I fondamenti della geometria secondo Giuseppe Veronese

Giuseppe Veronese (1854 - 1917)[1] succeduto nel 1881 a Bellavitis, morto nel 1880, sulla cattedra di *Geometria analitica* dell'Università di Padova, sosteneva la necessità dei metodi geometrico sintetici secondo un punto di vista che fra poco vedremo. Pietro Cassani (1832 – 1905) che fu insegnante di matematica all'Istituto Tecnico di Venezia, in cui studiò Giuseppe Veronese, realizzò alcuni interessanti lavori sui fondamenti della geometria pluridimensionale che in qualche modo dovettero influenzare l'allievo[2]. Veronese risentì però molto degli studi e delle ricerche di Bernhard Riemann (1826-1866) e nella sua opera privilegiò l'approccio ellittico in merito agli stessi fondamenti della geometria. Così scriveva Veronese nel 1884[3]:

> Il metodo [da me seguito] è principalmente sintetico e *intuitivo*, come nelle altre mie memorie sulla geometria a *n* dimensioni. Dico intuitivo perché per me il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni in quello a *n* dimensioni sono elementi di *natura nota*, cioè hanno sempre lo stesso significato, quello che posseggono nello spazio ordinario; e quindi i corpi a più di tre dimensioni generati con questi elementi sono essi stessi parzialmente intuitivi, perocché vengono rappresentati nella nostra mente non già mediante equazioni, ma mediante figure geometriche.

Per Veronese[4] la geometria in quanto tale e quindi in particolare una (qualunque) geometria si deve basare su un paradigma che può essere estrinsecato secondo il seguente programma scientifico:

a) stabilire se il sistema di assiomi che caratterizza la geometria considerata è non contraddittorio e quindi se predetti assiomi sono indipendenti tra di loro, cioè se qualcuno di essi viene dedotto o meno dagli altri;

b) stabilire se il precedente sistema di assiomi è conforme alla nostra "intuizione spaziale", cioè se non è in contrasto con le proprietà intuitive della nostra osservazione protofisica della realtà.

Sono questi i due principi epistemologici che ci devono guidare, secondo Veronese, nella scoperta geometrica. Anche Veronese affrontò sia il problema delle geometrie non-euclidee sia quello dell'assoluto. Così ad esempio per lui la geometria non euclidea, lobatschewskiana o riemanniana, risultava, grazie alla costruzione di modelli euclidei di queste geometrie, senza dubbio logicamente coerente. Inoltre, sempre grazie alla realizzazione di questi modelli, veniva fornita quella percezione spaziale che le rendeva accettabili anche da un punto di vista intuitivo. Nel 1914 Veronese, intervenendo con un breve articolo sul *Bollettino della Mathesis* a proposito della polemica tra Catania e Castelnuovo relativa ai metodi di insegnamento della geometria, scrive[5] :

---

[1] Vedi P. Freguglia, "I fondamenti della geometria a più dimensioni secondo Veronese" in *Seminari di Geometria 1996-1997* , a cura di S. Coen, Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, Bologna 1998.
[2] Vedi A. Brigaglia, "Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia" in *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento*, Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia, 1994, pp. 231 – 261.
[3] Vedi G. Veronese, "La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario", in *Memorie R. Accad. Lincei*, 19, 1883-84.
[4] Vedi G. Veronese, "Osservazioni sui principi della geometria", in *Atti R. Accad. di scienze lettere ed arti* di Padova, 10, 1893-94.
[5] Vedi G. Veronese, "Osservazioni intorno ad una polemica", *Bollettino della Mathesis*, VI, 1914.

[...] per me è condizione essenziale che il rigore non debba andare a detrimento di quella visione intuitiva, specialmente nella geometria, senza cui non ha vita la logica, e di quell'insieme delle verità fondamentali che certamente non si avrebbe nell'insegnamento con l'applicazione dei simboli e dei procedimenti della logica matematica [...]. Così non potrei essere favorevole alla tendenza opposta, che per paura della logica matematica vorrebbe ridurre l'insegnamento della matematica ad un insegnamento approssimativo [...] e l'intuizione, senza il controllo del ragionamento, può condurci a false conclusioni [...].

