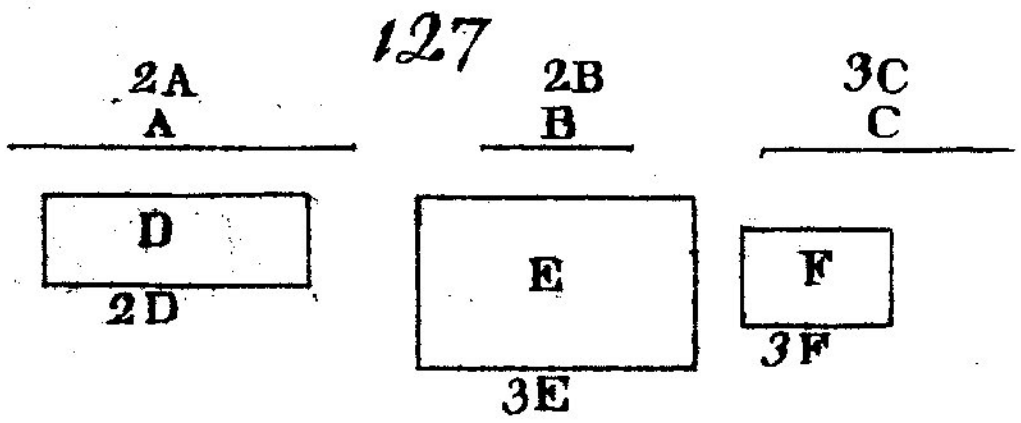
125



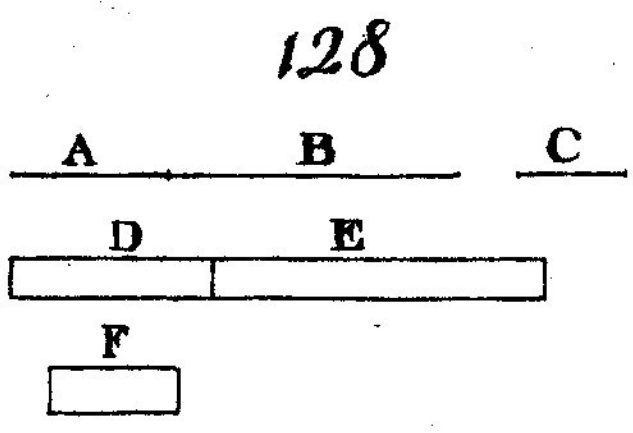
126



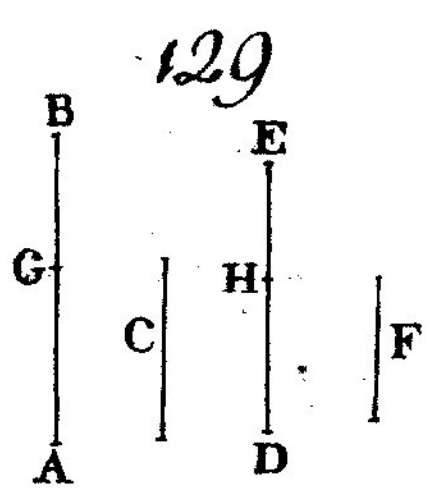
127



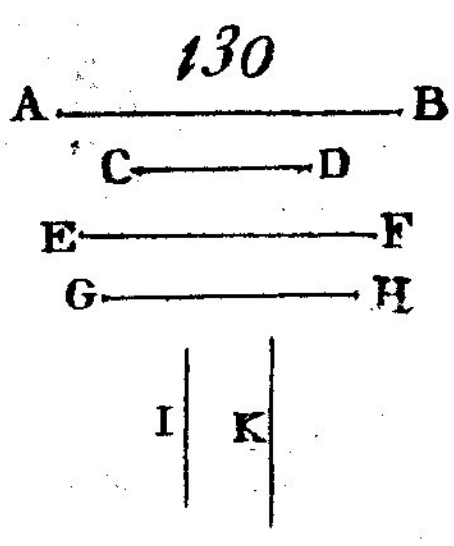
128



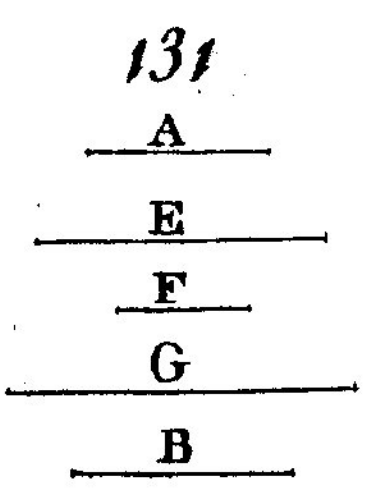
129

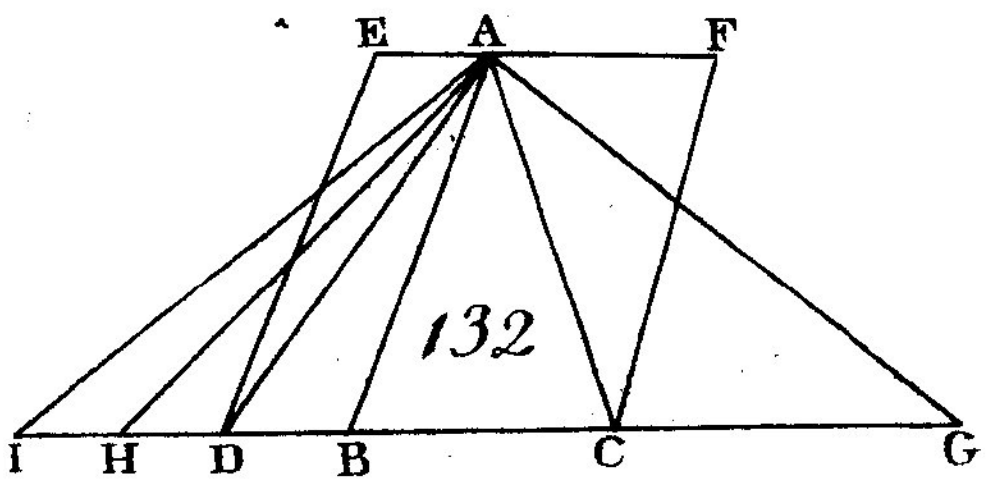


130

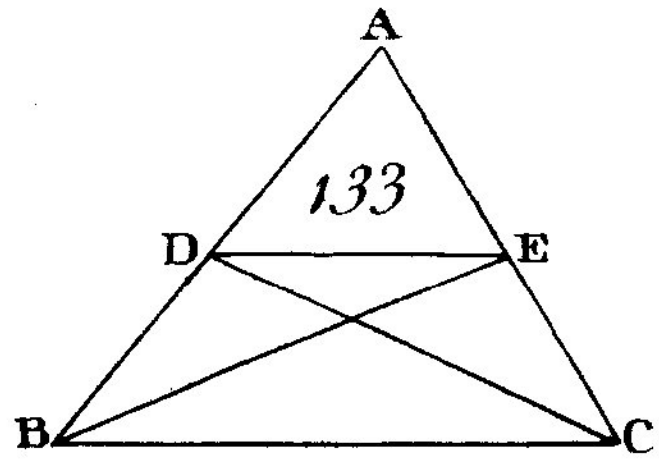


131

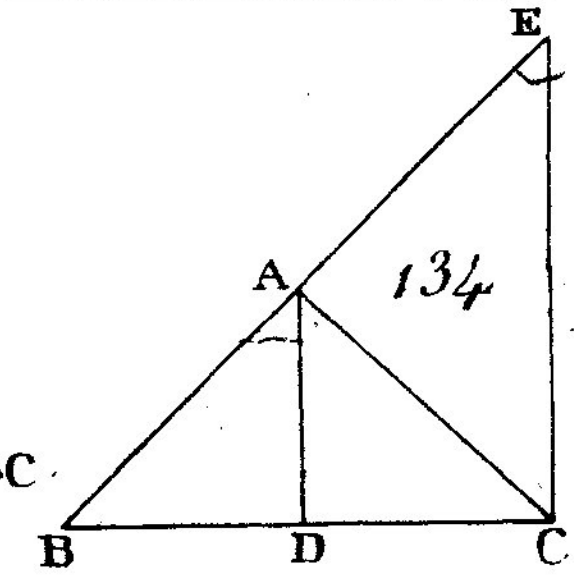




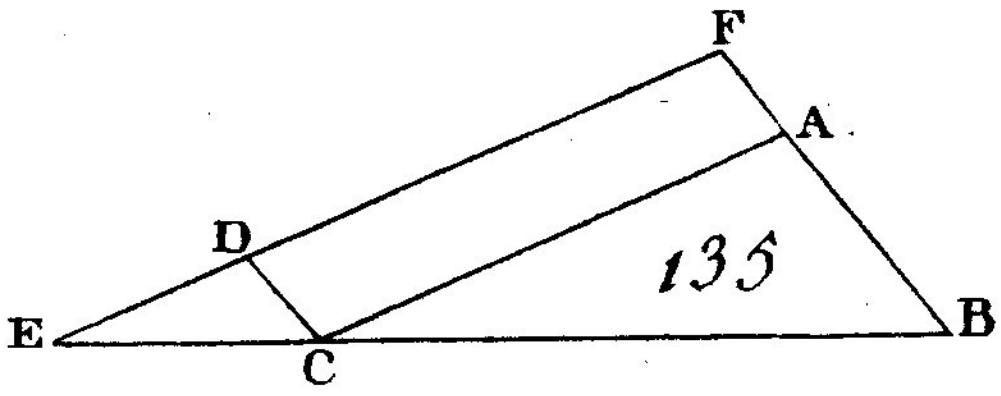
132



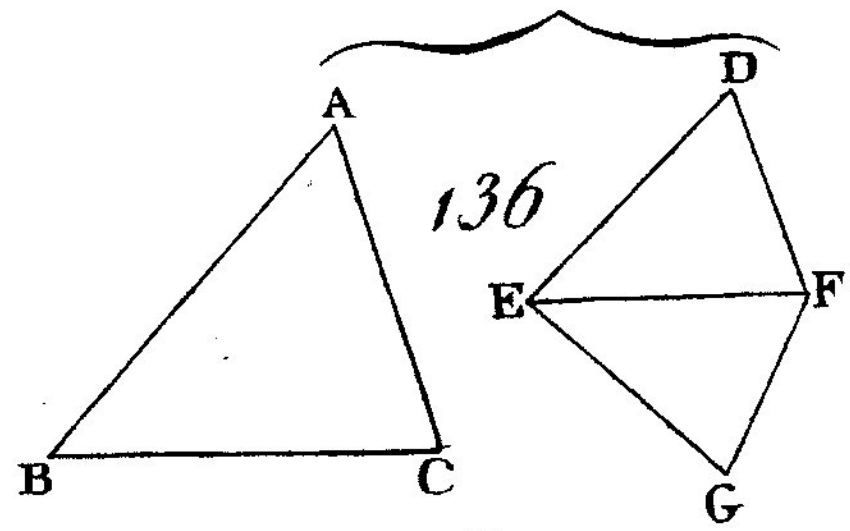
133



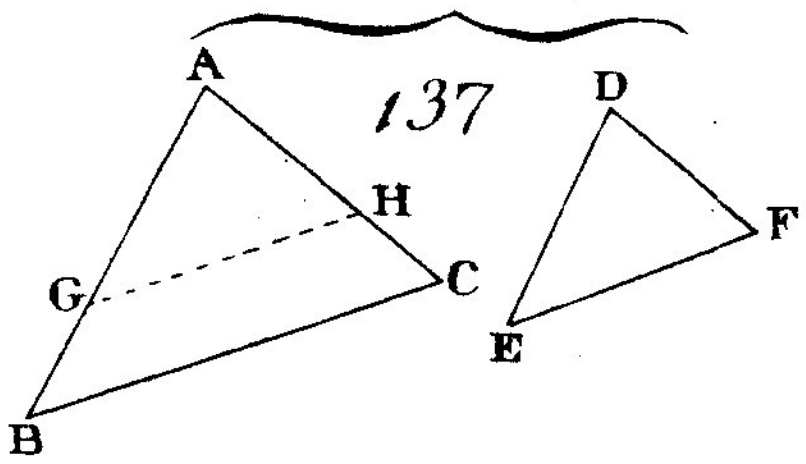
134



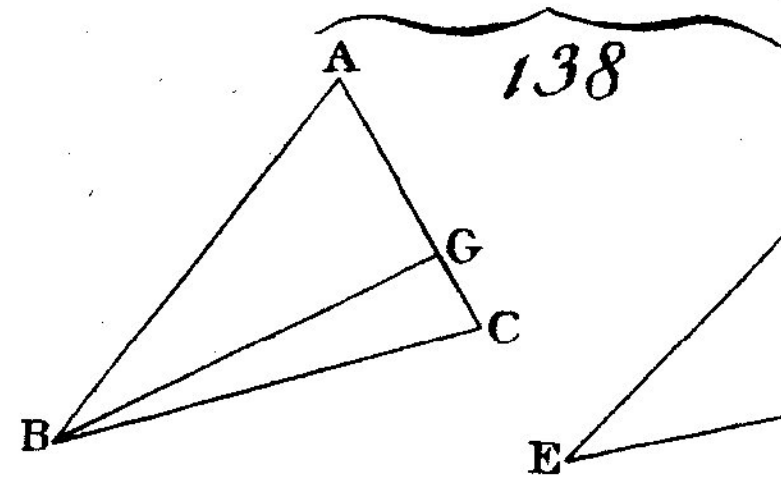
135



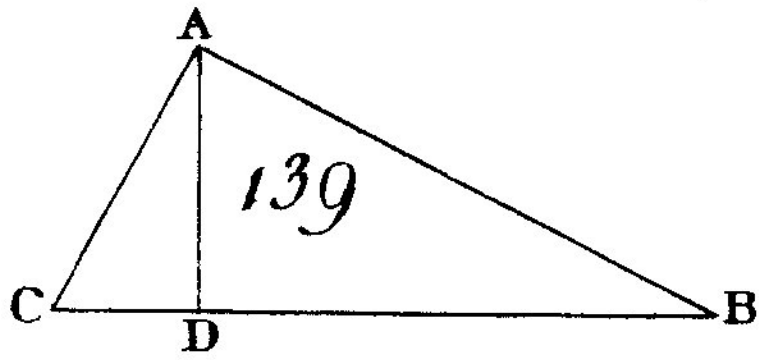
136



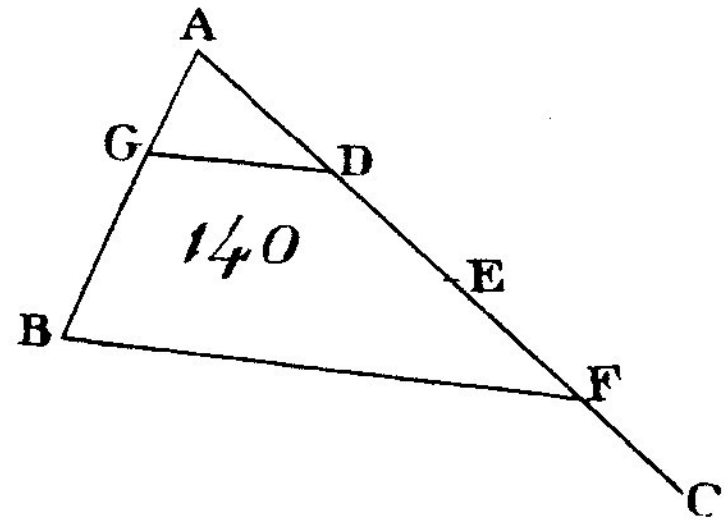
137



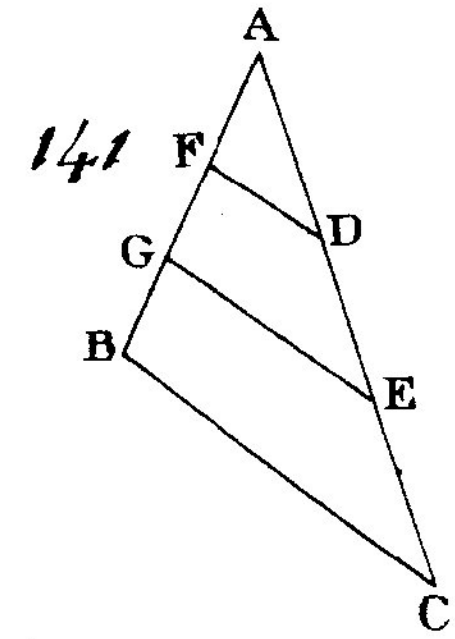
138



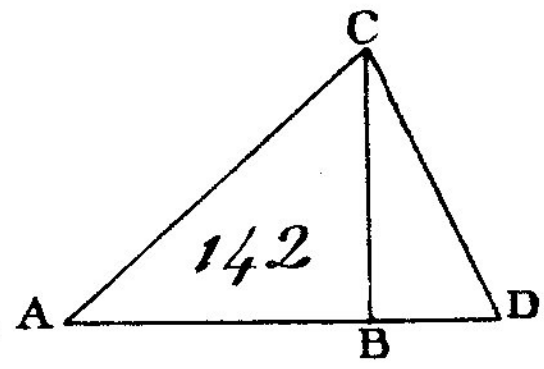
139



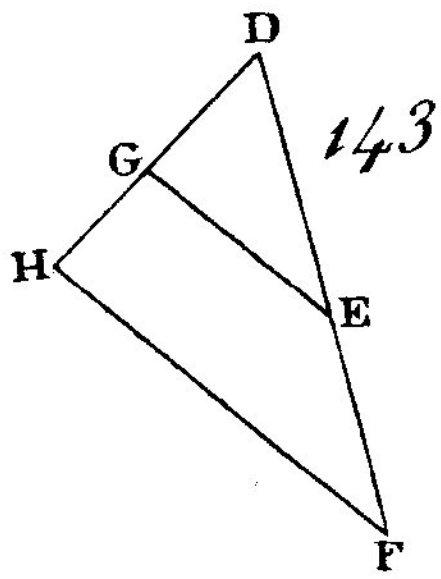
140



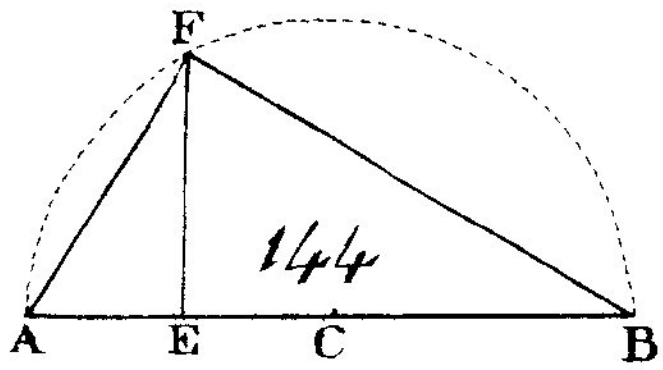
141



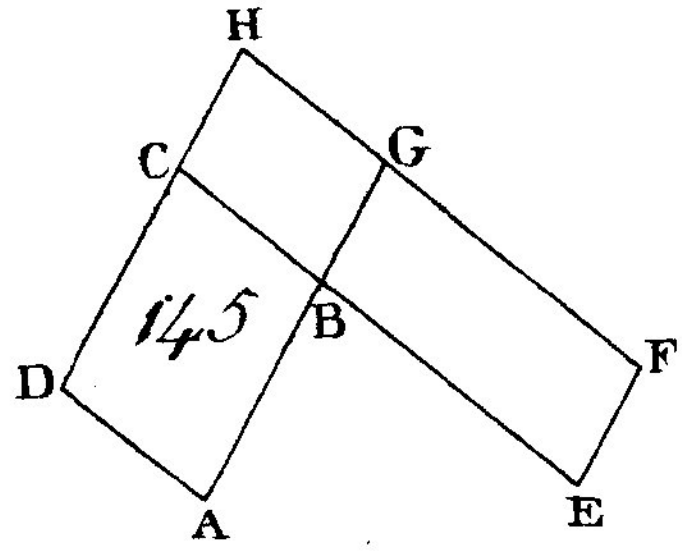
142



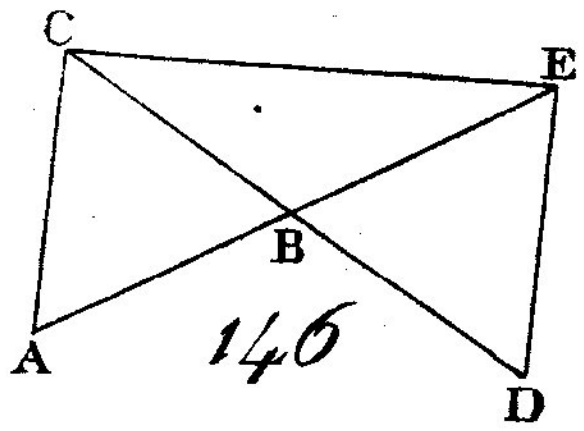
143



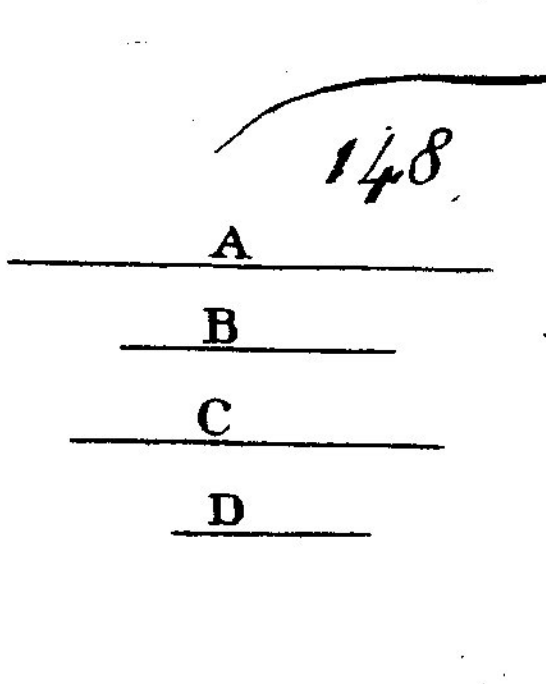
144



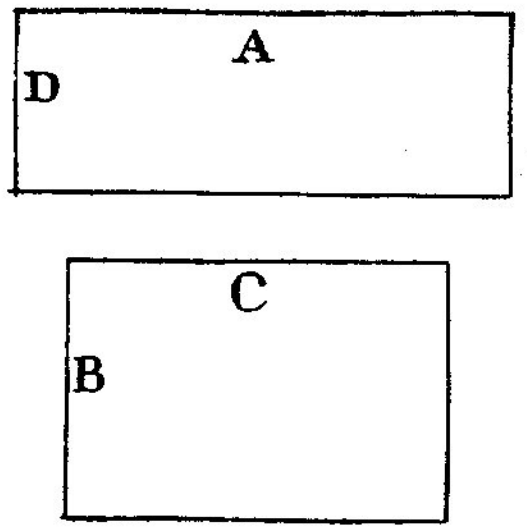
145

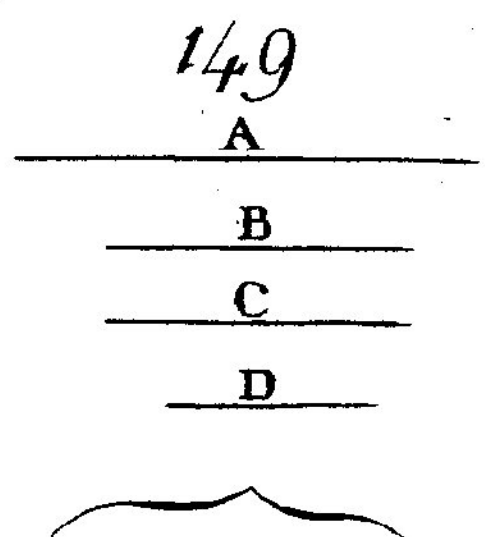


146

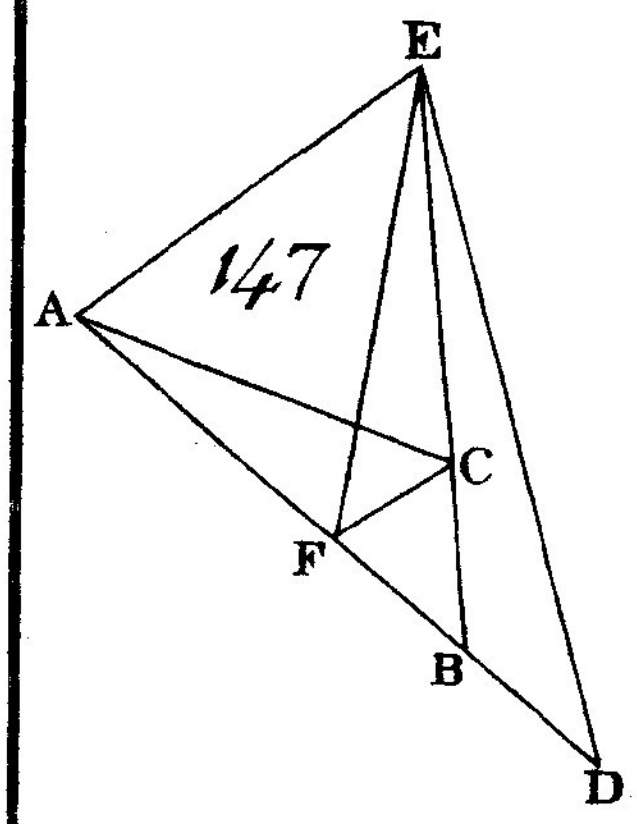


148

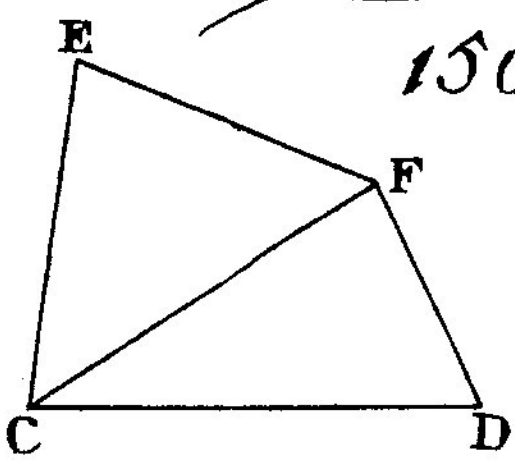




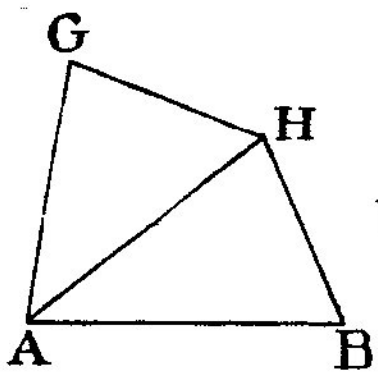
149

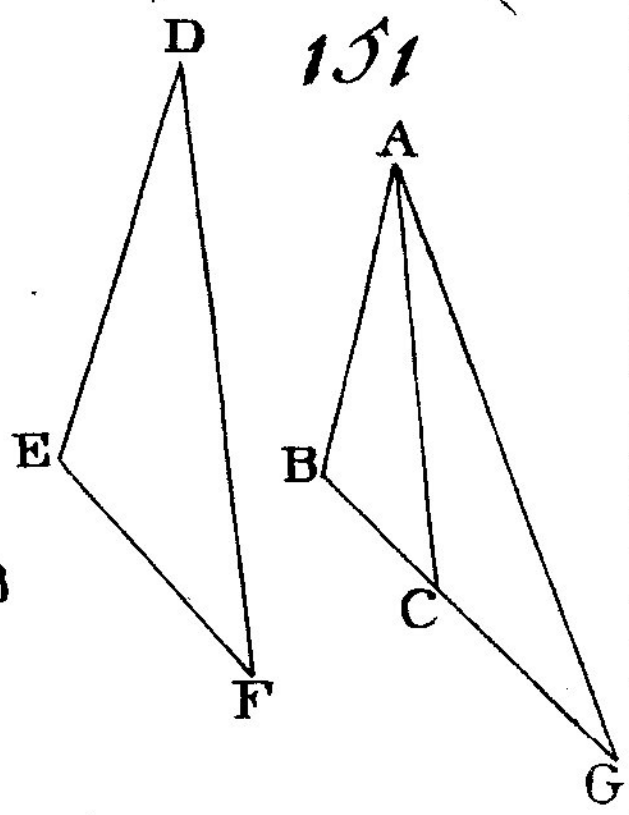


147

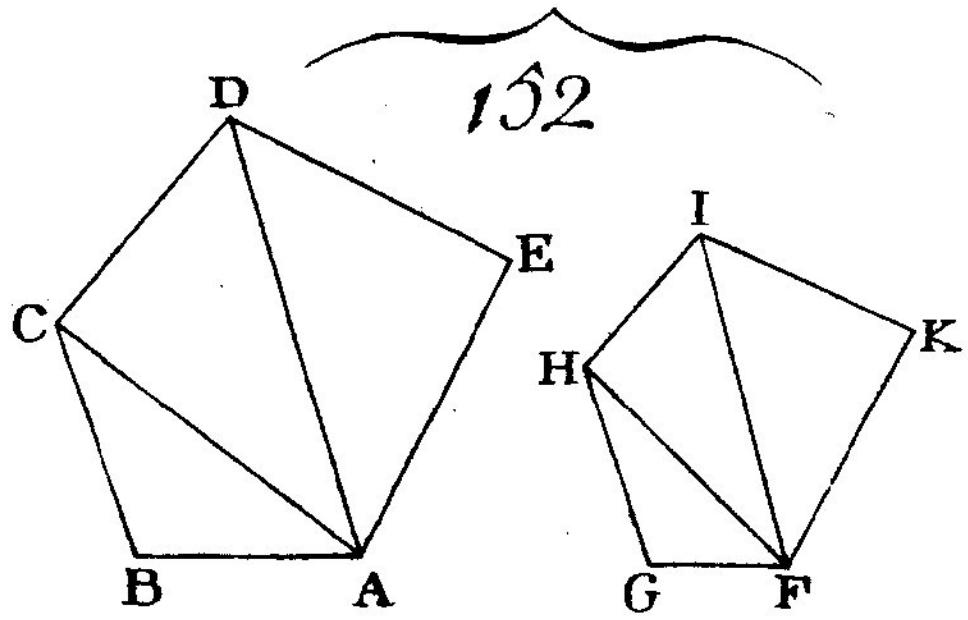


150

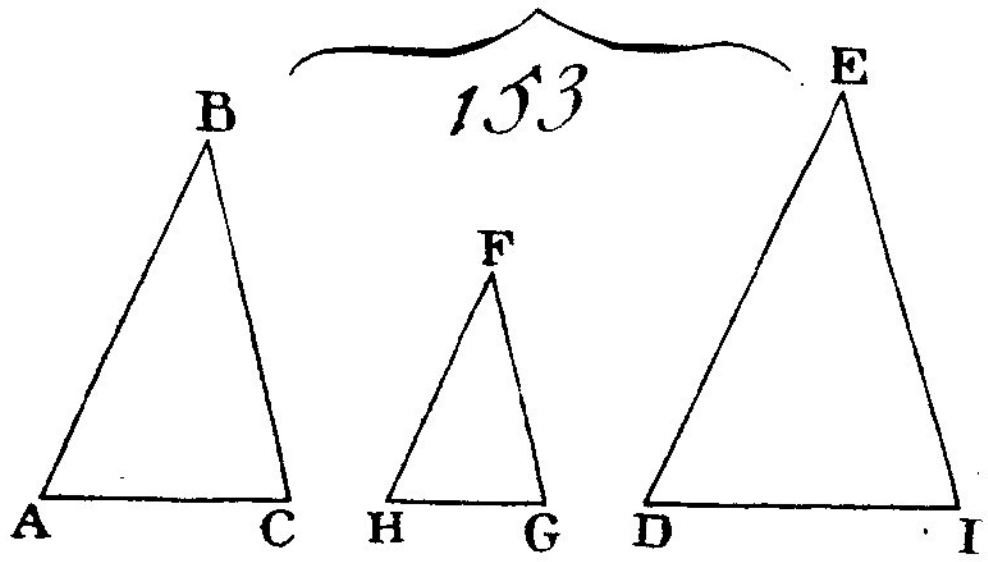




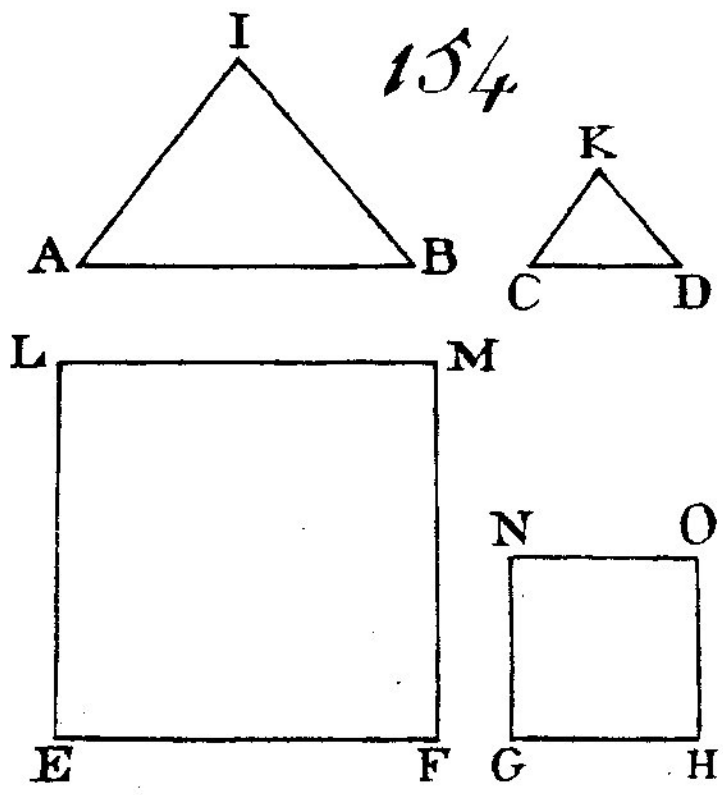
151



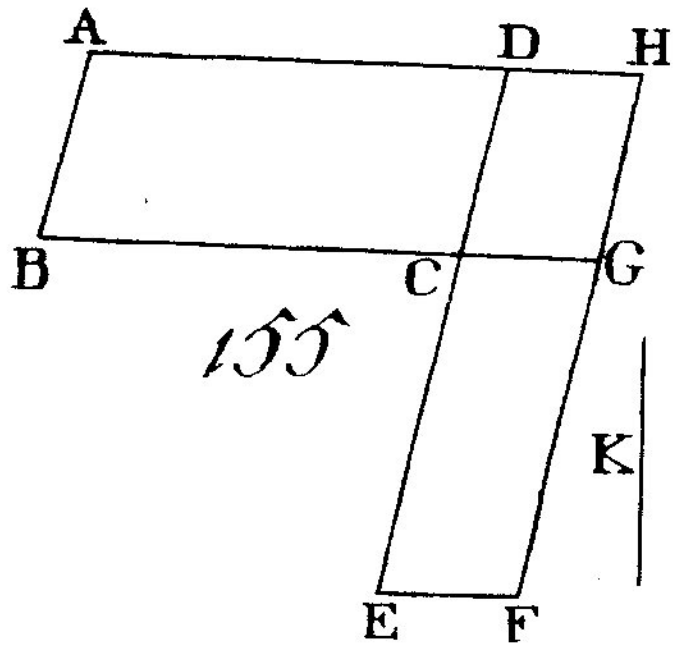
152



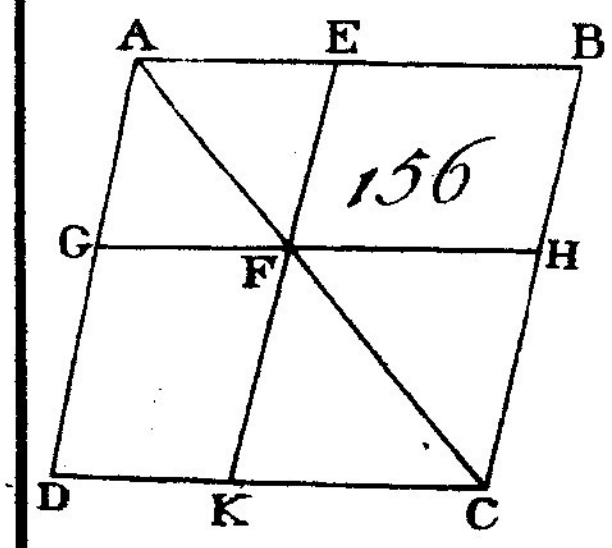
153



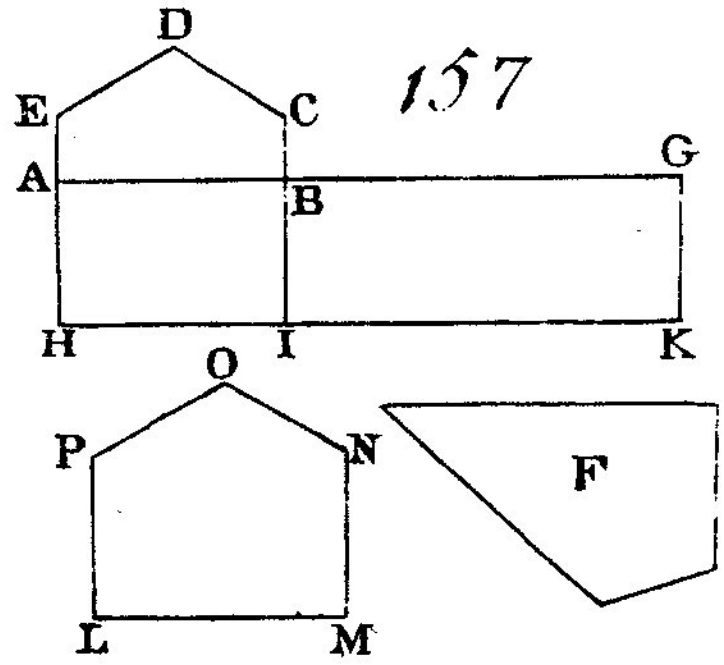
154



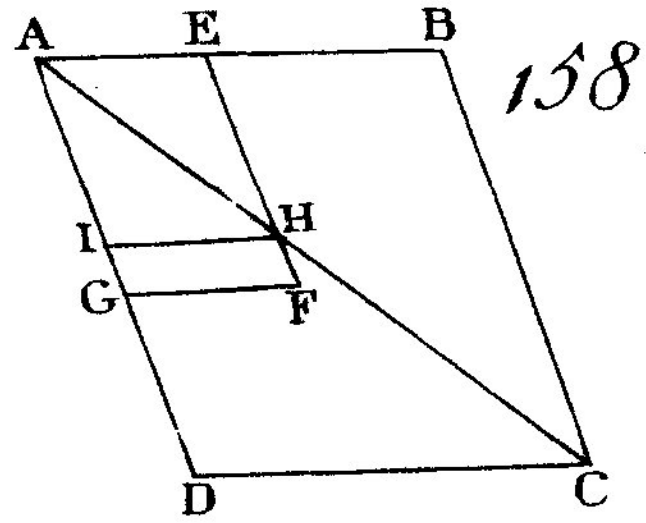
155



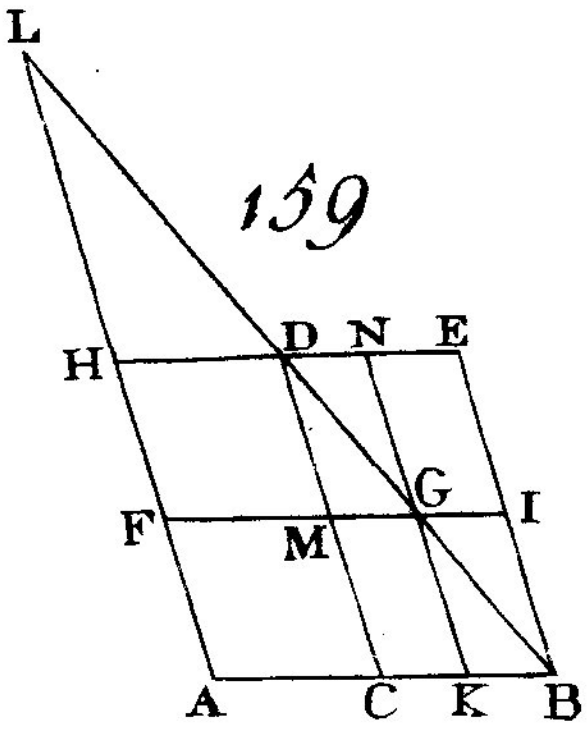
156



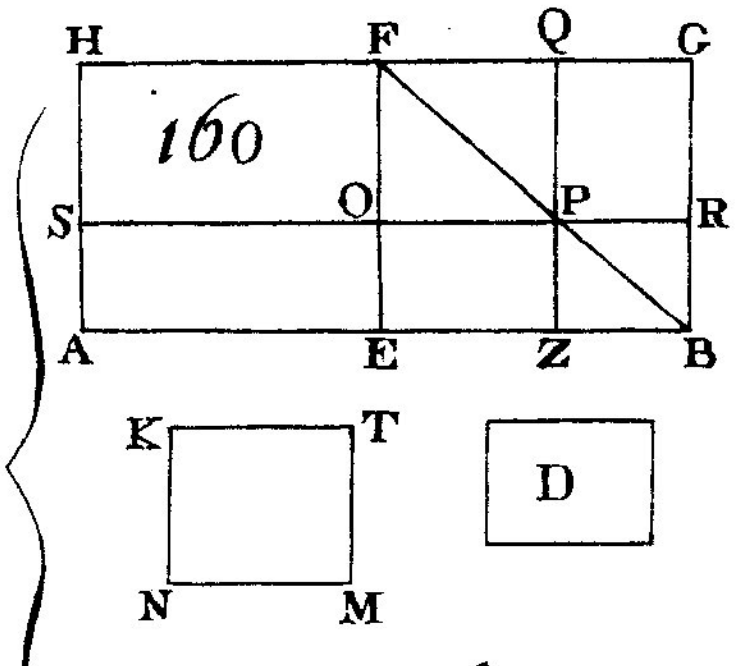
157



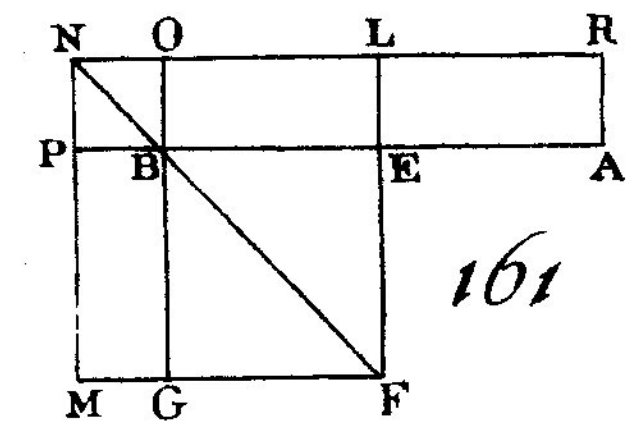
158



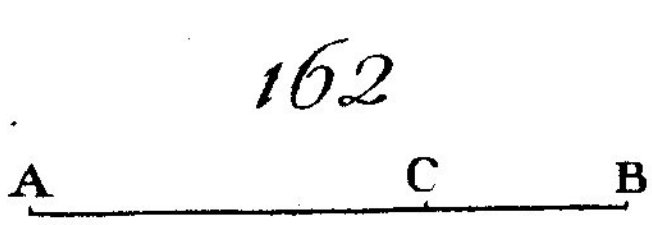