Per istituire la geometria a più dimensioni si deve procedere - secondo Veronese - con lo stesso criterio epistemologico: coerenza logica e intuizione protofisica. Queste caratteristiche per il caso che qui ci riguarda vengono estrinsecate a loro volta da un lato mediante la riconduzione iterata per proiezioni agli spazi di dimensione tre e due e dall'altro mediante l'ipotesi metodologica dell'estensione dimensionale. Vediamo di seguito in cosa consistono queste due ipotesi metodologiche che specializzano al fine della determinazione delle geometrie a più dimensioni i punti a) e b) del programma scientifico di Veronese di cui poc'anzi si è detto. Cominciamo dalla prima. Poiché risulta quantomeno difficoltoso ed artificioso costruire un modello euclideo sintetico diretto a dimensione due o tre per le geometrie a più dimensioni, Veronese cercherà il riferimento, la garanzia euclidea mediante le trasformazioni proiettive e descrittive, le quali permettono di rappresentare ad esempio un oggetto dello spazio quadridimensionale nello spazio tridimensionale e quindi di seguito, sempre tramite proiezioni, nello spazio bidimensionale. In una nota ad un suo fondamentale lavoro "La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario" del 1884, dove viene studiata quella che sarà poi chiamata la *superficie di Veronese*, viene asserito:

La geometria descrittiva [vedi, sempre di Veronese, la memoria "Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni", 1882] serve per costruire *modelli* (projezioni) delle figure dello spazio a quattro e a *n* dimensioni nel nostro spazio, e per conseguenza anche le projezioni in un piano, foglio del disegno. Non si può dunque dubitare che le figure dedotte per projezione o per sezione da quelle dello spazio a *n* dimensioni non esistano. Si vede dunque che il mio punto di partenza non è soltanto sintetico, ma altresì *rappresentativo* senza alcun substrato analitico [...]. Non sono dunque più i risultati dell'analisi che rivesto del linguaggio sintetico, ma *sono le costruzioni geometriche da cui parto, a cui applico poi il metodo analitico, quando credo opportuno* [...].

Secondo Veronese la geometria teorica ha come obiettivo lo studio delle proprietà di uno spazio, compresi la retta e il piano, a partire da uno spazio dimensionalmente superiore. In un articolo del 1892, comparso nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, dove peraltro polemizza con Peano, dice [6]:

Tutto l'insieme dei punti, che secondo gli assiomi dati possiamo immaginare tali e quali ce li rappresentiamo nello spazio ordinario, è lo spazio generale. Questo spazio, considerato come già costruito o dato, ha un numero infinito attuale di dimensioni. Quindi la geometria è scienza dello spazio generale [...]. Lo spazio generale è geometricamente possibile, e quindi ha una *realtà astratta* [...]. Lo spazio ordinario è per me la nostra rappresentazione intuitiva di esso.

Dunque le dimensioni, compresa la quarta, sembrano essere delle lenti di vario tipo mediante le quali si analizza un ente geometrico la cui esistenza dipende proprio dalla dimensione. Ad esempio una retta potrà essere vista e quindi studiata in spazi di dimensione via via superiore, essa sarà sempre tale, ma avrà proprietà che via via dipenderanno dalla dimensione in cui viene collocata. Più elevata è la dimensione più

[6] Vedi G. Veronese, "A proposito di una lettera del prof. Peano", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, VI, 1892.

ricca è la varietà degli enti geometrici che compaiono (vedi ad esempio gli ipercilindri che non possono esistere in S^3, ma di cui in S^4 vi sono due specie – e d'altra parte in S^4 esistono pure i cilindri). E' lo *spazio generale*, che ha potenzialmente infinite dimensioni, il vero ambiente metafisico della geometria che contiene, in linea di principio, tutti gli enti geometrici possibili. In Veronese c'è dunque un consapevole superamento della ipotesi kantiana della forma a priori dell'intuizione spaziale, per il fatto che quest'ultima non coincide - come lui stesso dice - con la vera geometria. Si deve dunque trovare un criterio per costruire uno spazio dietro l'altro di dimensione (finita) sempre superiore, avendo di mira lo *spazio generale*. Questo principio dell' estensione dimensionale, che peraltro ci dovrebbe dare garanzie sulla intuizione spaziale degli oggetti geometrici a dimensione superiore alla terza, viene proposto da Veronese, come pure da Henry Parker Manning, con la effettiva determinazione degli spazi n dimensionali e con la costruzione analogica di figure della dimensione n-sima a partire da figure alla dimensione (n–1)-esima. Così ad esempio vale la seguente successione di figure base:

- *segmento* (geometria sulla retta, unidimensionale, determinato da due punti);
- *triangolo* (geometria del piano, bidimensionale, determinato da tre punti non collineari e da tre lati)
- *tetraedro* (geometria dello spazio, tridimensionale, costituita da quattro punti non complanari, da quattro triangoli e da sei lati)
- *pentaedro* (geometria dello spazio quadridimensionale, questa figura base sarà costituita da cinque punti che non giacciono tutti su uno stesso iperpiano, da cinque tetraedri, ecc.)