159



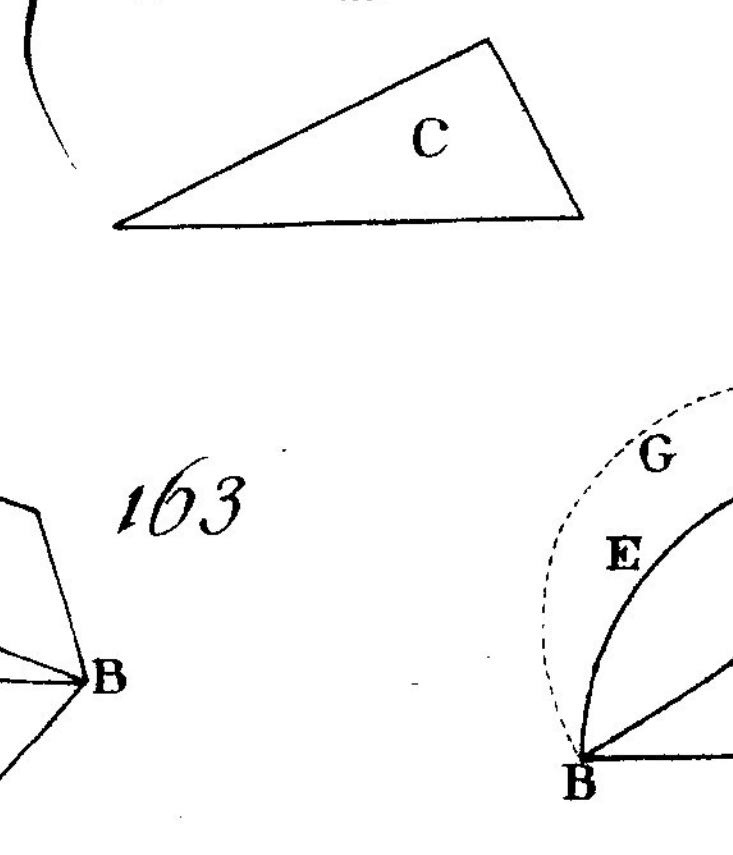
160

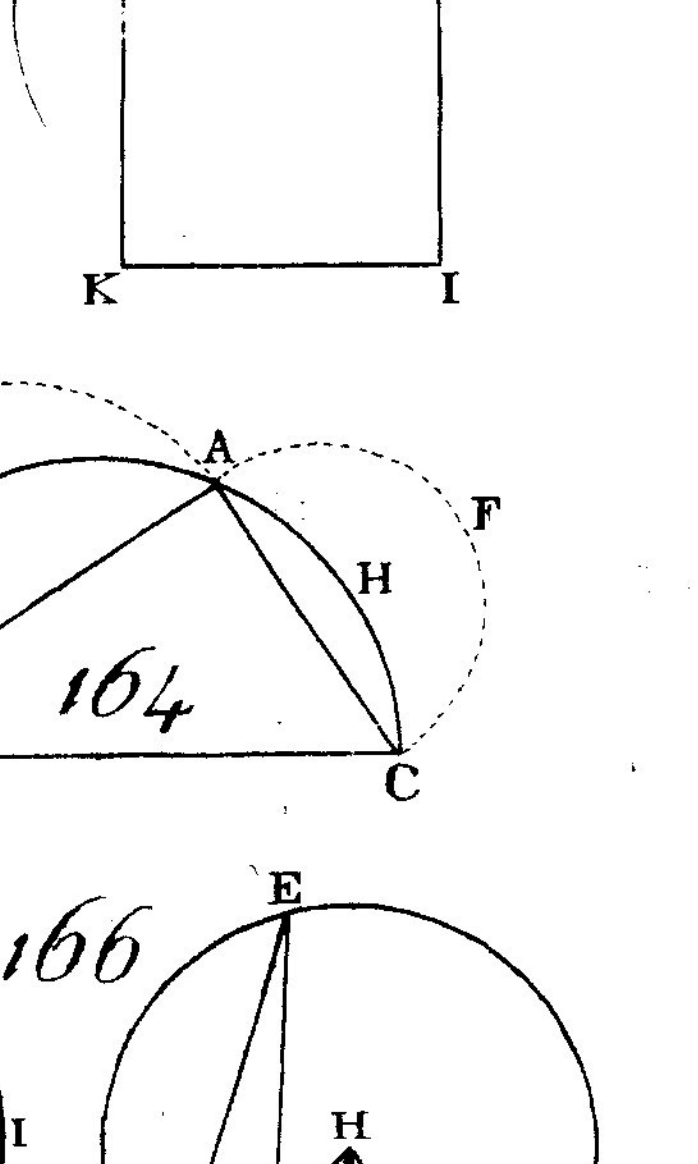


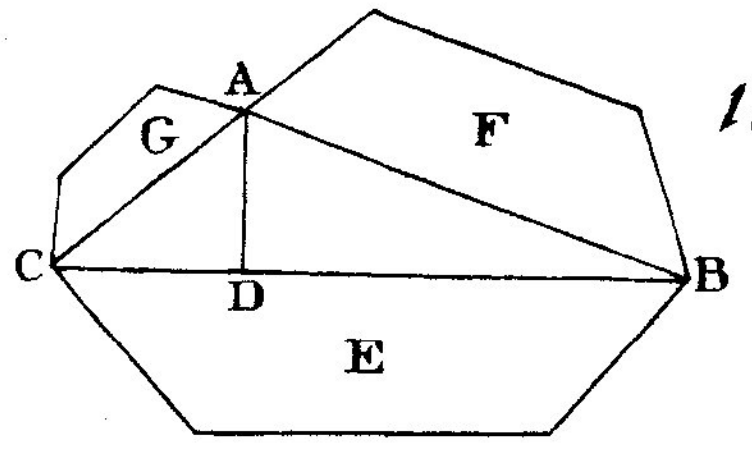
161



162

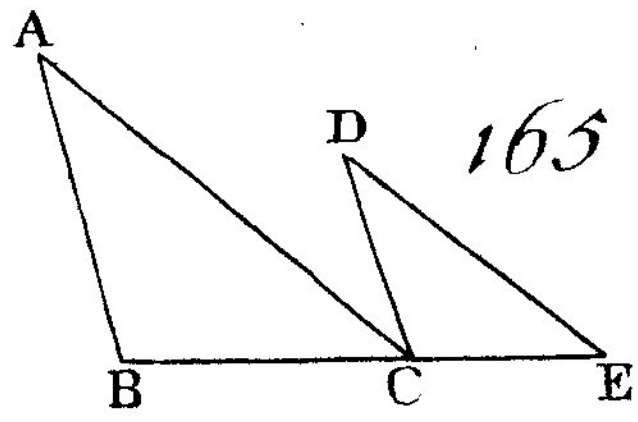




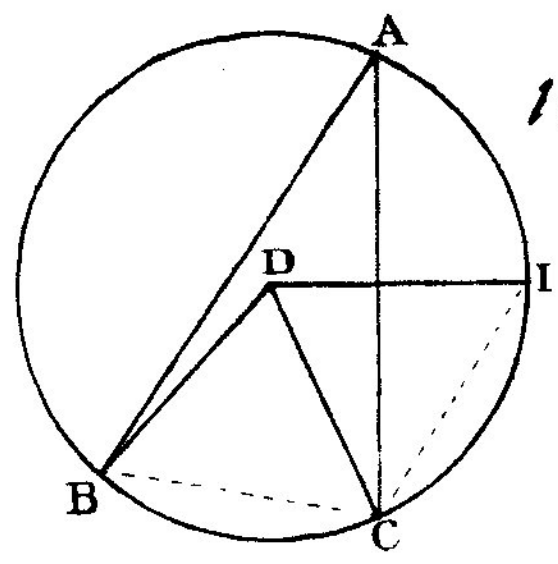


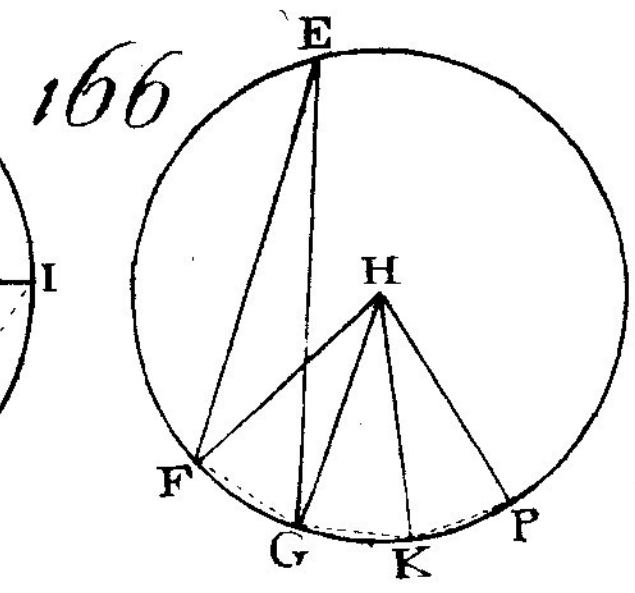
163

164



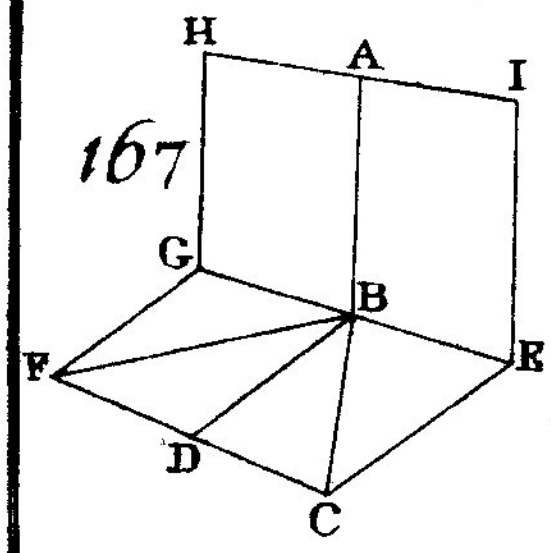
165



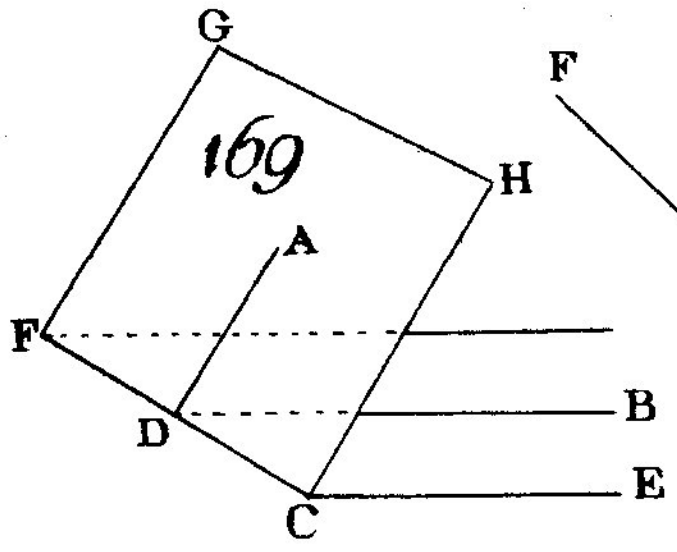


166

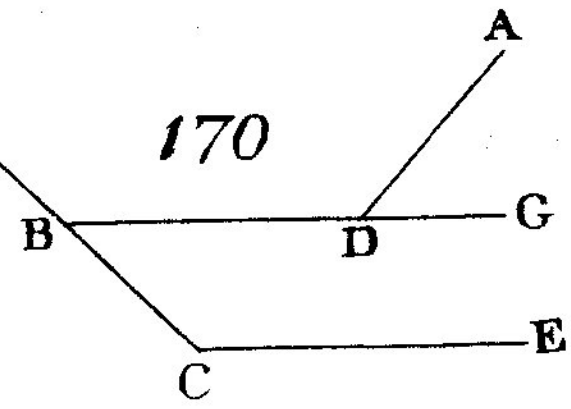
167



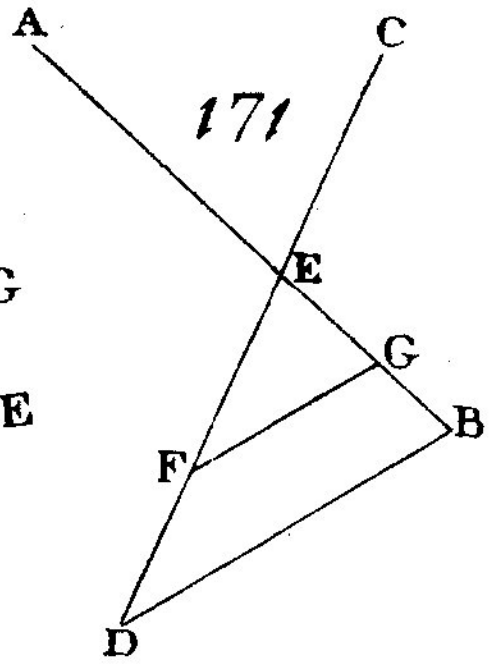
169



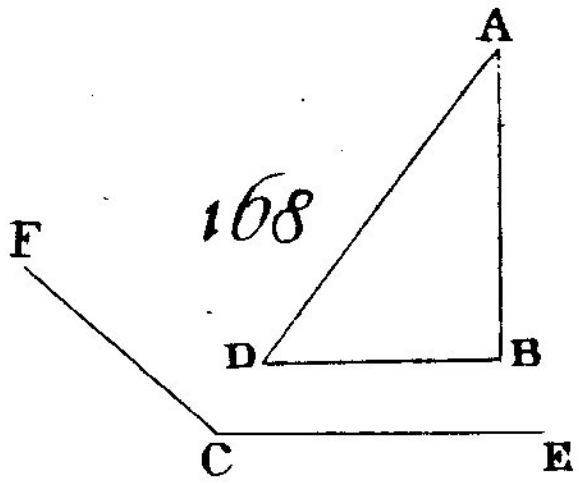
170



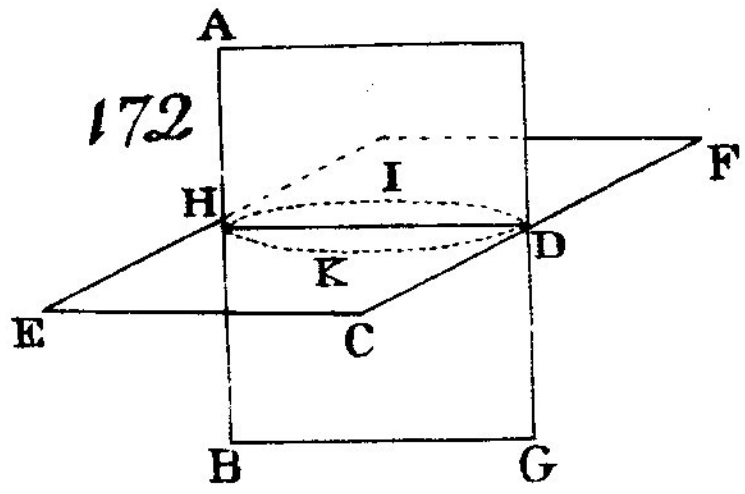
171



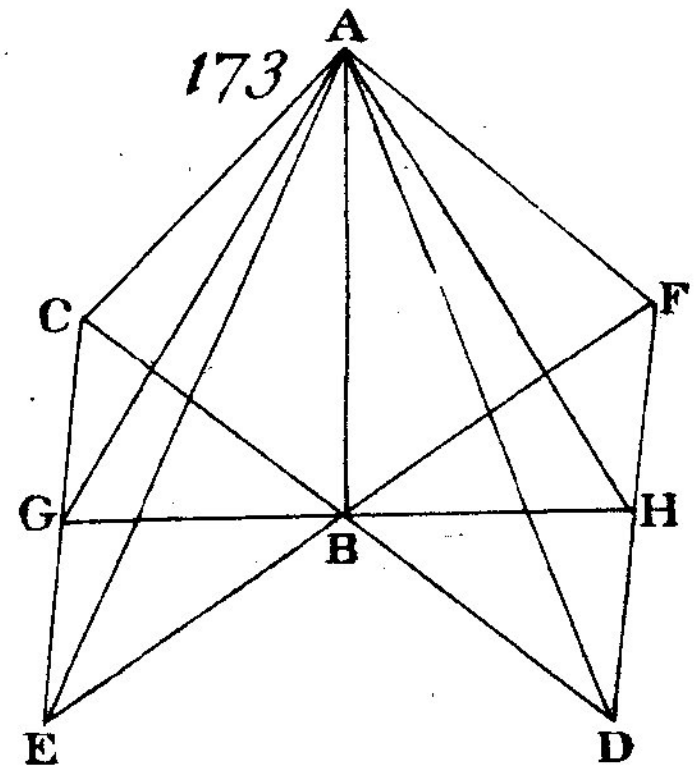
168



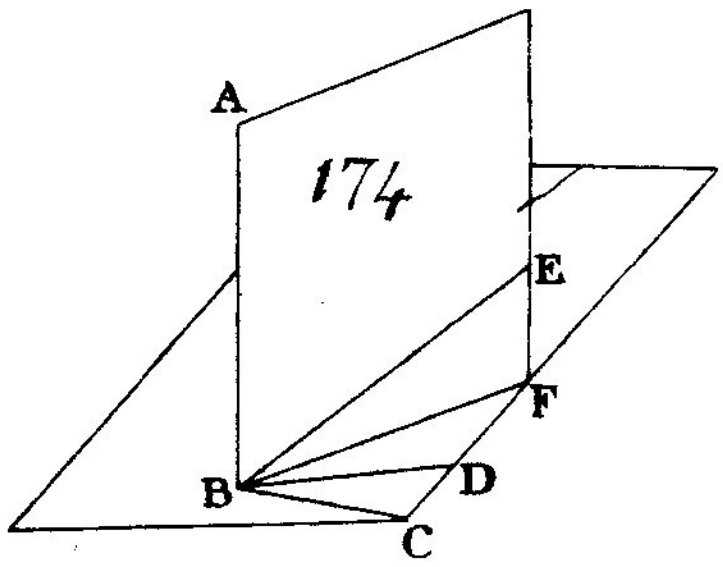
172



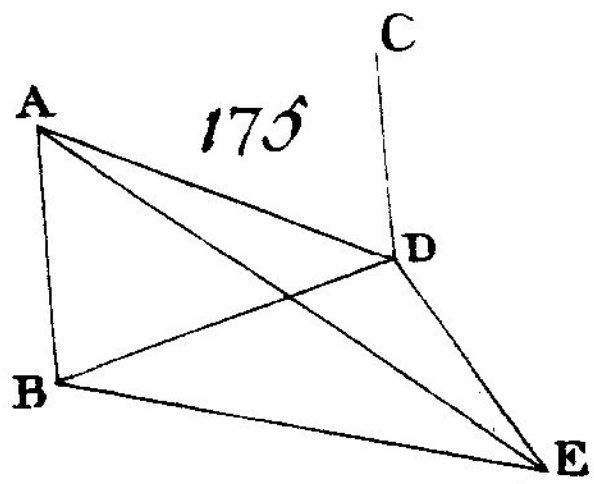
173



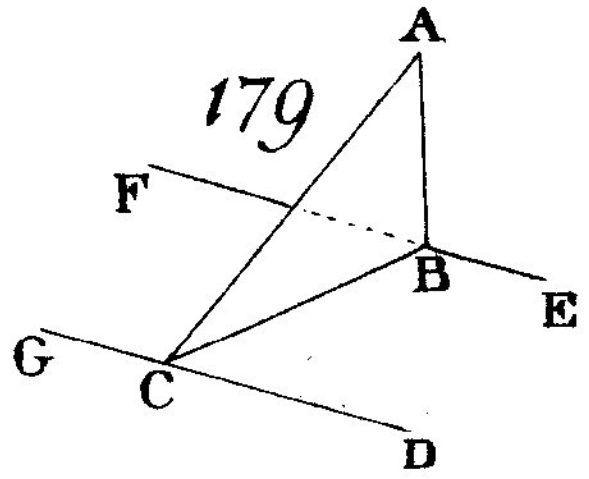
174



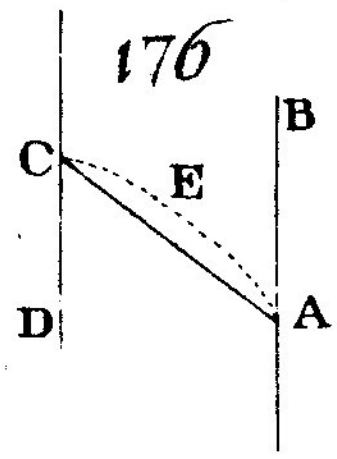
175



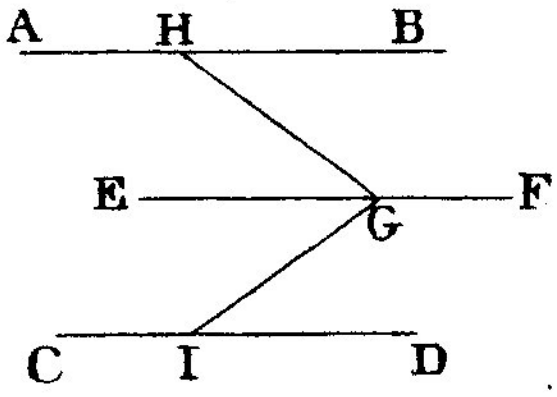
179



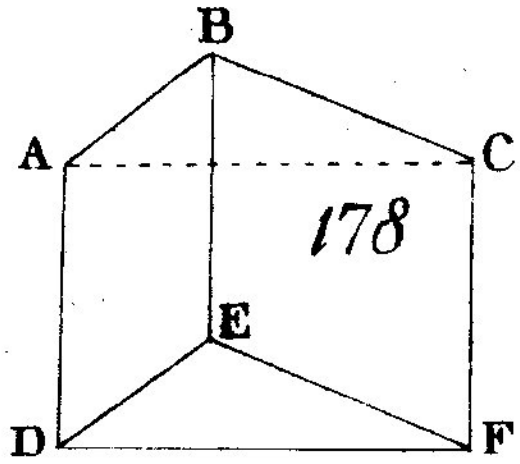
176



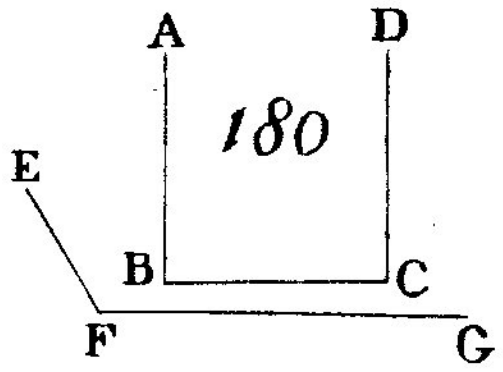
177



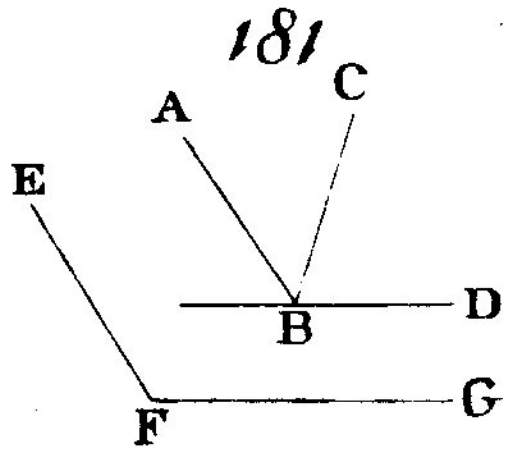
178



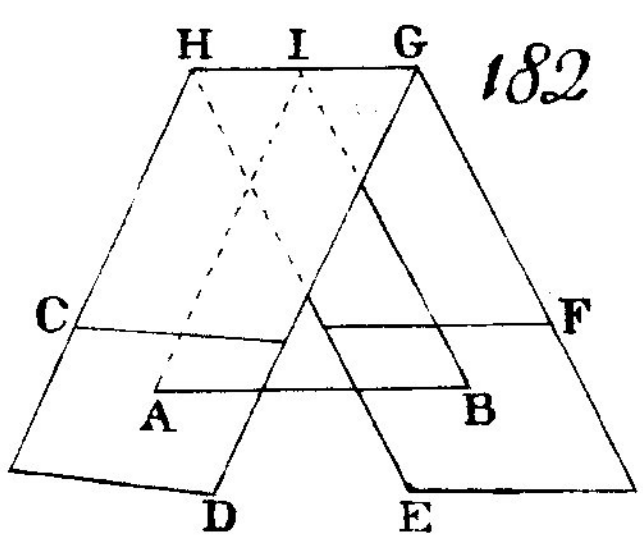
180



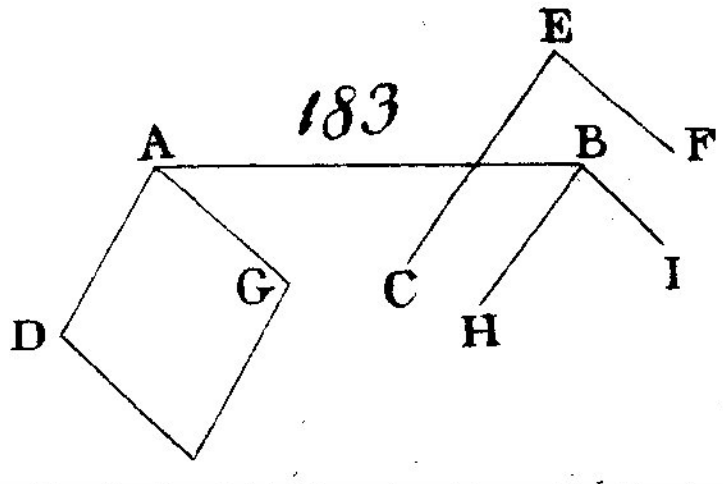
181

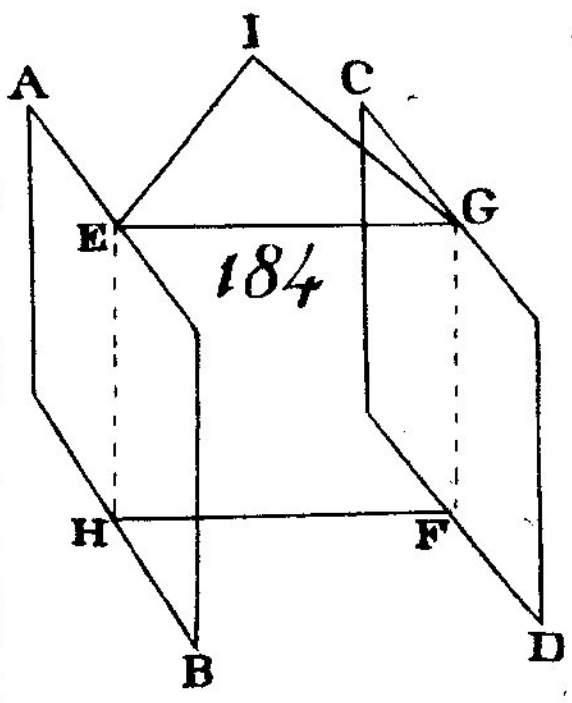


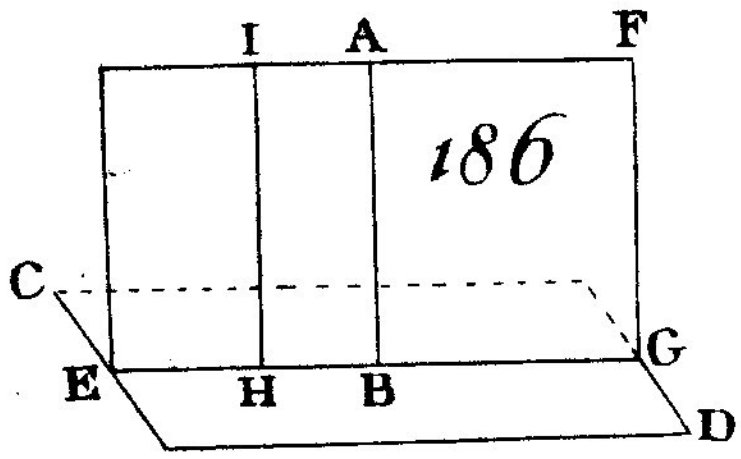
182

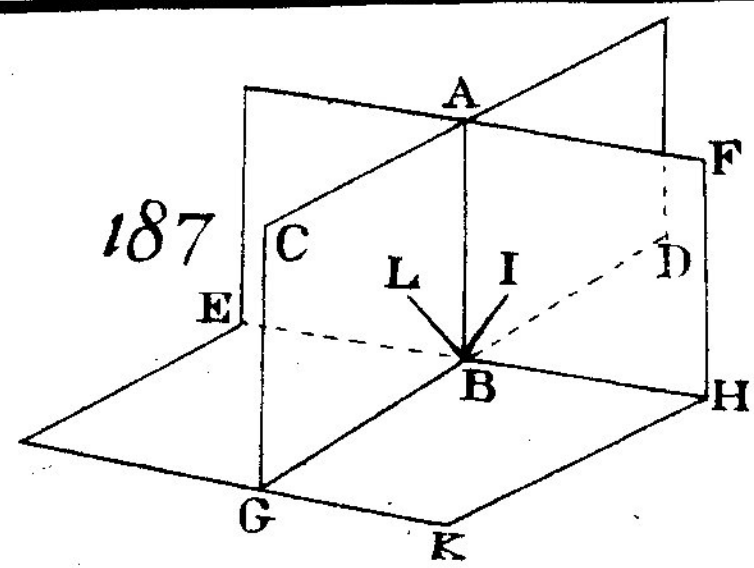


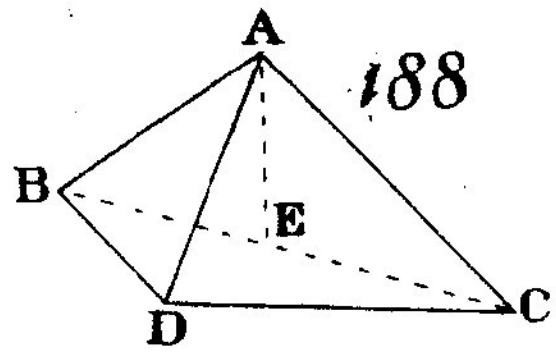
183

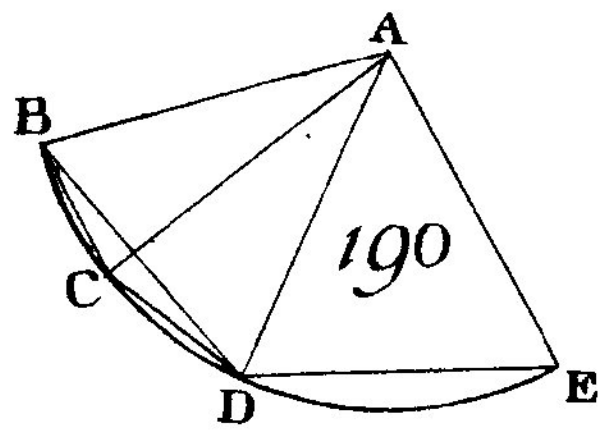


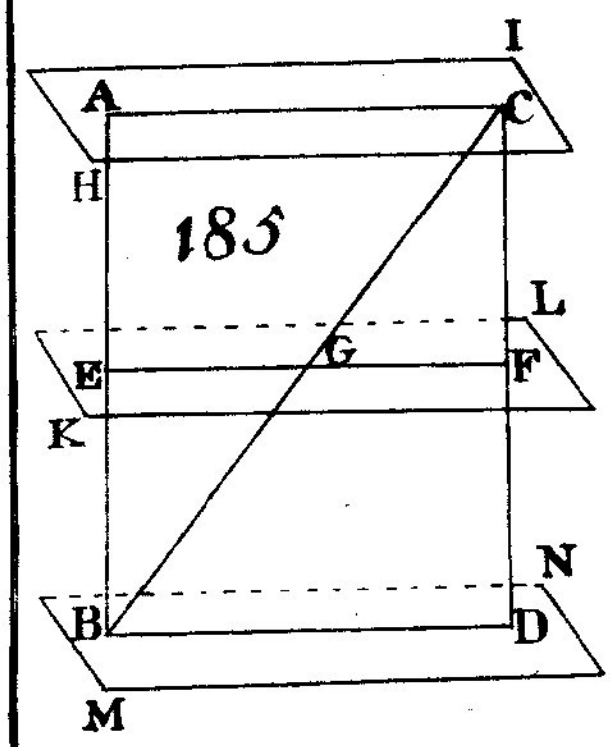

I
A
C
G
E
184
H
F
B
D

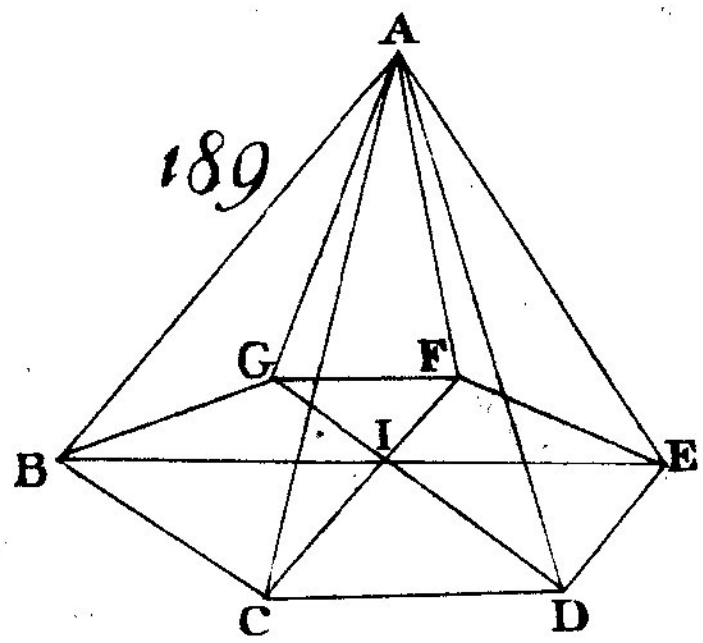

I
A
F
186
C
G
E
H
B
D

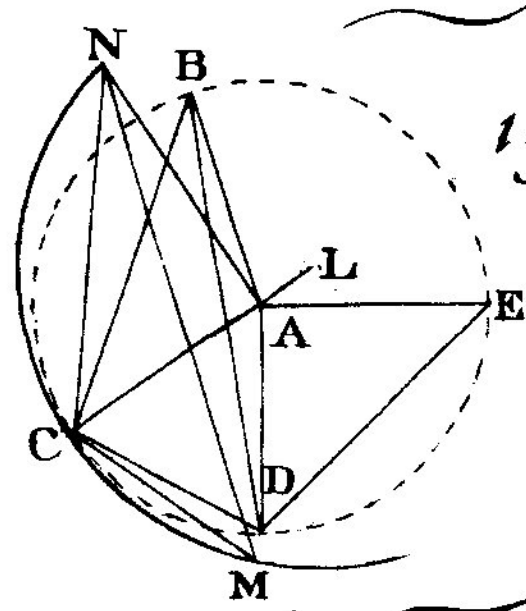

187
A
F
C
L
I
D
E
B
H
G
K

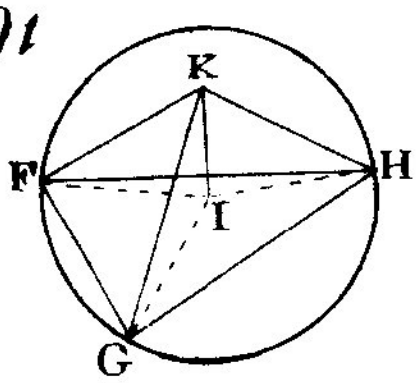

A
188
B
E
D
C

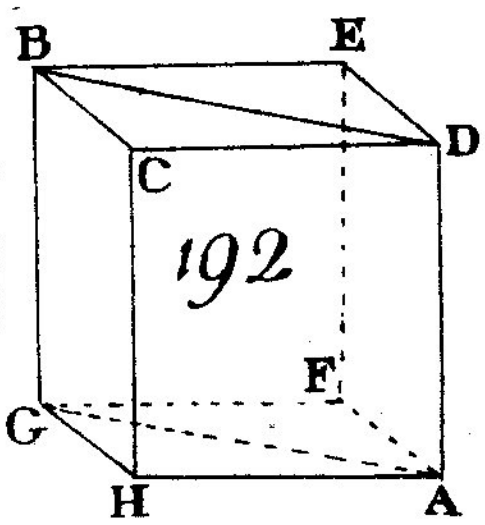

A
B
190
C
D
E

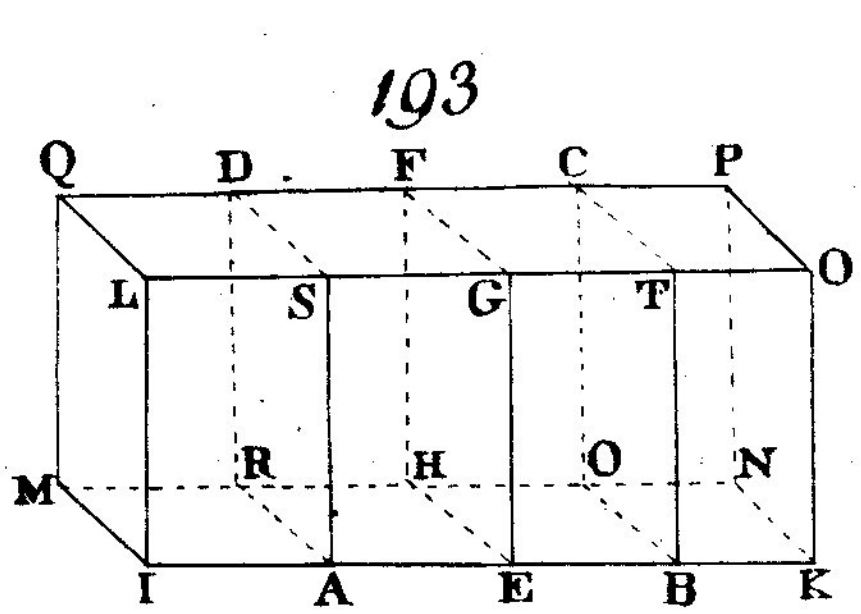

I
A
C
H
185
L
G
E
F
K
N
B
D
M

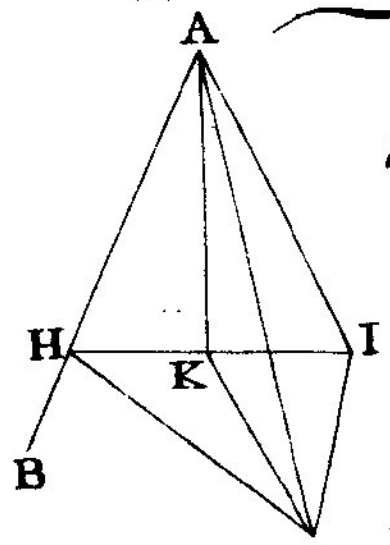

189
A
G
F
I
B
E
C
D