Ad esempio, nello spazio quadridimensionale vengono definite due tipi di ipersuperfici cilindriche: la *ipersuperficie cilindrica di prima specie* (costituita da tutte le rette parallele [*elementi*] passanti per i punti di una superficie [*superficie direttrice*] di un iperpiano, appartenente allo spazio quadridimensionale assegnato, non appartenenti allo stesso iperpiano a cui appartiene la superficie direttrice. La superficie direttrice può essere un piano, oppure una superficie sferica, o conica, o cilindrica. Di conseguenza si definisce l'ipersolido corrispondente, cioè l'*ipercilindro di prima specie*) e la *ipersuperficie cilindrica di seconda specie* (costituita da tutti i piani [*elementi*] tra loro paralleli passanti per i punti di una curva piana [*curva direttrice*] e intersecanti il piano della curva soltanto in quei punti. Come è noto si dimostra che in S^4 due piani si intersecano in un sol punto, vedi il teorema da noi riportato alla fine del paragrafo 3.2). Si può quindi definire l'*ipercilindro di seconda specie*.
Come è facile constatare queste due definizioni estendono alla dimensione successiva uno dei componenti che contribuiscono nello spazio tridimensionale alla definizione di superficie cilindrica, dove si ha il cerchio (o una curva piana chiusa qualunque) come curva direttrice e come elementi le rette. Va anche rammentato che tramite intersezioni di due ipersuperfici di S^4 si possono ottenere superfici di S^3. Vediamo ora come vengono generati gli iperspazi.
Per la costruzione sintetica dello spazio geometrico, Veronese si poggia su basi epistemologiche ben esplicitate. Nella sua fondamentale opera *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare. Lezioni per la scuola di Magistero in Matematica*, del 1891 (vedi G. Veronese [7]), egli inizia proponendo una serie di enunciati che stabiliscono o, se si vuole, che regolano il modo

[7] Vedi G. Veronese, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee*, Tipografia del Seminario, Padova, 1891

di pensare del geometra e che permetteranno di generare appunto spazi via via di dimensione superiore. Questi enunciati, che scatenarono vivaci polemiche, vanno dunque visti come una sorta di paradigma che riguarda "la facoltà e l'atto del pensare". Veronese poggia il suo impianto generativo degli spazi di dimensione via via superiore sul seguente principio:

(*) "Data una cosa A determinata, se non è stabilito che A è il gruppo di tutte le cose possibili che vogliamo considerare, possiamo pensarne un'altra non contenuta in A (vale a dire fuori di A) e indipendente da A".

Ciò vuol dire in particolare che se A è una qualunque forma geometrica, "possiamo immaginare fuori di A un altro elemento, cioè un elemento che non appartenga ad A senza che ciò contraddica alle proprietà della forma A stessa, né conduca a contraddizioni". Cosicché, poiché una forma geometrica, ad esempio la *retta* che è, autonomamente considerata, uno spazio ad una dimensione, è costituita di punti, possiamo anche immaginare che esista un punto P fuori di essa . Ovvero, come ulteriormente Veronese spiega[8], "immaginiamo *prima* uno spazio S [ad esempio la *retta*] e *poi* un punto P e consideriamo come contrassegno di confronto tra il punto P e quelli di S, l'ordine (se si vuole anche il tempo) in cui li abbiamo pensati". Questa è ovviamente una giustificazione di natura psicologica, che tuttavia può aiutare a capire. Allora il *piano*, inteso come spazio bidimensionale S^2, sarà generato da una retta (spazio ad una dimensione S^1) ed un punto P fuori di essa, nel modo seguente[9]:

(*Def.*) La figura [...] che si ottiene dal fascio di raggi, considerando come elemento [centro] il punto P, [che congiunge P con i punti della retta assegnata S^1], si chiama sistema a due dimensioni o *superficie piana* o, più semplicemente *piano*.

E quindi di seguito, come per esempio per la generazione di uno spazio a quattro dimensioni.