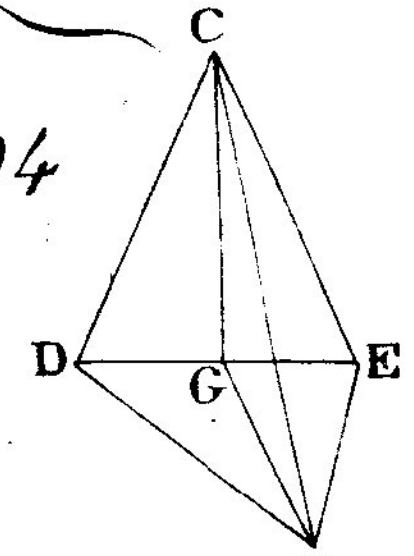

N
B
L
A
E
C
D
M

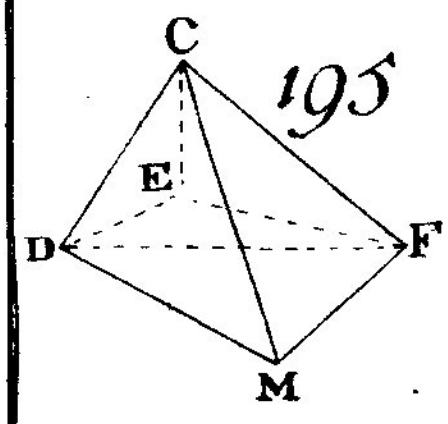

191
K
F
H
I
G

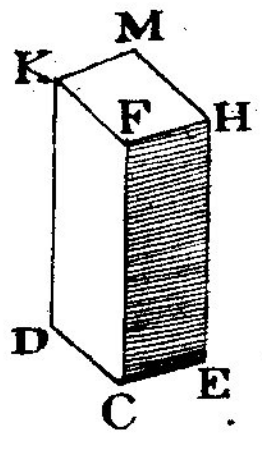

B
E
D
C
192
F
G
H
A

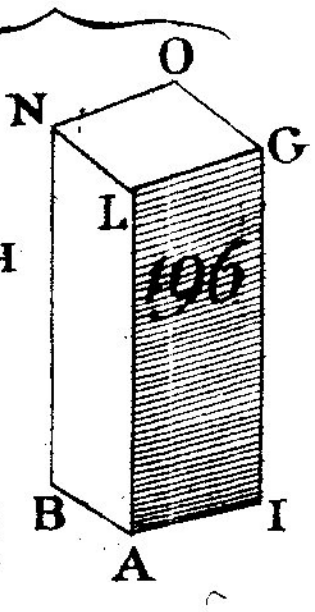

193
Q
D
F
C
P
O
L
S
G
T
M
R
H
O
N
I
A
E
B
K

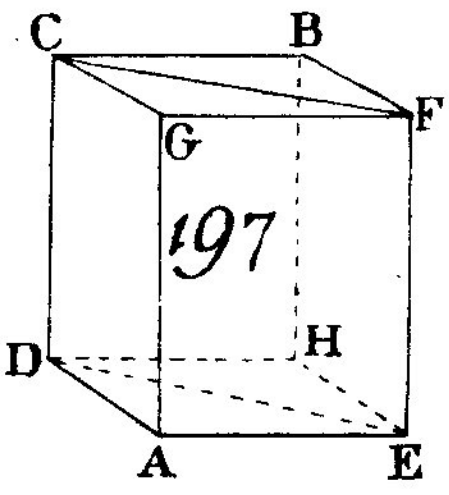

A
194
H
K
I
B
L

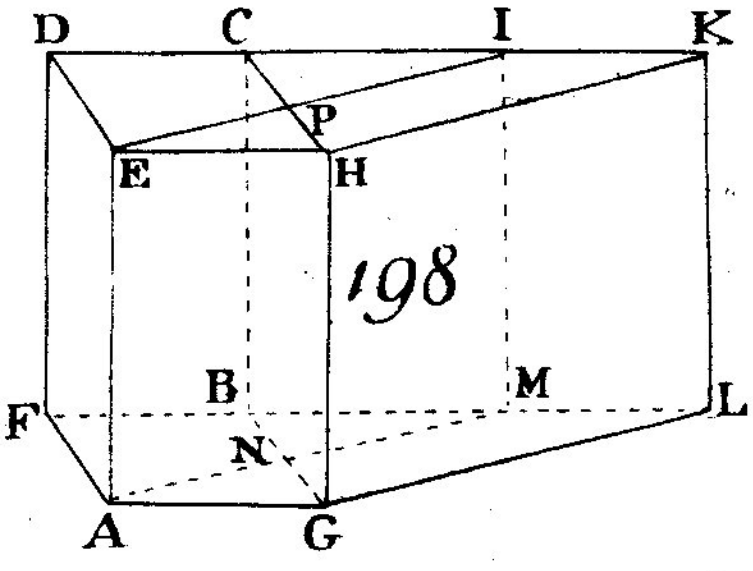

C
D
E
G
F


C
195
E
D
F
M

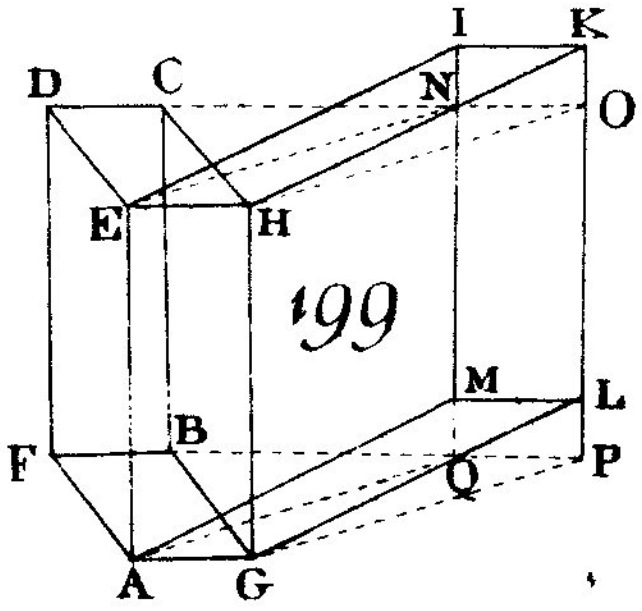

M
K
F
H
D
C
E


O
N
G
L
196
B
A
I

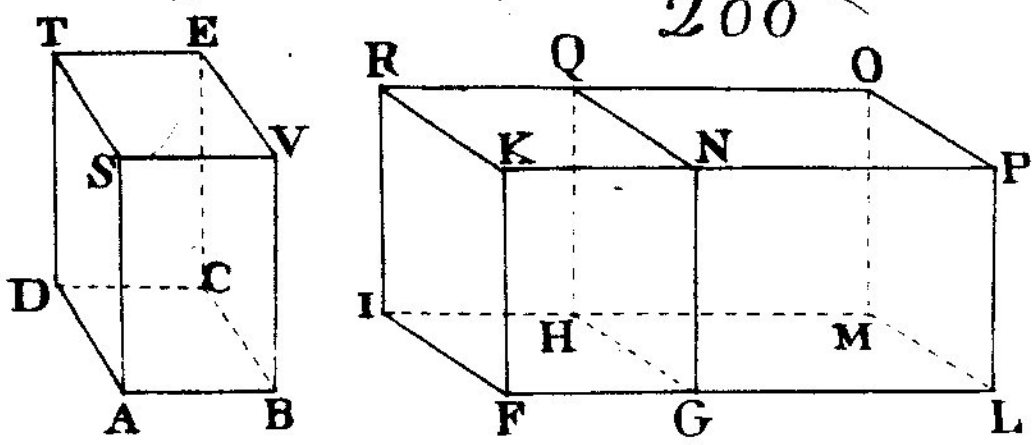

C
B
F
G
197
D
H
A
E


D
C
I
K
P
E
H
198
B
M
F
L
N
A
G

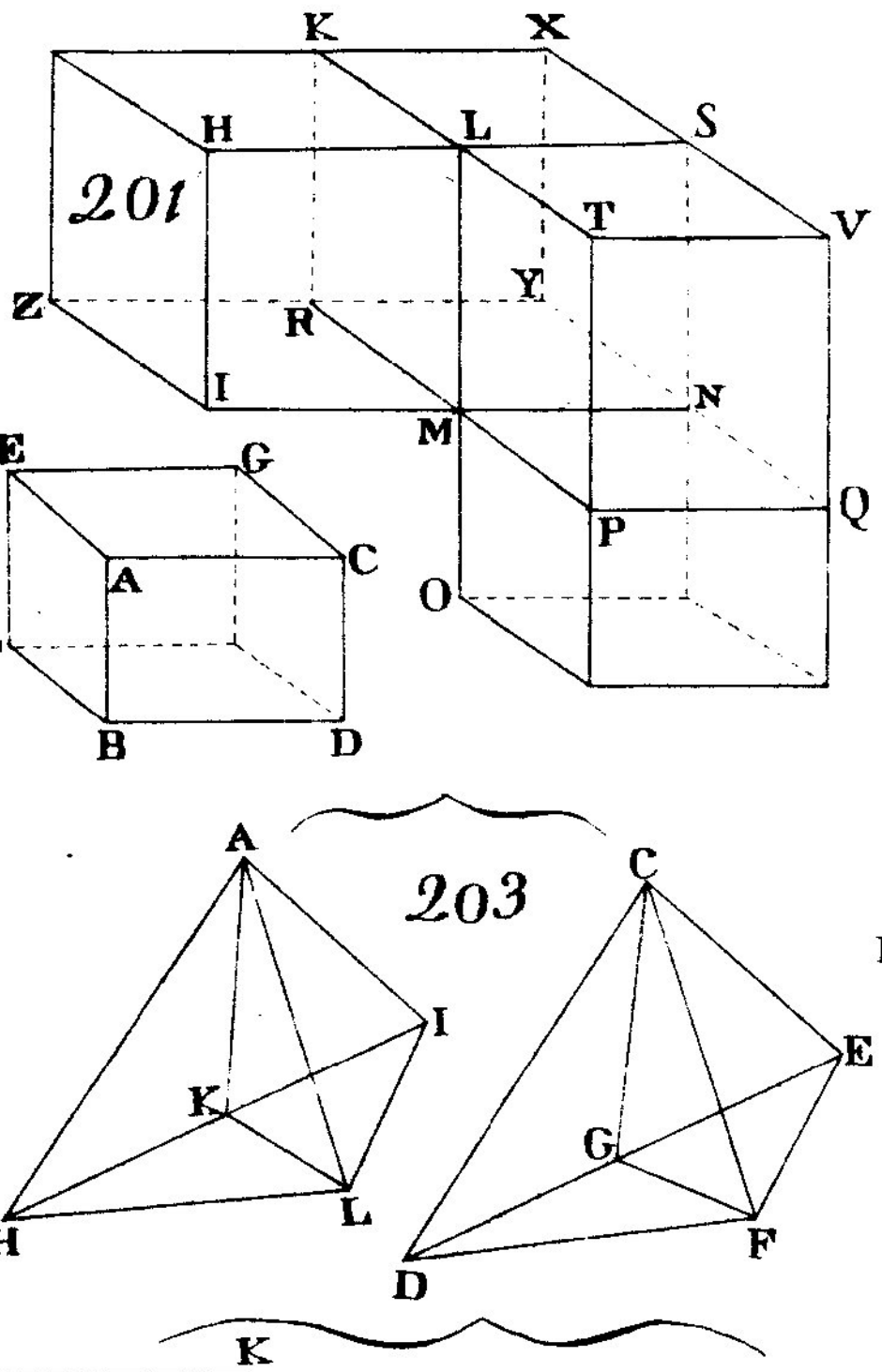
199



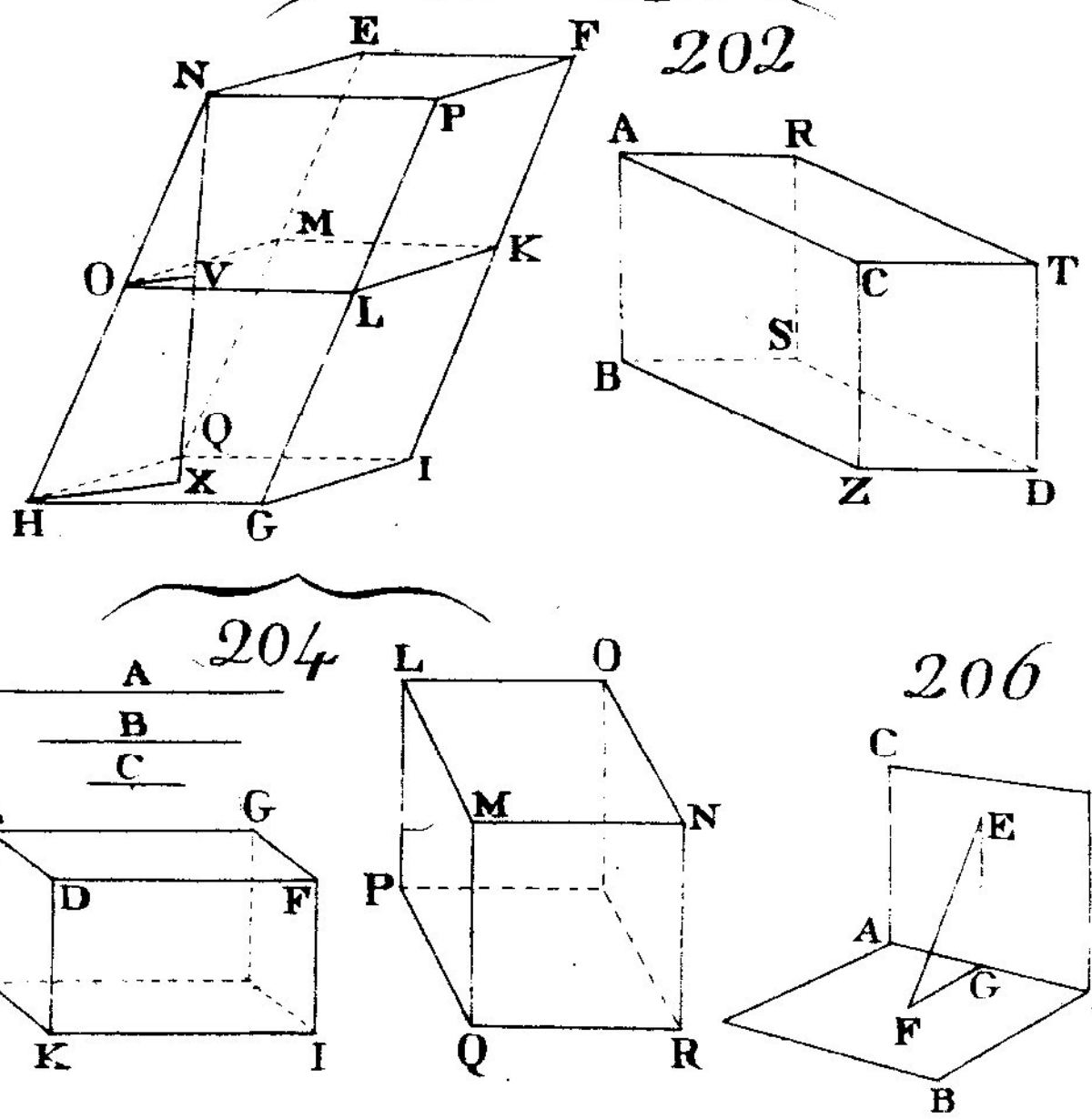
200



201



202

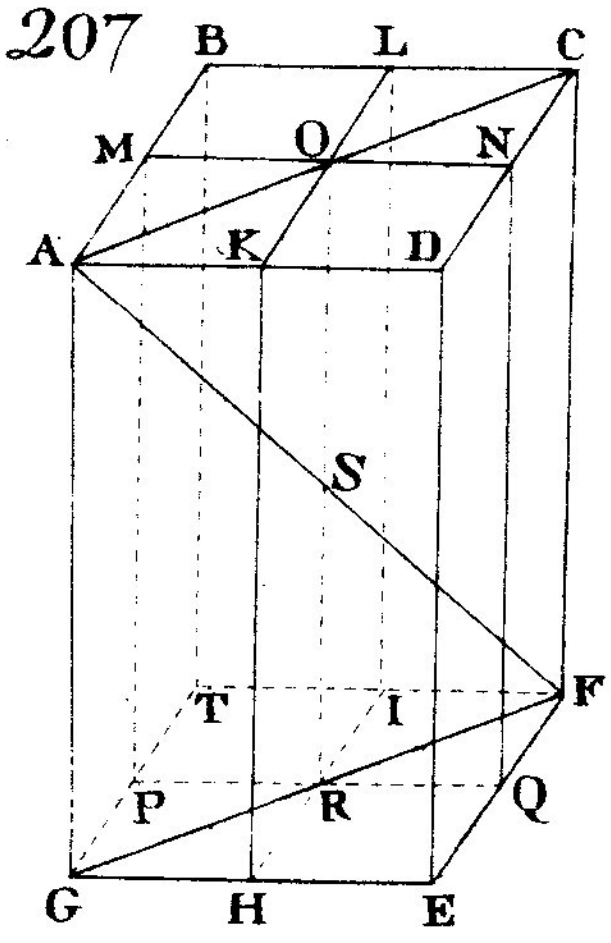


204

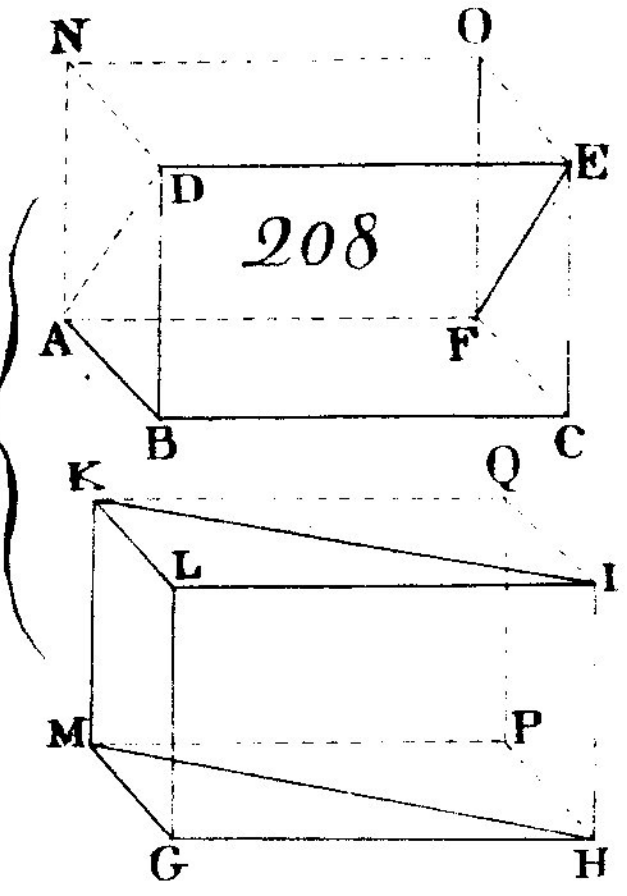
206

203

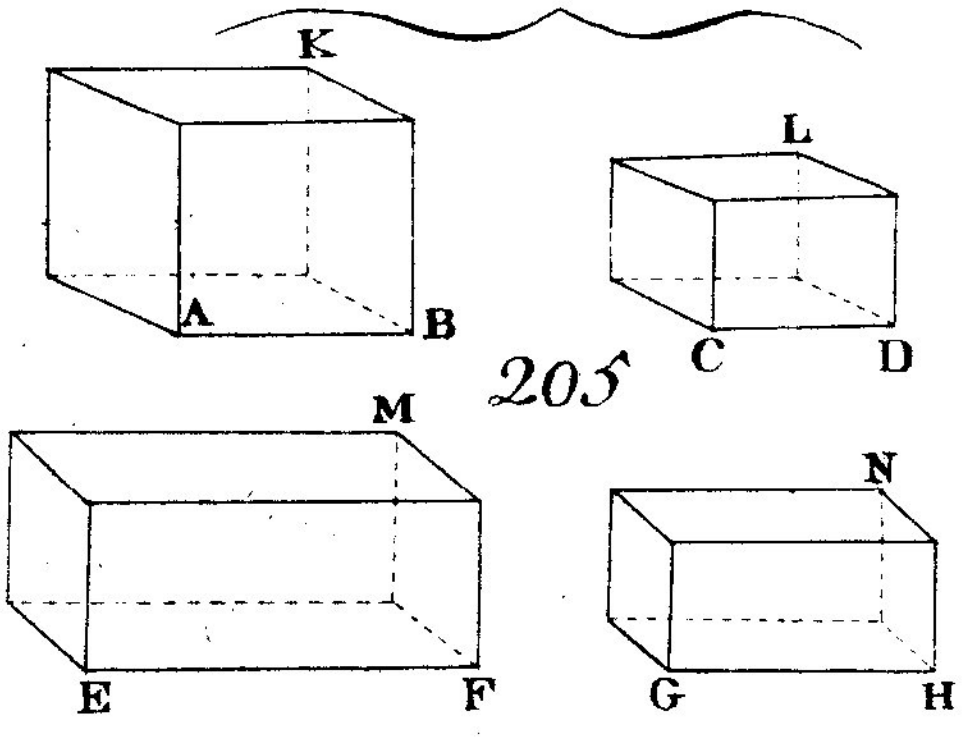
207



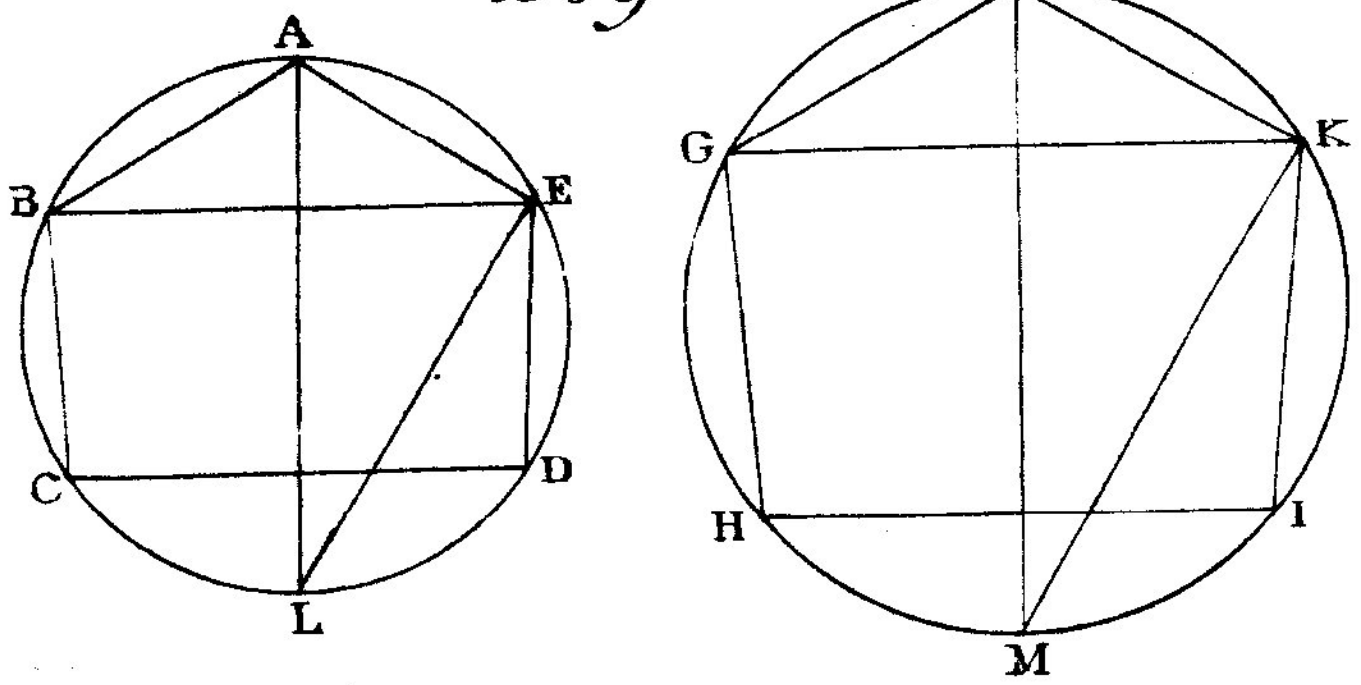
208



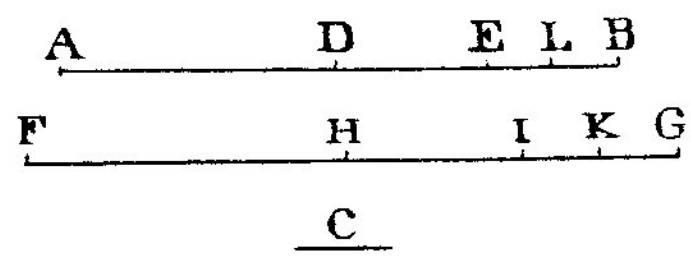