(*Def.*) Sia dato uno spazio a tre dimensioni S^3 e un punto S^0 fuori di esso [...]. Congiungendo tutti i punti dello spazio S^3 con il punto S^0, le rette che così si ottengono, considerate quali elementi, determinano una figura che chiameremo *stella di 2^a specie*, di cui S^0 è il centro e S^3 lo spazio direttore. La indicheremo con il simbolo (S^0 S^3). [...] (*Def.*) Se nella stella di seconda specie si considera il punto come elemento, la figura risultante è a quattro dimensione rispetto al punto quale elemento. Chiameremo questa figura *spazio a quattro dimensioni*.

La posizione fondazionale di Veronese fu fortemente avversata in particolare da Peano[10]. Oltre la ben nota polemica sulla esistenza dei segmenti infinitamente piccoli e infinitamente grandi, grazie ai quali si prospetta l'esistenza della geometria non-archimedea (indipendenza del postulato di Archimede) che Veronese ritiene possibili, anche nei confronti degli spazi pluridimensionali la disputa fu assai aspra[11]. Peano sostiene che il principio (*), sopra riportato, non significa altro che affermare:

[8] Vedi G. Veronese, "Osservazioni sui principi della geometria", in *Atti R. Accad. di scienze lettere ed arti* di Padova, 10, 1893-94, vedi nota 1 a p. 5.
[9] Vedi G. Veronese, *Fondamenti di geometria [...]* op. cit., pp. 281 e segg.
[10] Vedi G. Peano, "Recensione al volume di G. Veronese, *Fondam. di geom. a più dimens. [...]* " in *Rivista di matematica*, 2, 1892.
[11] Vedi G. Gemignani, "L'infinitesimo attuale: una polemica di cento anni fa", in *Peano e i fondamenti della matematica* (Atti del relativo convegno, Modena 22-24 ottobre 1991) (a cura del Gruppo di Storia delle Matematiche dell'Università di Modena), *Accademia Nazionale di Scienze Lettere ed Arti*, Mucchi, Modena, 1993. Vedi anche D. Palladino, op. cit., nota successiva.

(**) Data una classe A, se essa non contiene tutti gli oggetti, allora essa non contiene tutti gli oggetti.

Peano evince che in conclusione Veronese possa giungere ad affermare che “fuori di *tutti* i numeri ci siano ancora dei numeri [di stessa natura] e in tal modo si generano gli infiniti, e fuori di *tutti* i punti ci sono ancora dei punti e per tal via si generano gli spazi a più dimensioni!”. Le contestazioni di Peano[12] risultano sostanzialmente corrette, dal momento che l’impianto logico-epistemologico del Veronese è indubbiamente poco comprensibile ed in alcuni casi conduce a confusioni. Peano fu d’altronde il primo tra i matematici italiani dell’epoca a considerare l’importanza della logica formale per lo studio dei fondamenti della matematica ed in particolare della geometria. E Peano si ricondusse doverosamente a quanto le ricerche logiche del tempo proponevano fuori d’Italia, dando poi un suo apporto originale. Veronese invece ebbe una sorta di vera e propria avversione per la logica simbolico formale. In un ampio saggio dal titolo “Studio storico e critico dei principi della geometria” che è una delle appendici al suo libro *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee* , dopo aver accennato alle intuizioni di Descartes e di Leibniz ed alle opere di Boole e Schröder a proposito della creazione del calcolo logico simbolico, scrive:

> [...] L’interesse teorico di una tale dottrina nello studio della logica non ci pare si possa contrastare, ma bensì che se ne esageri l’importanza [...]. Noi non possiamo esaminare questo calcolo che nelle sue applicazioni, che furono fatte nei principi della matematica e in particolare della geometria, specialmente dall’egregio prof. Peano. E dobbiamo esprimere subito la nostra convinzione che anche se si avesse un linguaggio completo di segni logici per esprimere tutte le verità conosciute delle scienze matematiche nell’ordine che ci pare migliore e atto ad esprimere con semplicità le nuove, vi sarebbe sempre una differenza notevolissima tra l’interesse logico di questo sistema di segni e l’interesse matematico.

Paolo Freguglia

[12] Vedi D. Palladino, “La scuola di Peano e la scuola di geometria algebrica: due posizioni a confronto tra Otto e Novecento”, Appendice a M.Borga, P.Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, F. Angeli, Milano, 1985, pp. 244-250.