205



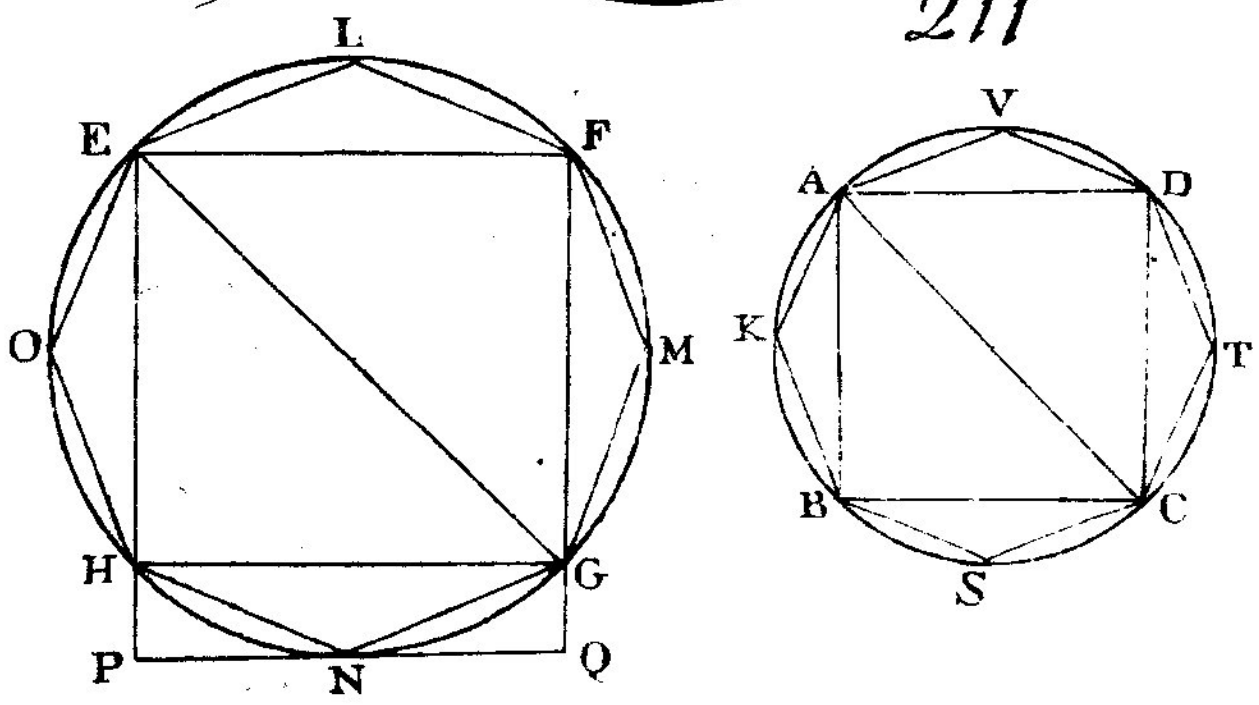
209



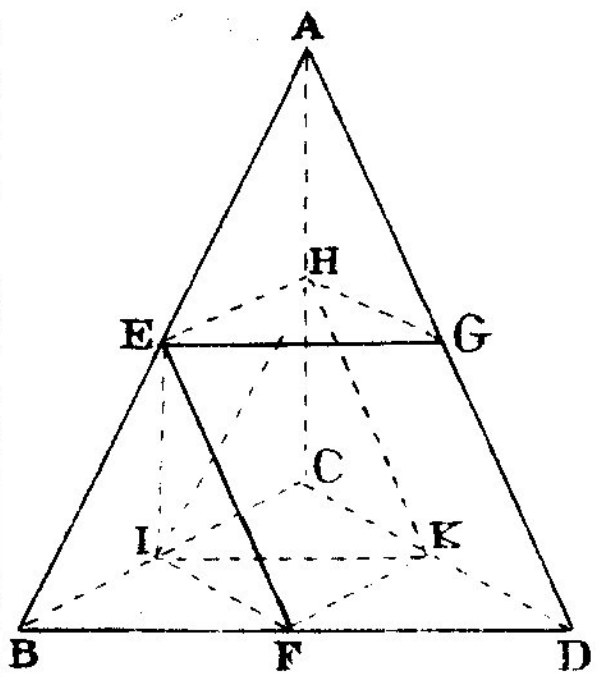
210



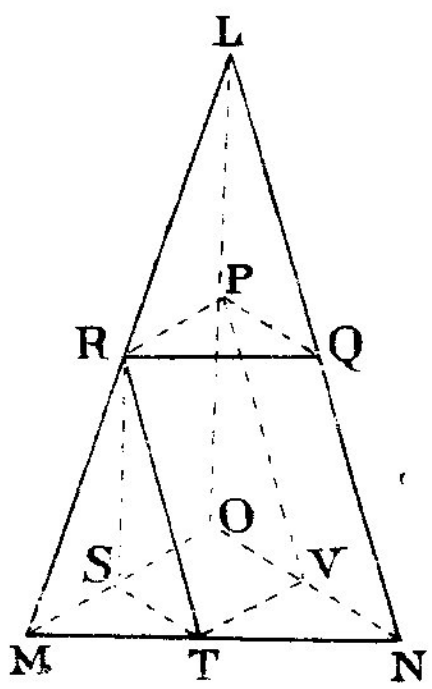
211



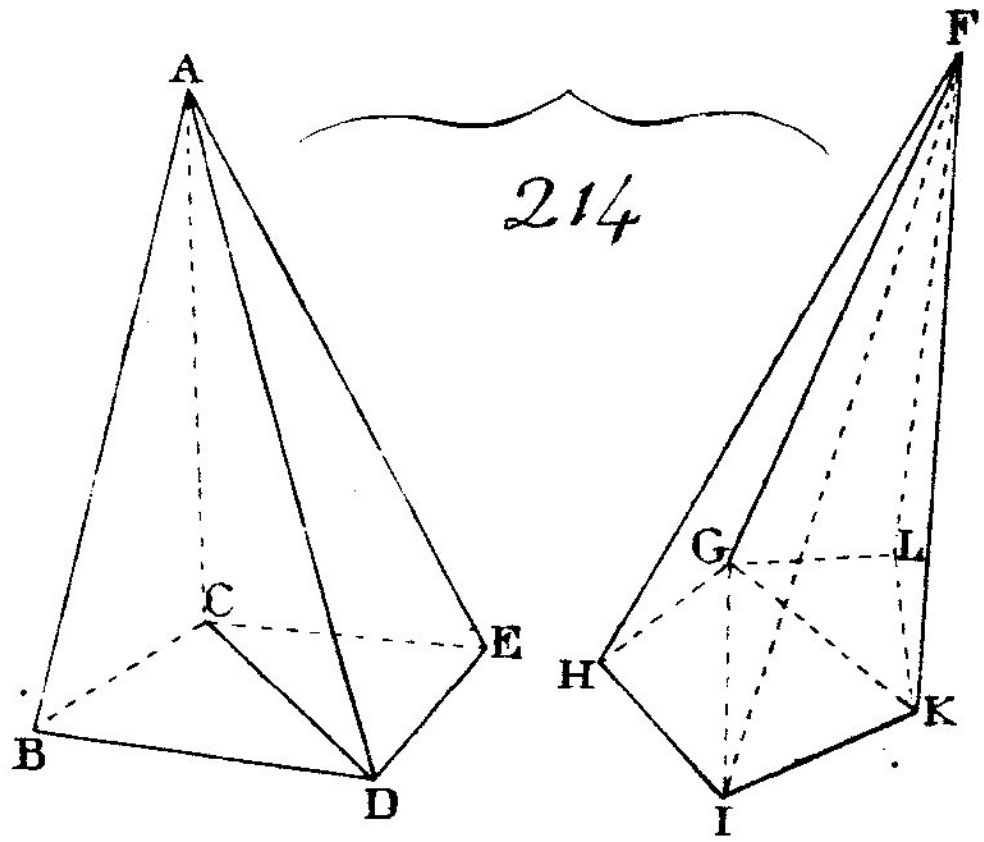
212



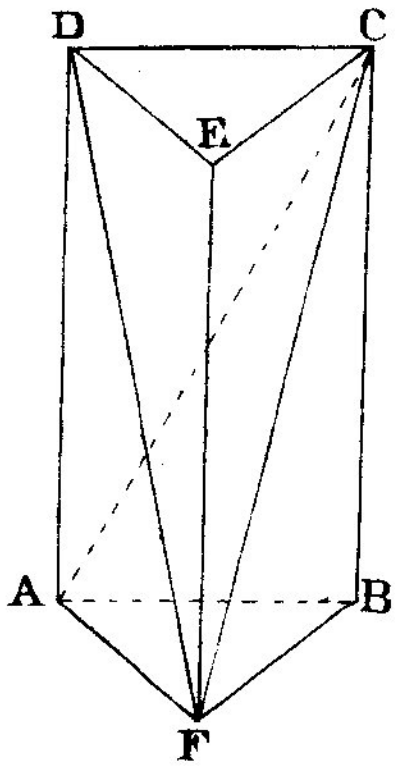
213

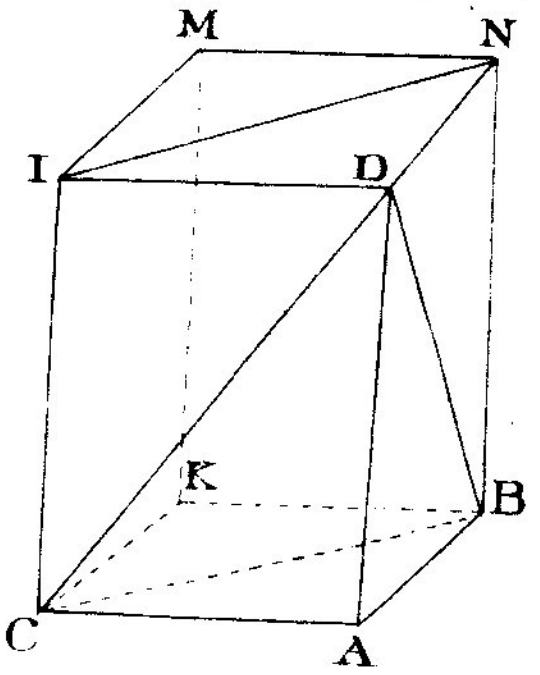


214

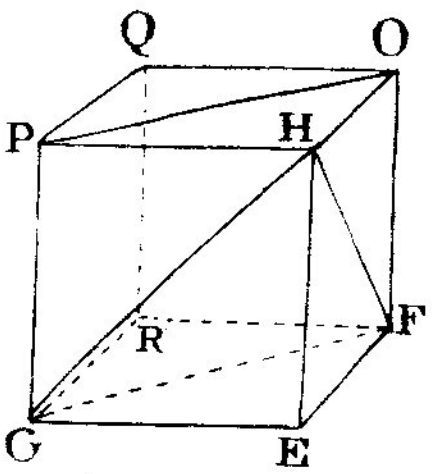


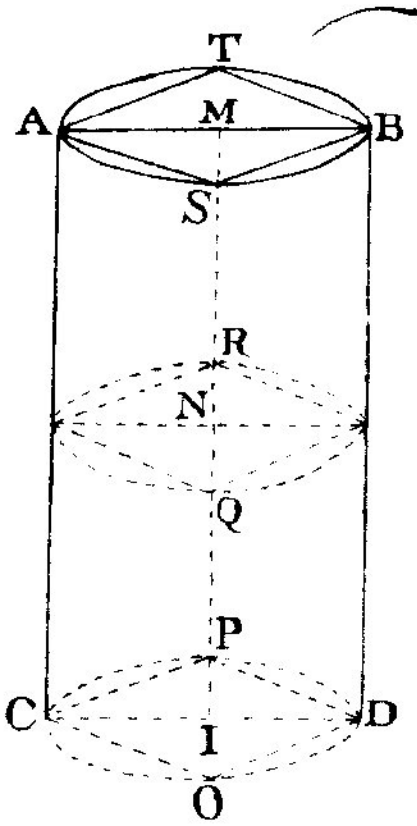
215



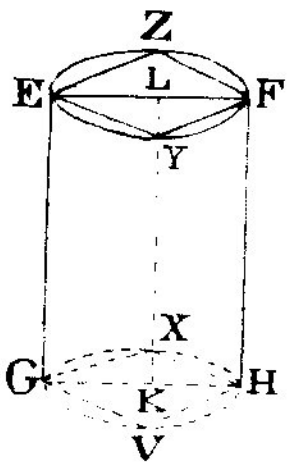


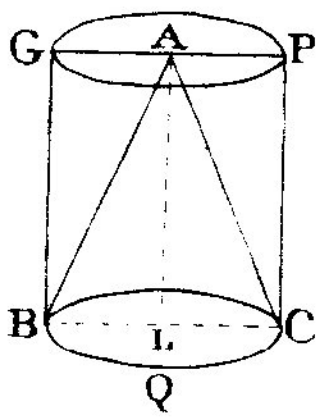
216



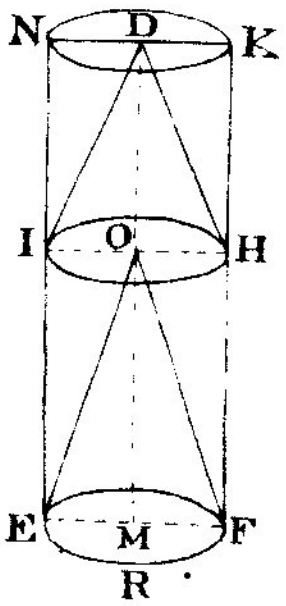


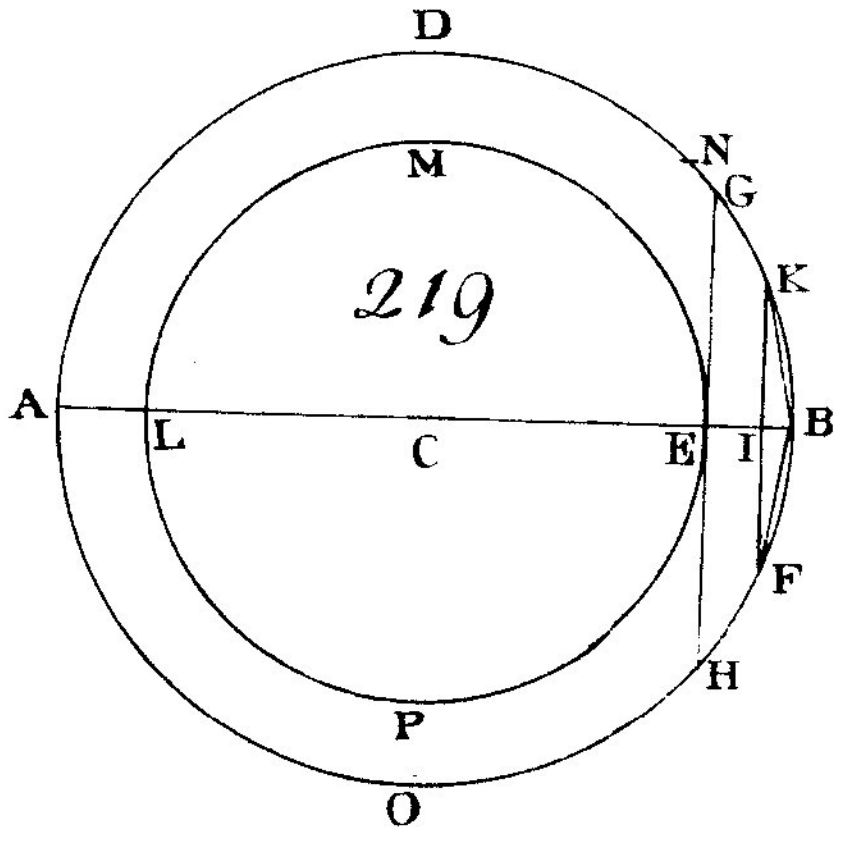
217





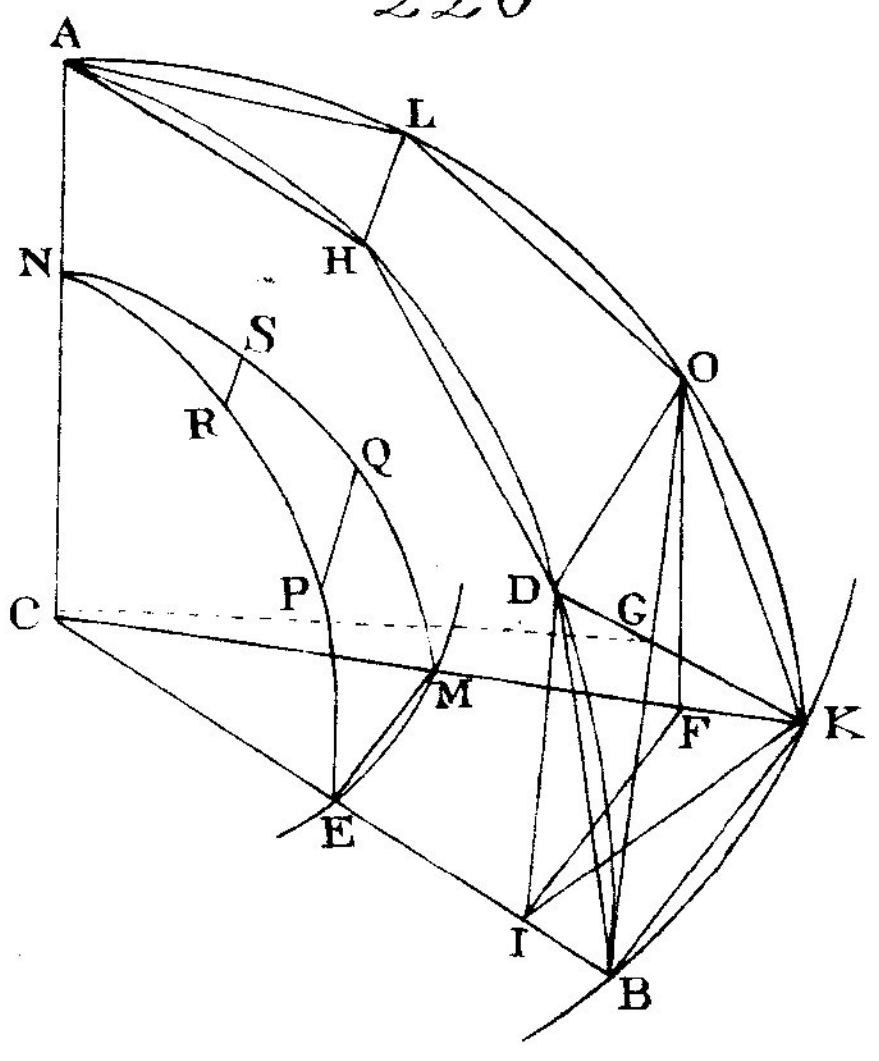
218



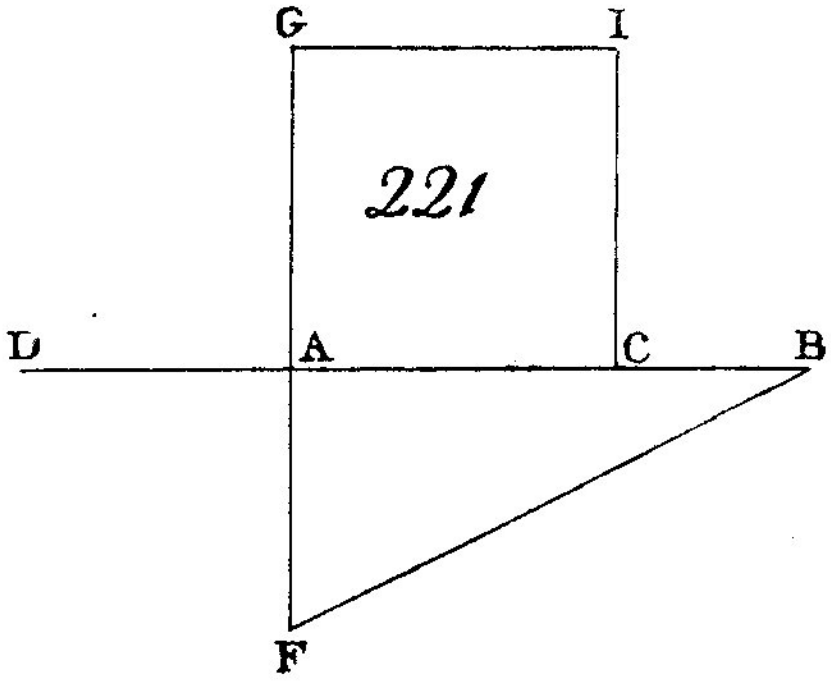


219

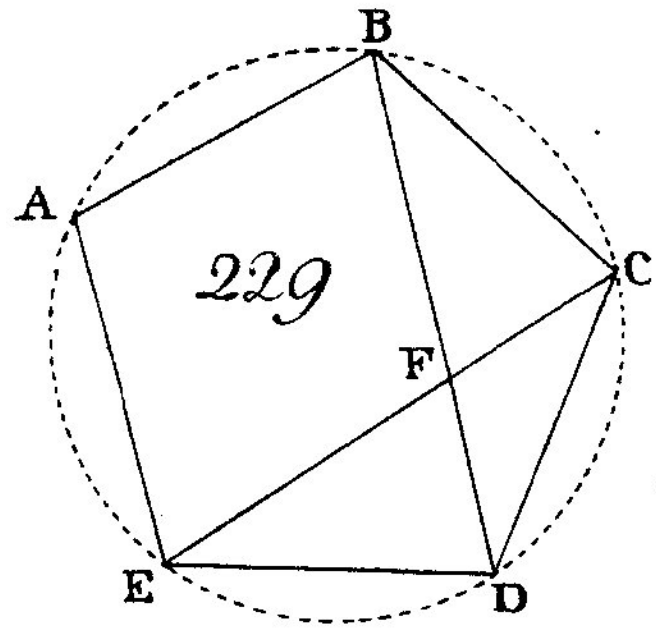
220



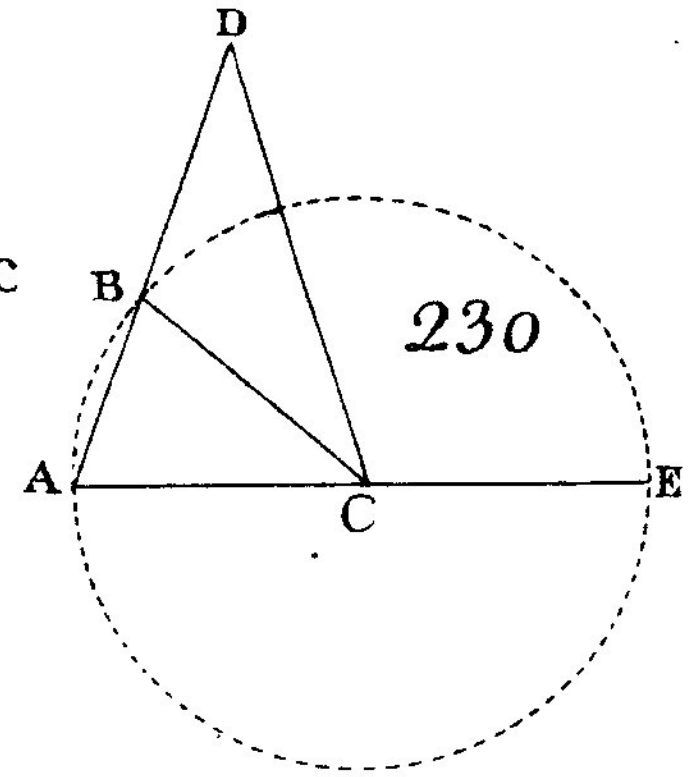
221



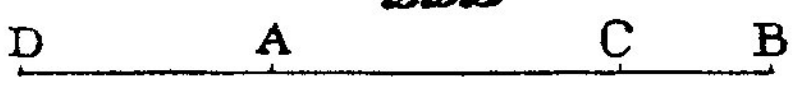
229



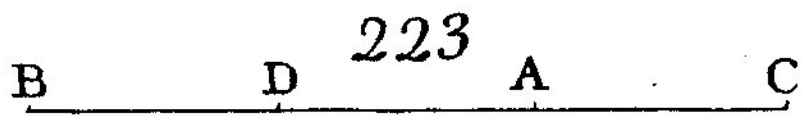
230



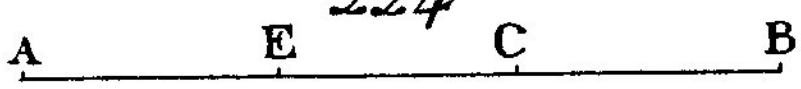
222



223



224



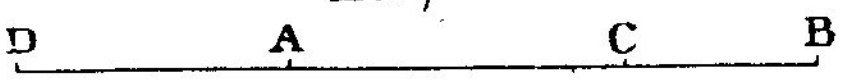
225



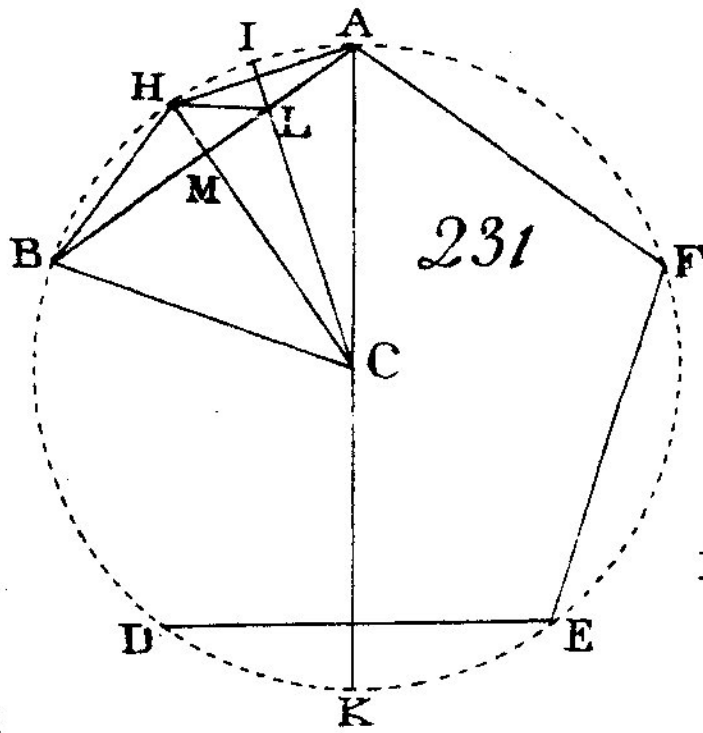
226



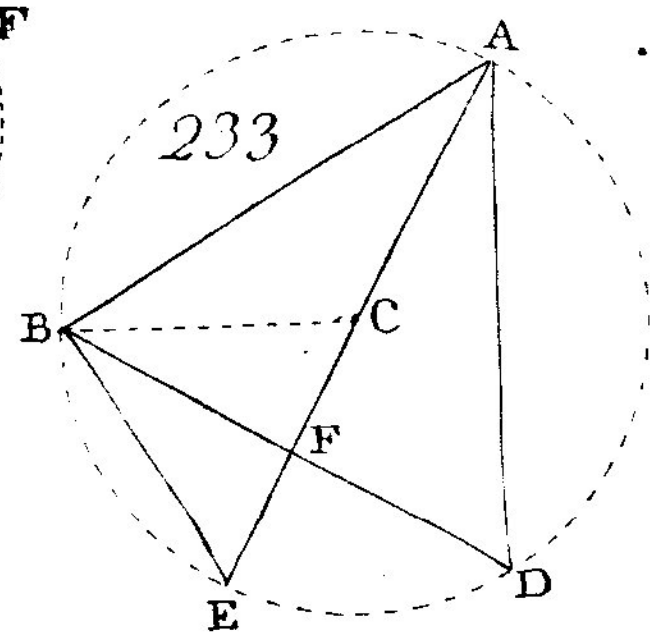
227



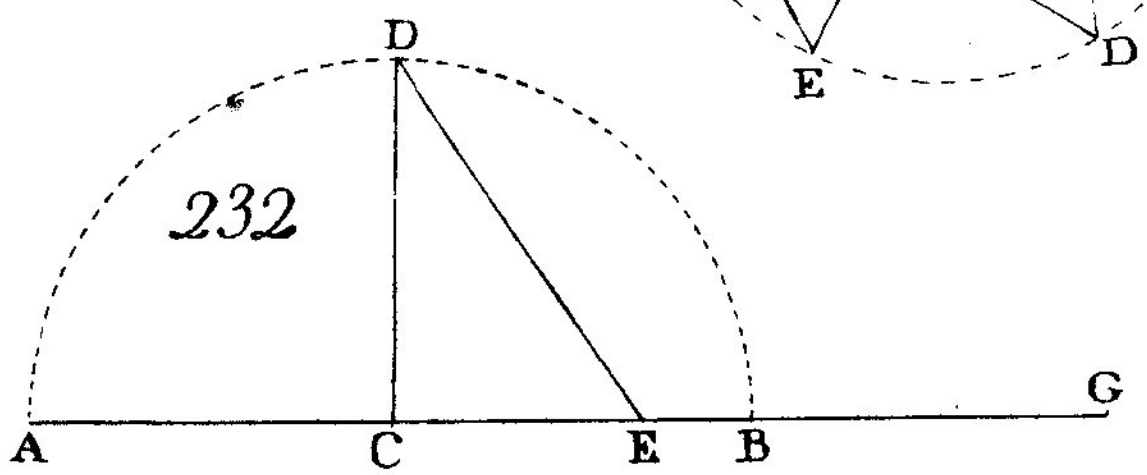
231



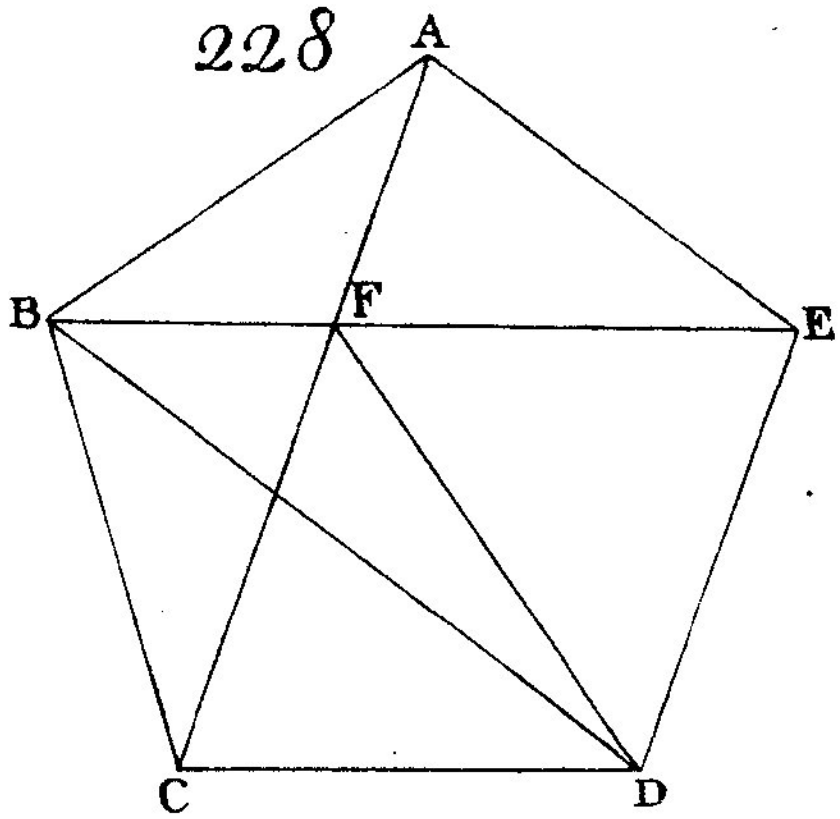
233



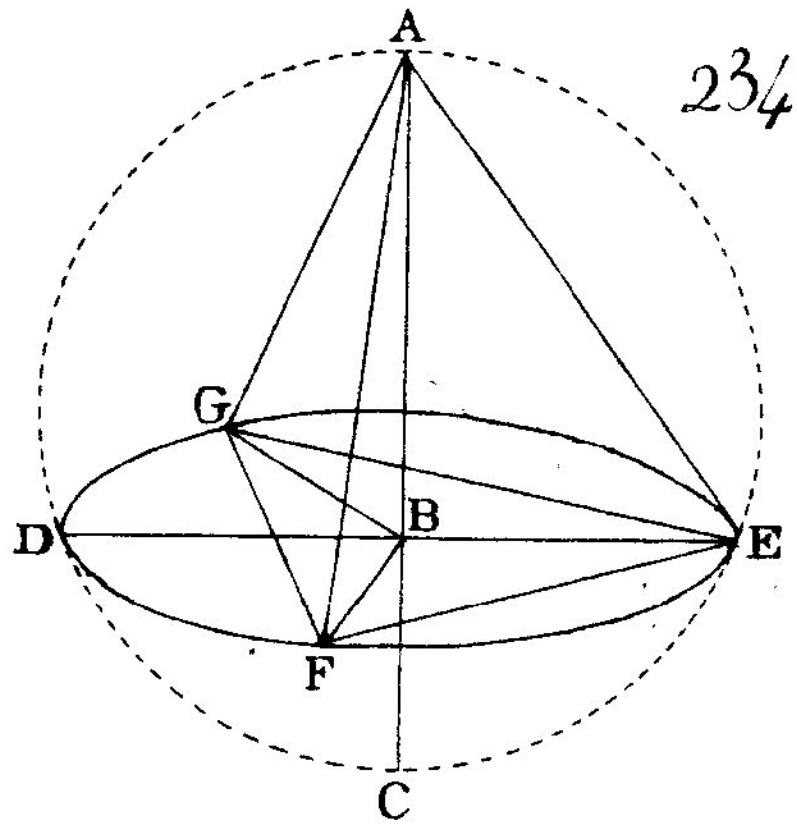
232



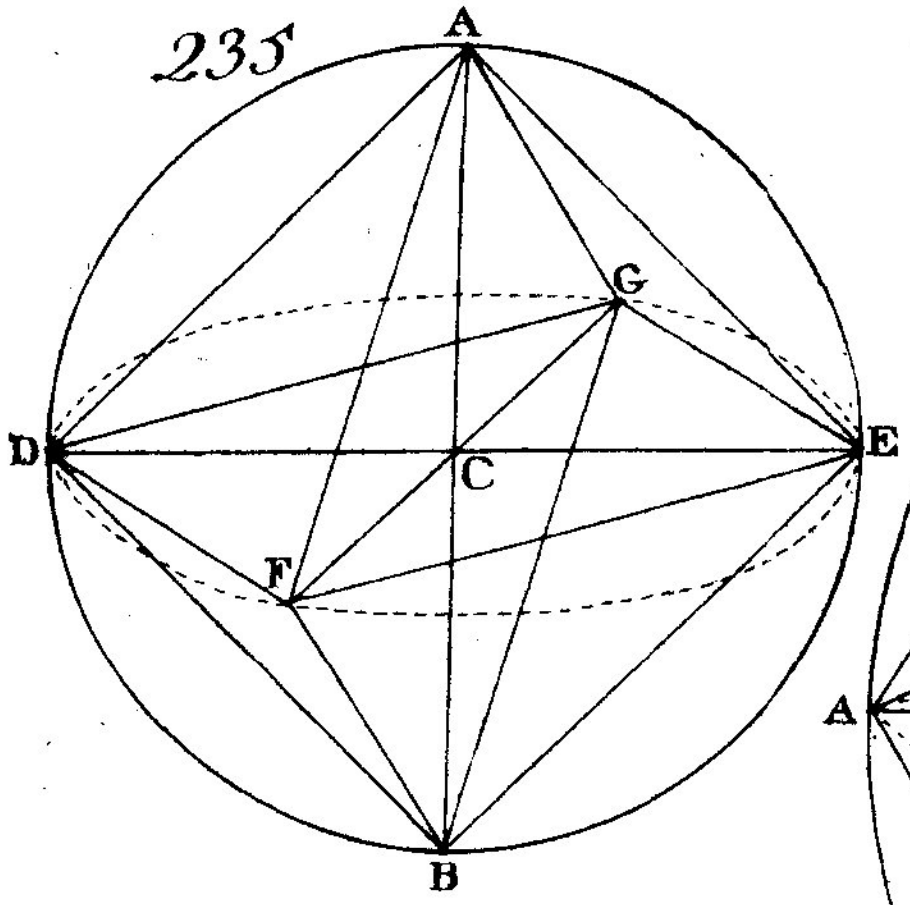
228



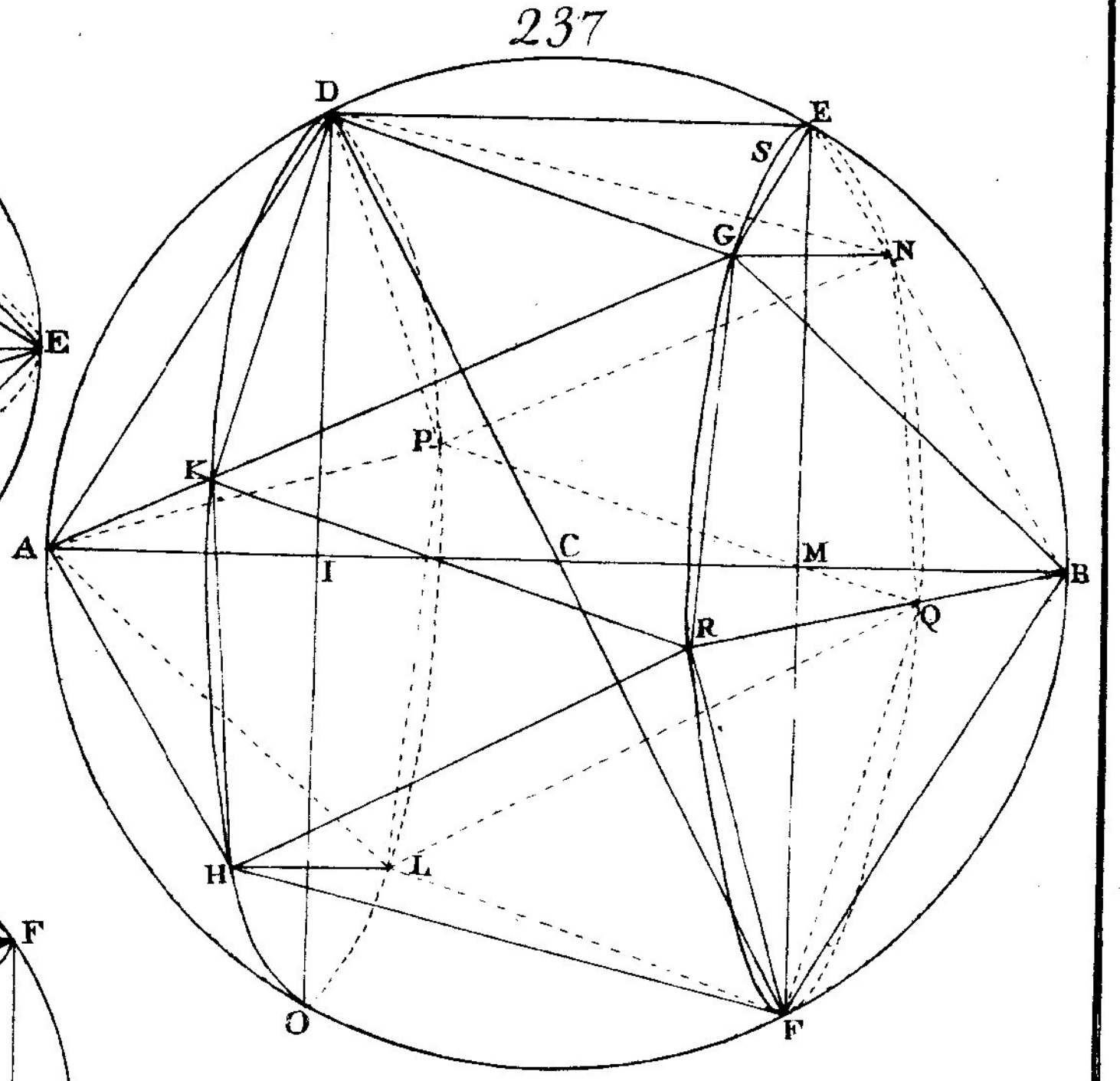
234



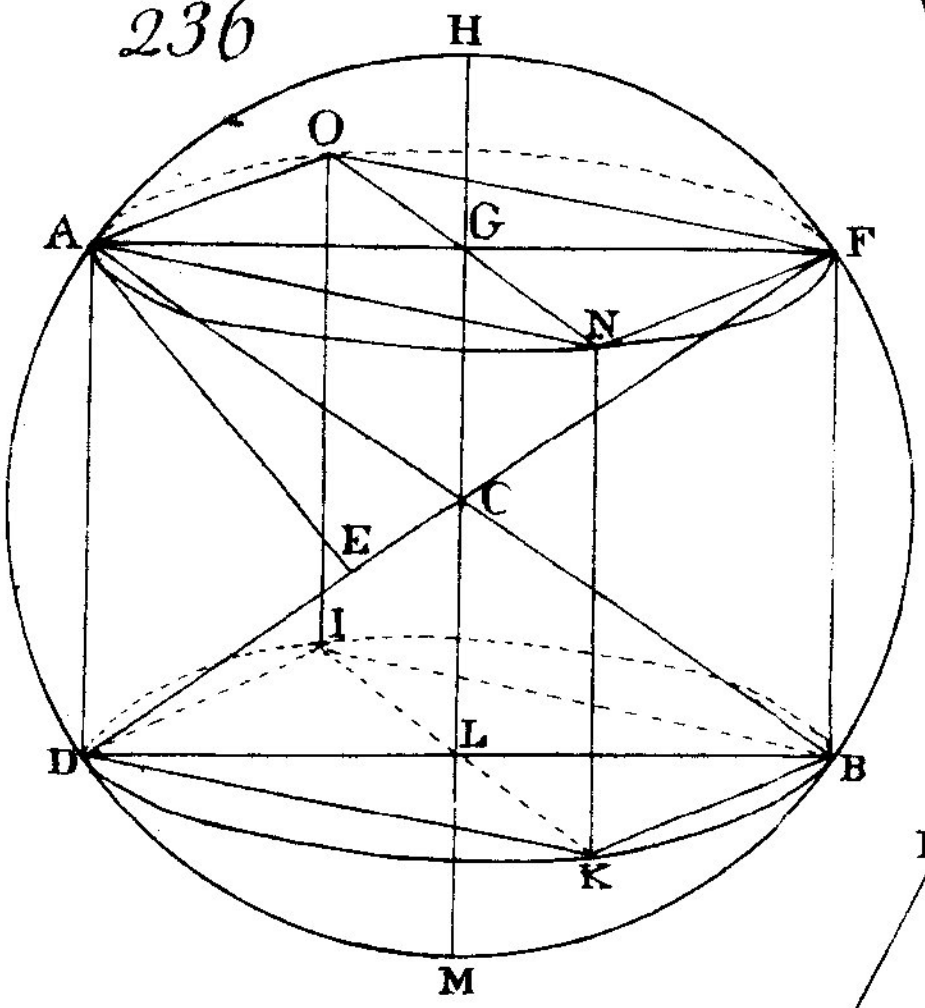
235



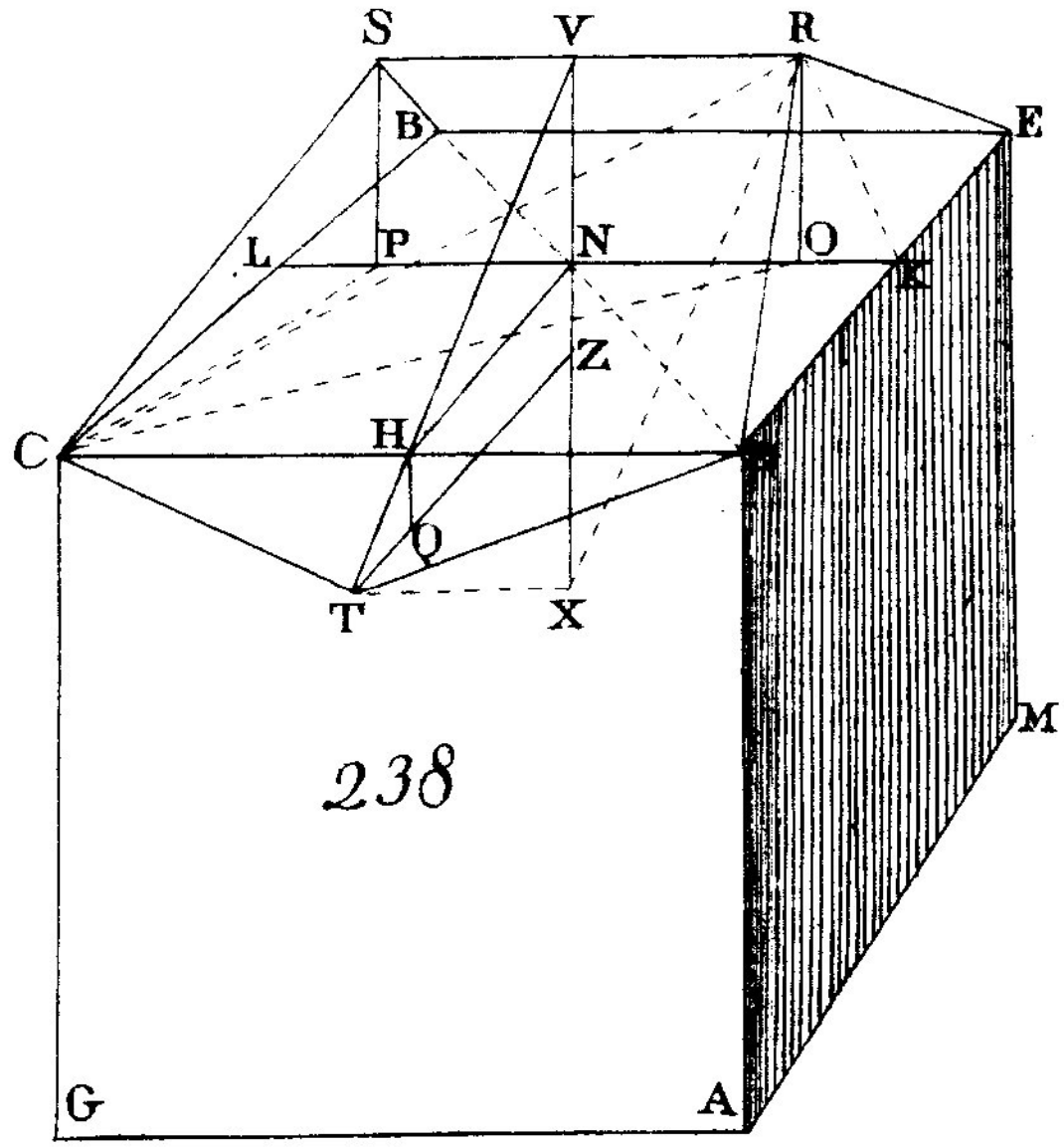
237



236



238



239

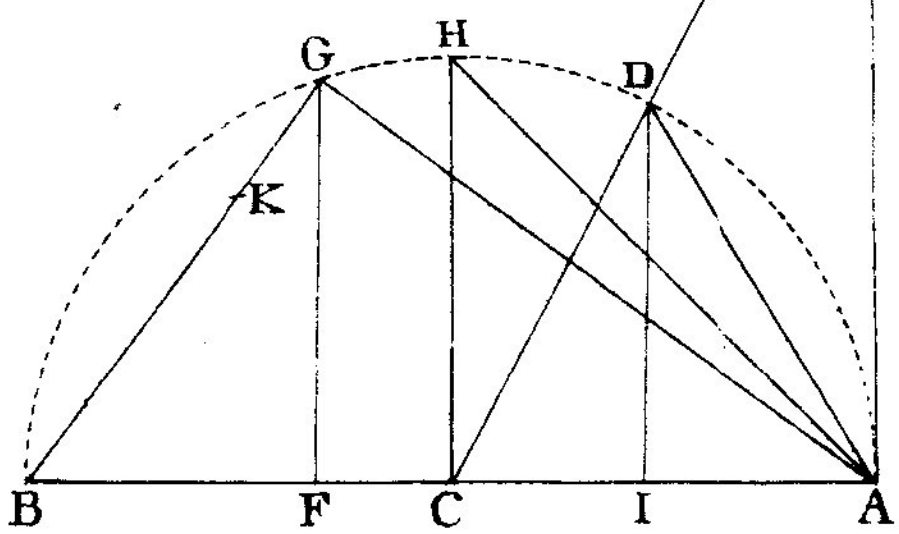
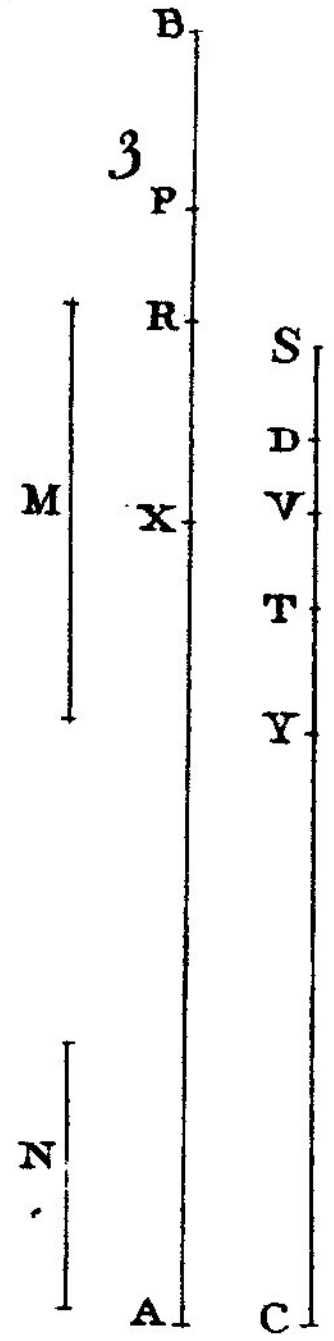


Fig. 1.

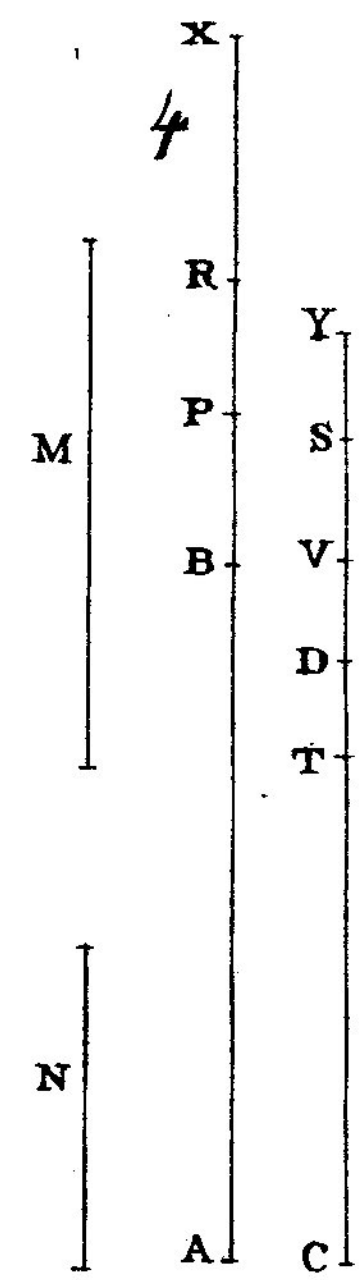


2

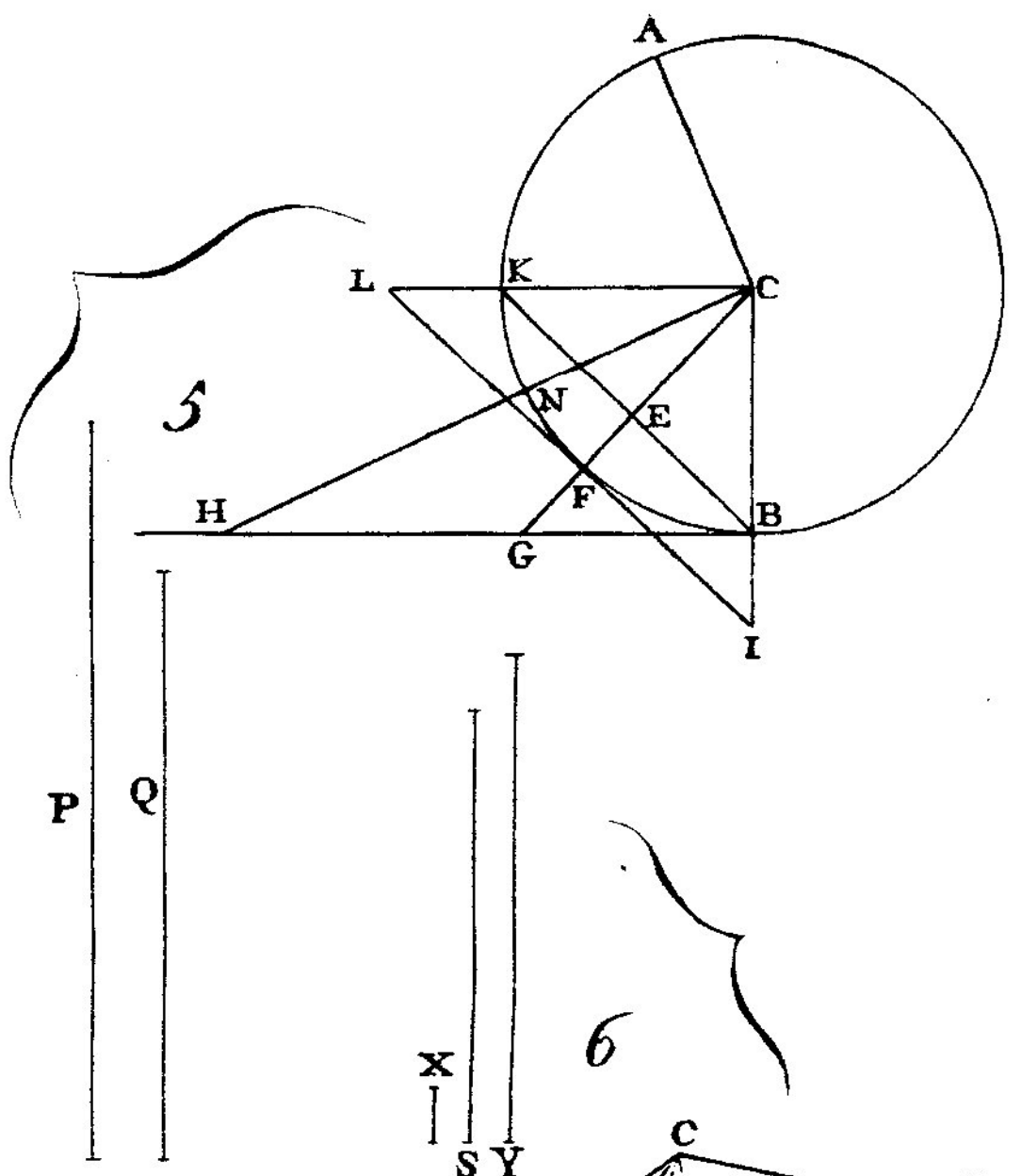
3



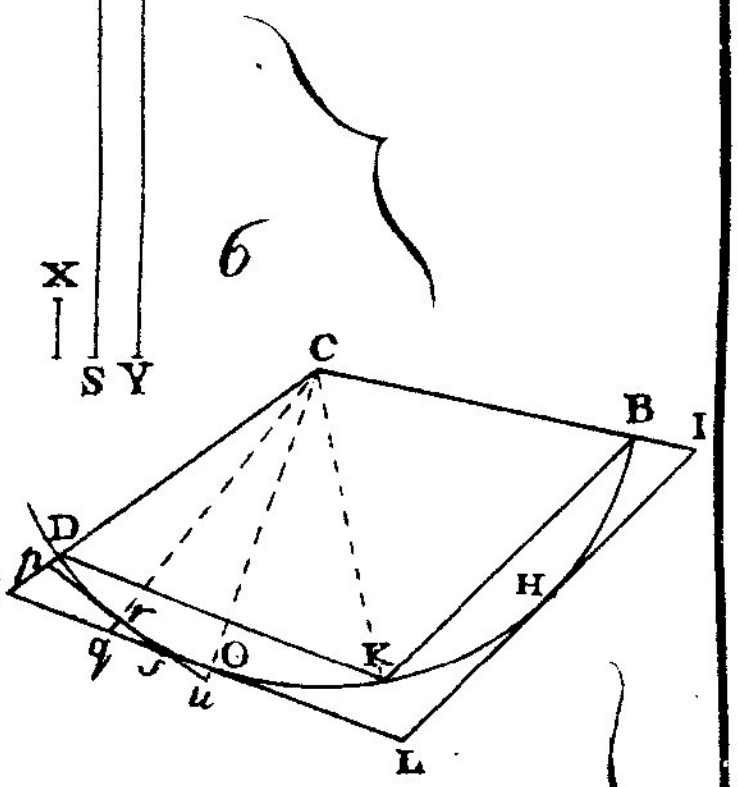
4



5



6



8

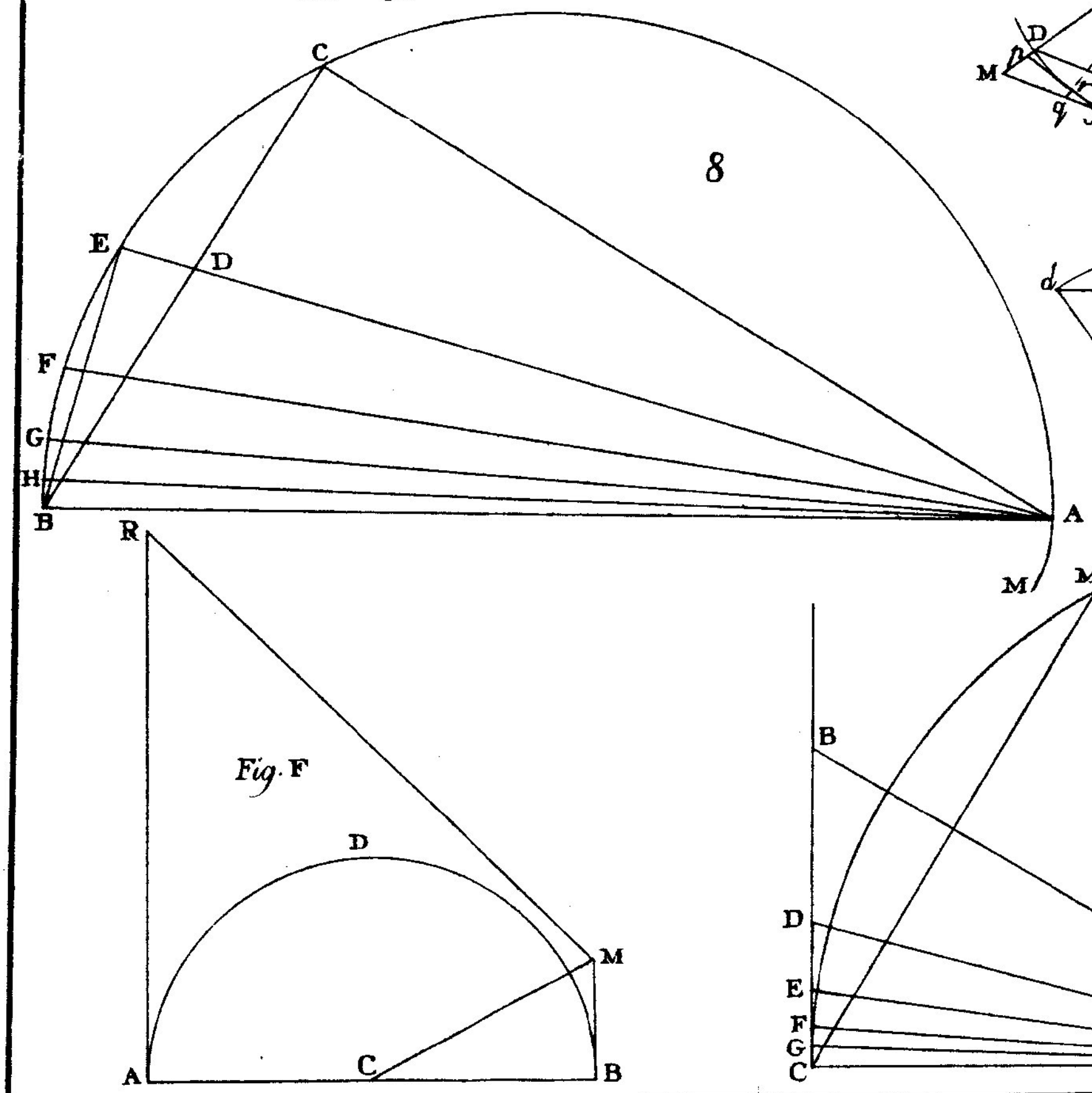
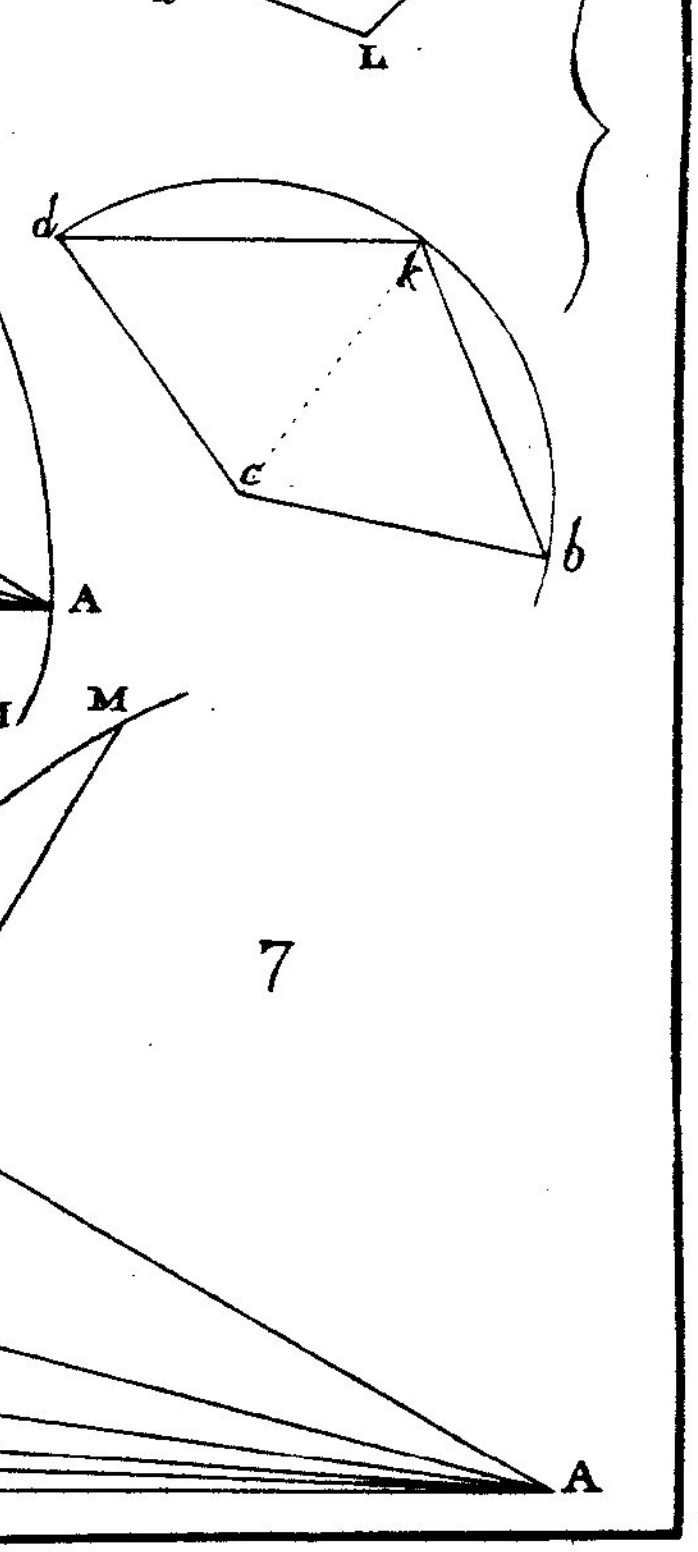
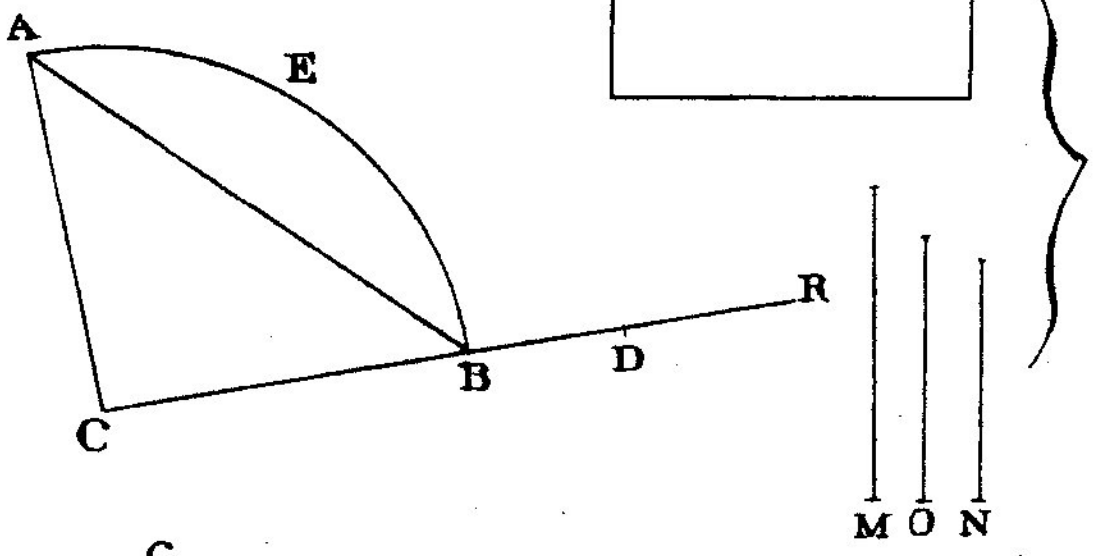


Fig. F

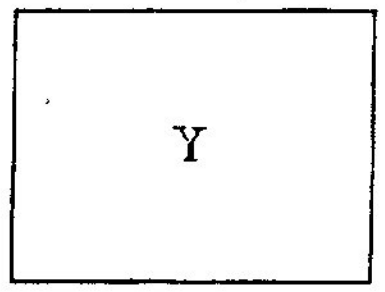
7



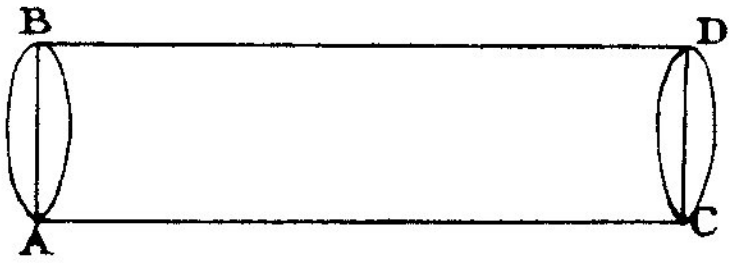
9

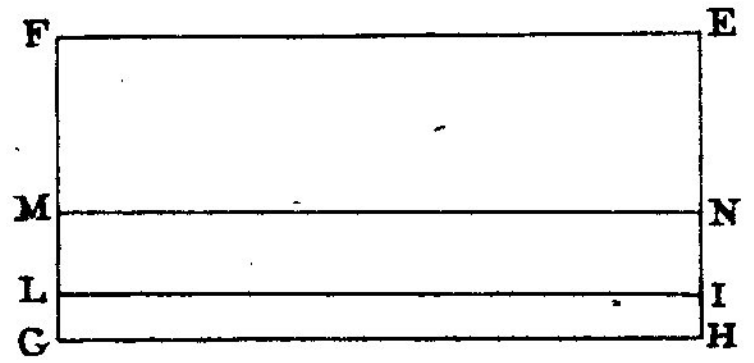


X

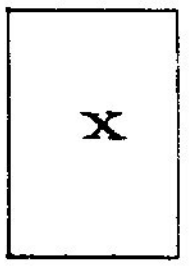


12

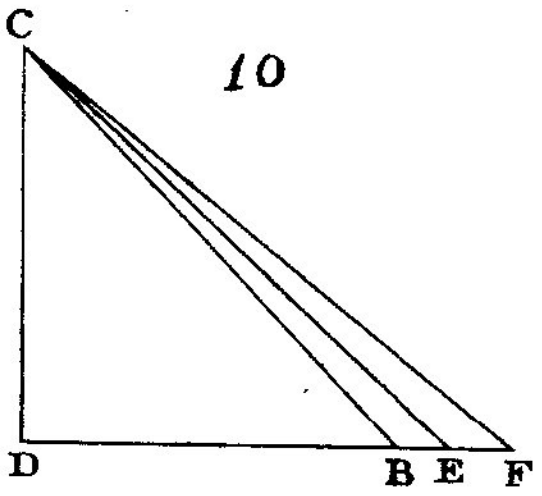




X

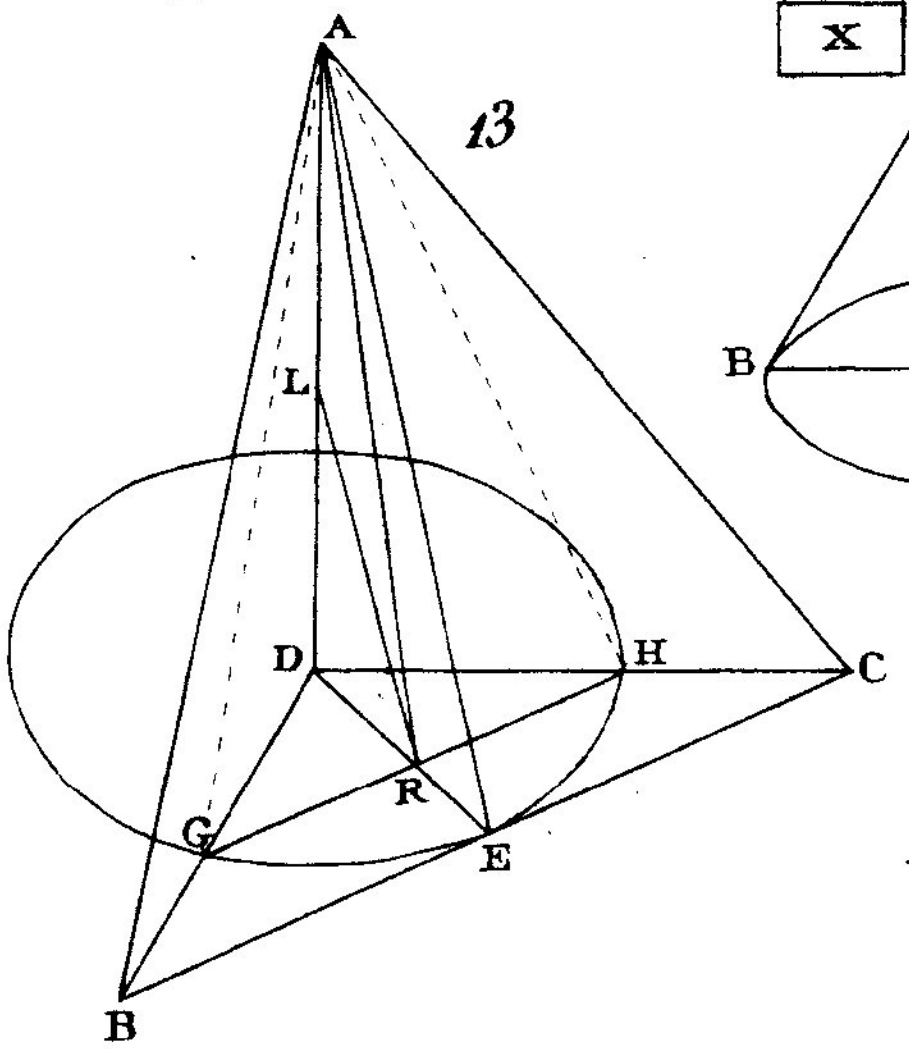


10



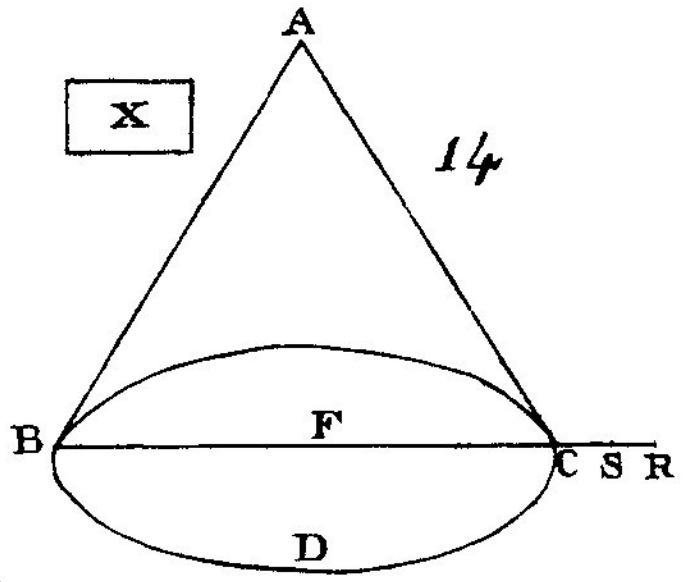
X

13



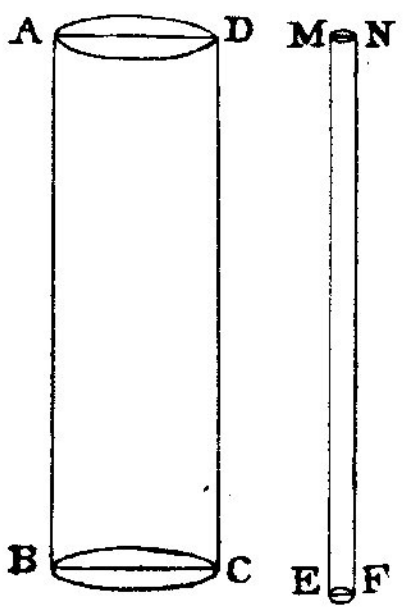
X

14

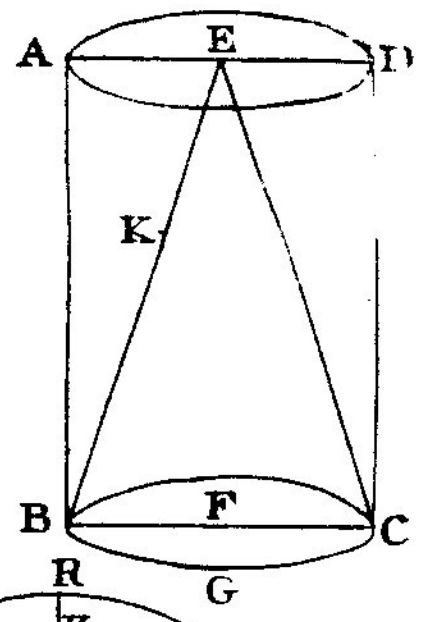


11

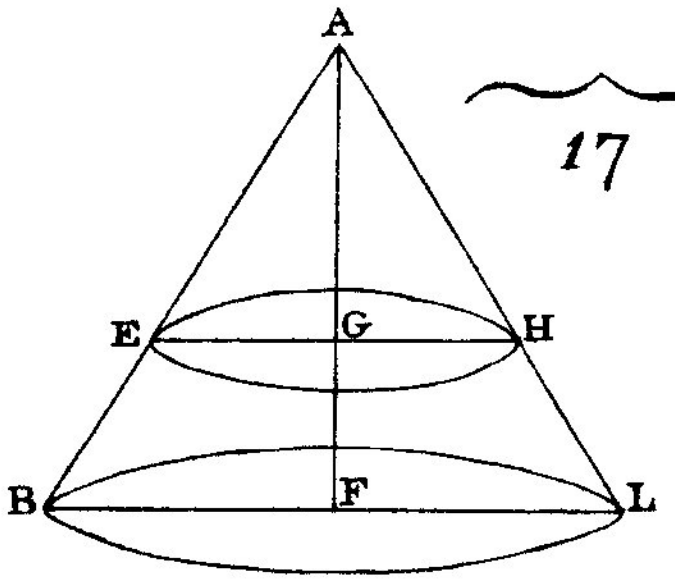
X

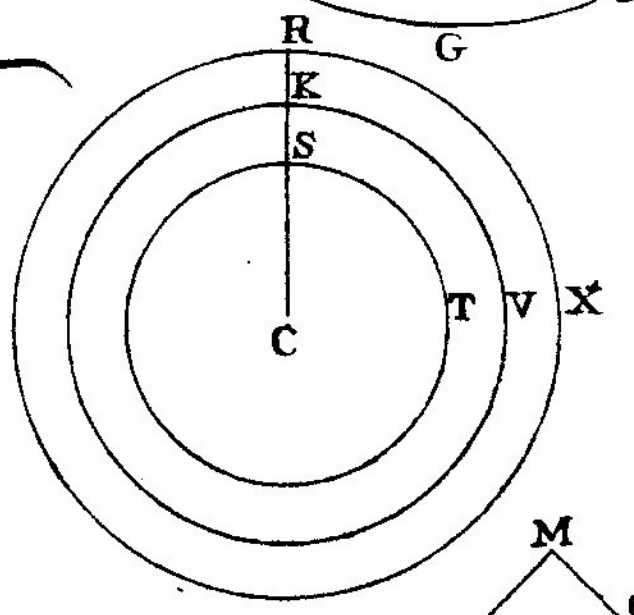


15

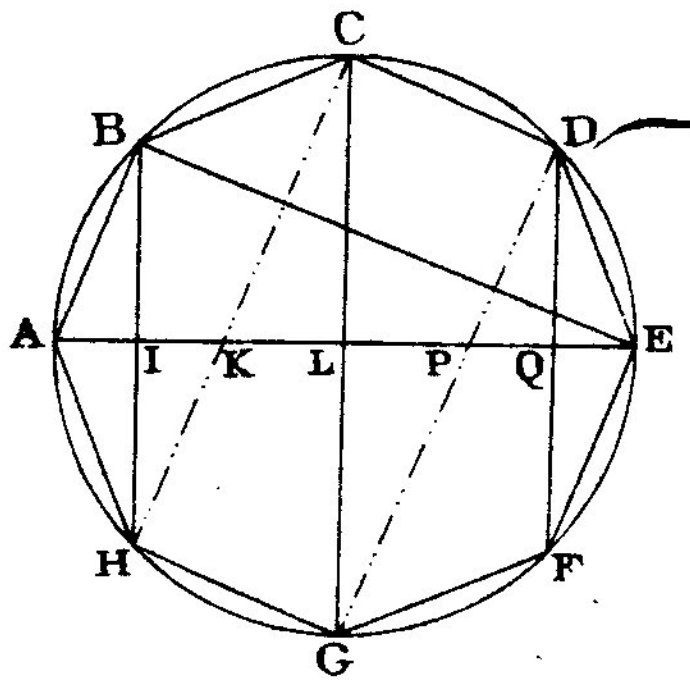


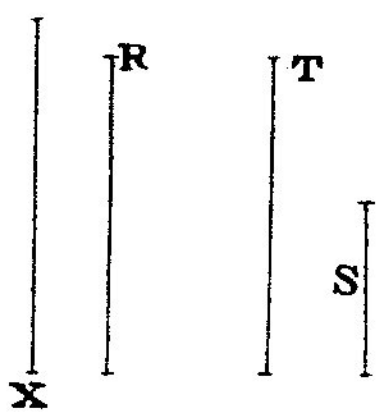
17



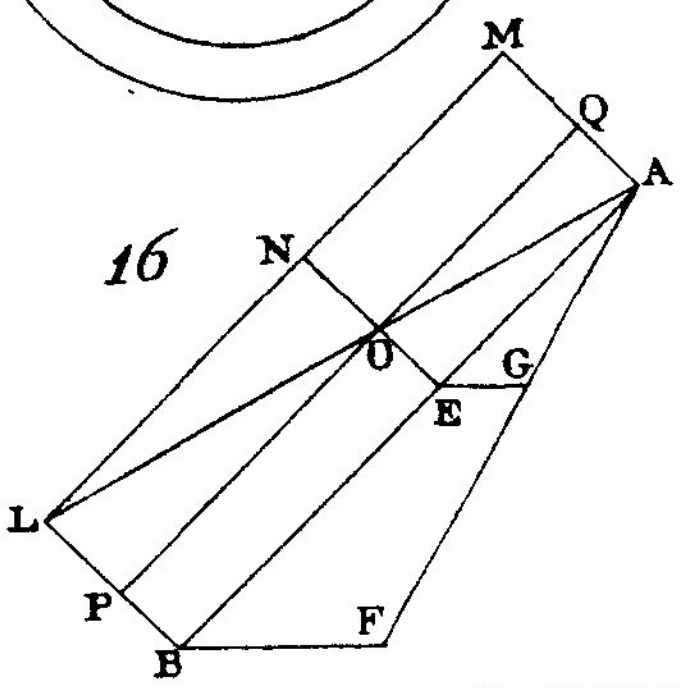


18

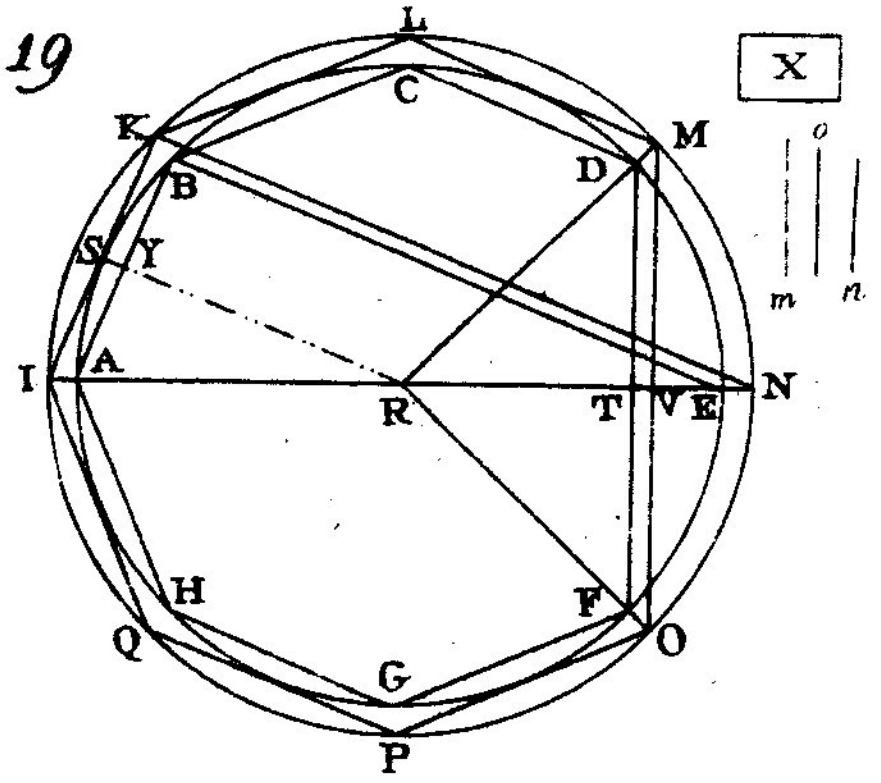




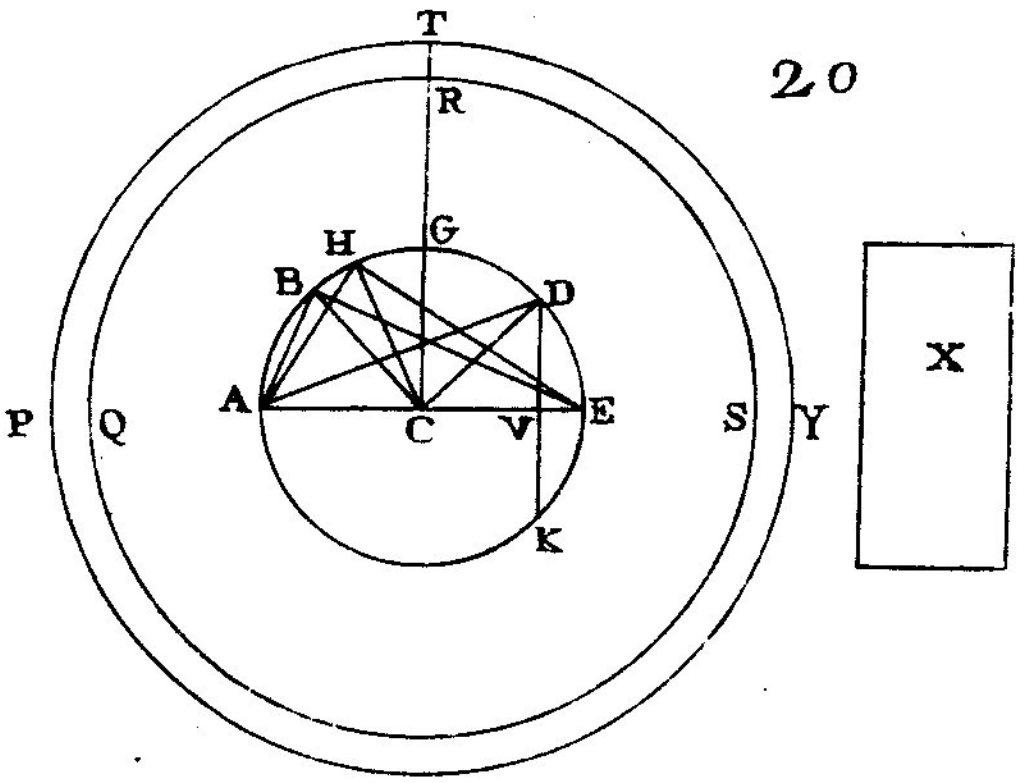
16



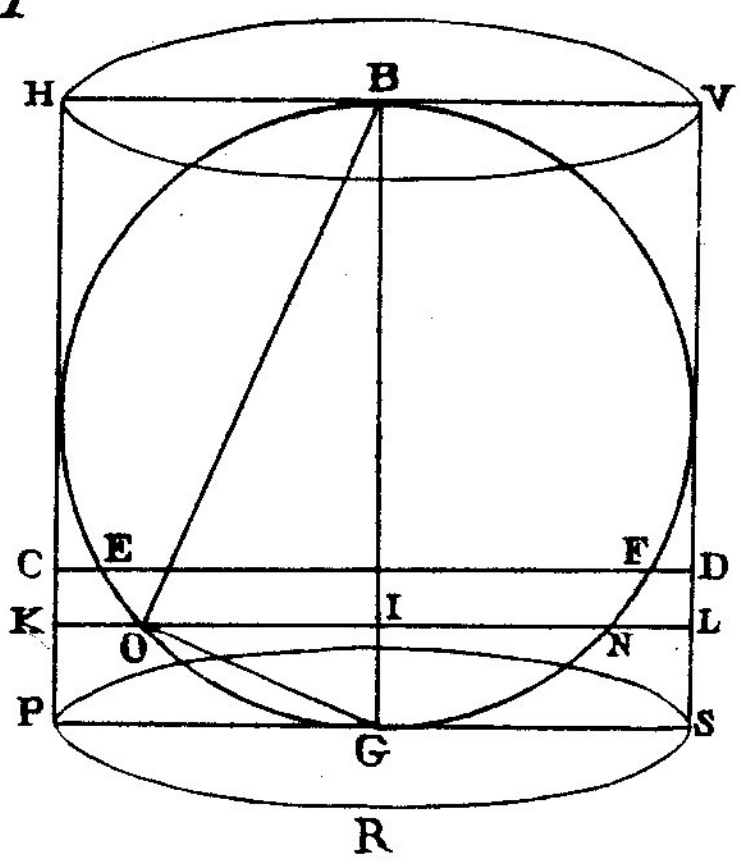
19



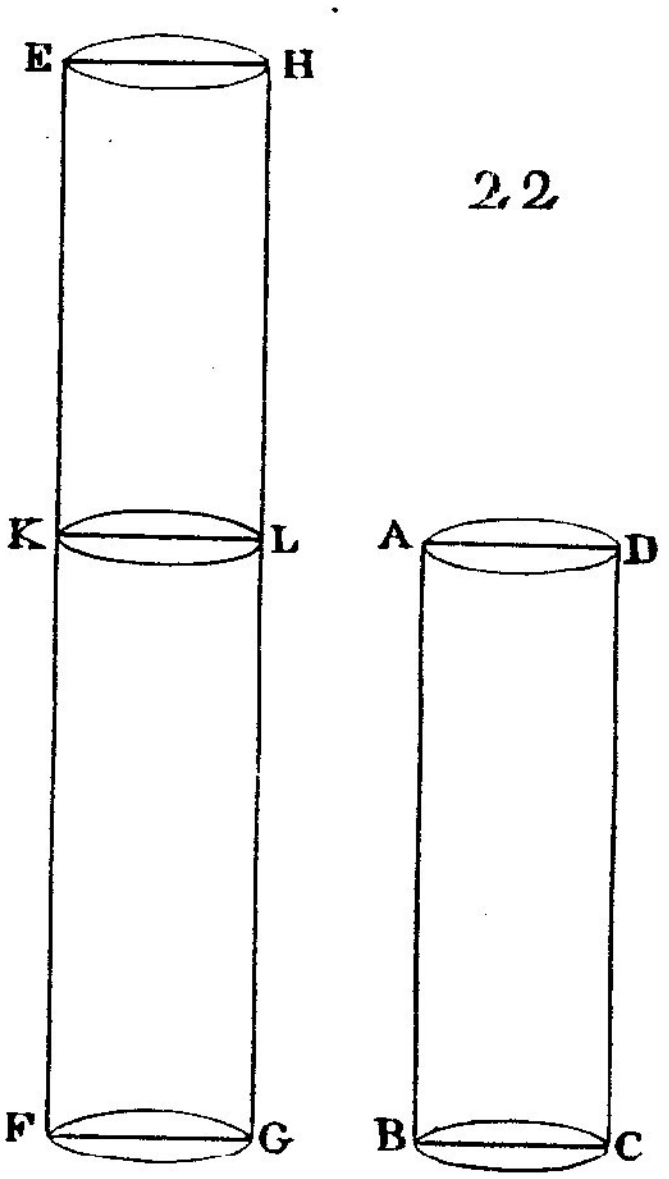
20



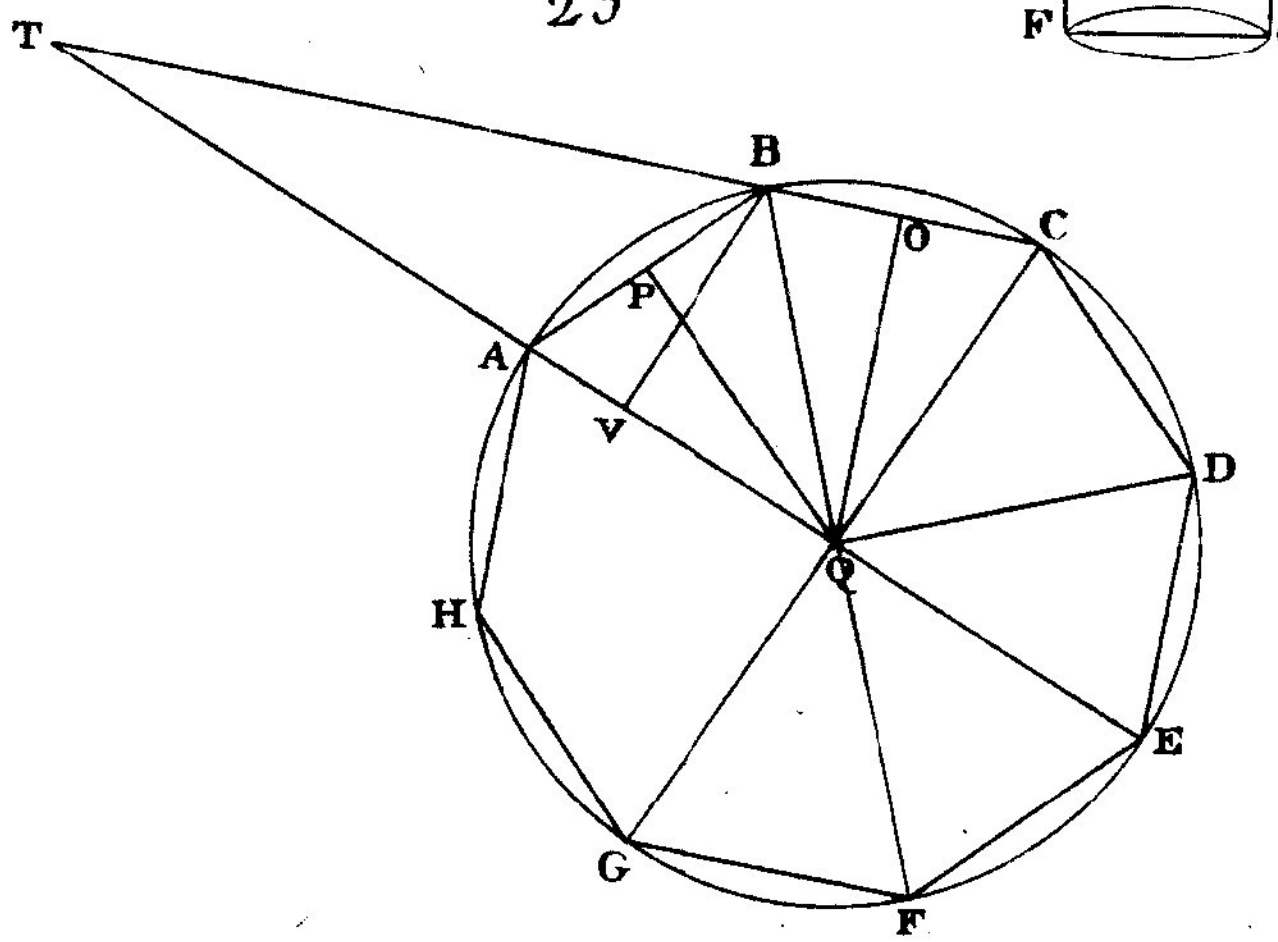
21



22



23



24

