CAPITOLO VII.

Integrali indefiniti.

161. — Una funzione $F(x)$ avente per derivata $f(x)$ dicesi funzione *primitiva*, o *integrale* di $f(x)$, (o del differenziale $f(x)\,dx$), e si scrive

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Quindi, per definizione, questa equazione equivale alla

$$F'(x) = f(x).$$

Se $f(x)$ ha un integrale $F(x)$, ne ha infiniti, perchè ogni funzione $F(x) + C$, ove C è una costante arbitraria, ha ancora per derivata $f(x)$; reciprocamente ogni funzione che ha per derivata $f(x)$ non differirà da $F(x)$ che per una costante, ed è della forma $F(x) + C$.

L'espressione $F(x) + C$, ove a C non si attribuisca alcun valore speciale, dicesi l'*integrale generale* di $f(x)\,dx$, perchè attribuendo a C varii valori si trovano tutti gli integrali di $f(x)\,dx$, ciascheduno dei quali dicesi anche *integrale particolare*. Gli integrali, di cui attualmente ci occupiamo, soglionsi chiamare *integrali indefiniti*.

162. Teorema. — *Se la funzione* f(x) *è continua nell'intervallo* (a, b), *esiste una ed una sola funzione definita nell'intervallo* (a, b), *la cui derivata è* f(x), *e che assume un valore dato arbitrariamente corrispondentemente a un dato valore della variabile.*

Sia p. e. $a < b$, e siano

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2, \ldots \; x_{n-1}, \quad x_n = b$$

valori crescenti di x, che divideranno l'intervallo (a, b) in n intervalli parziali. Si rappresentino in generale con $l(\alpha, \beta)$, e $\lambda(\alpha, \beta)$ rispettivamente il limite superiore ed il limite inferiore dei valori assunti da $f(x)$ mentre x varia nell'intervallo (α, β), i quali ne sono anche il massimo ed il minimo (N. 21). Sia $\varphi(x)$ la funzione definita nell'intervallo (a, b) a questo modo:
per $x = a$, $\varphi(a) = A$, A essendo una quantità scelta ad arbitrio; nell'intervallo (a, x_1), compresi gli estremi, sia

$$\varphi(x) = A + (x - a)\, l(a, x_1),$$

nell'intervallo (x_1, x_2) sia

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_1) + (x - x_1)\, l(x_1, x_2)\\ &= A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + (x - x_1)\, l(x_1, x_2),\end{aligned}$$

ed in generale, nell'intervallo (x_{r-1}, x_r) sia

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_{r-1}) + (x - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, x_r)\\ &= A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + (x_2 - x_1)\, l(x_1, x_2) + \ldots\ldots\\ &\qquad + (x_{r-1} - x_{r-2})\, l(x_{r-2}, x_{r-1}) + (x - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, x_r).\end{aligned}$$

Le quantità $l(a, x_1)$, $l(x_1, x_2), \ldots$ sono tutte comprese fra $l(a, b)$, e $\lambda(a, b)$; onde si ricava

$$A + l(a, b)(x - a) \geq \varphi(x) \geq A + \lambda(a, b)(x - a).$$

La natura della funzione $\varphi(x)$ dipende dalla scelta dei valori $x_1, x_2, \ldots$ interpolati fra a e b; e attribuendo alla variabile x un valore fisso, e variando in tutti i modi possibili $x_1, x_2, \ldots$, $\varphi(x)$ assumerà in generale infiniti valori, tutti compresi entro limiti finiti,

come risulta dalla ultima diseguaglianza. Sia $F(x)$ il limite inferiore dei valori che assume $\varphi(x)$, conservando fisso x, e variando la divisione dell'intervallo (a, b). Dico che la funzione $F(x)$, che per $x=a$ assume evidentemente il valore A, ha per derivata $f(x)$.

Infatti, dati ad x due valori X_1 ed $X_2 > X_1$, ed eseguita una divisione arbitraria dell'intervallo (a, b), e calcolata la $\varphi(x)$ corrispondente, se X_1 cade nell'intervallo (x_{r-1}, x_r) e X_2 in (x_{r-1}, x_s), sarà

$$\varphi(X_1)=A+(x_1-a)l(a, x_1)+\ldots+(X_1-x_{r-1})l(x_{r-1}, x_r),$$

e

$$\varphi(X_2)=A+(x_1-a)l(a, x_1)+\ldots+(x_r-x_{r-1})l(x_{r-1}, x_r)+\ldots \\ +(X_2-x_{s-1})\,l\,(x_{s-1}, x_s).$$

Suddividasi l'intervallo (x_{r-1}, x_r) in (x_{r-1}, X_1) e (X_1, x_r), e l'intervallo (x_{s-1}, x_s) in (x_{s-1}, X_2) e (X_2, x_s); e sia $\varphi'(x)$ la funzione analoga a $\varphi(x)$ calcolata su questa nuova divisione dell'intervallo (a, b). Sarà

$$\varphi'(X_1)=A+(x_1-a)l(a, x_1)+\ldots+(X_1-x_{r-1})l(x_{r-1}, X_1)$$

e

$$\varphi'(X_2)=A+(x_1-a)l(a, x_1)+\ldots+(X_1-x_{r-1})l(x_{r-1}, X_1)+ \\ +(x_r-X_1)l(X_1, x_r)+\ldots+(X_2-x_{s-1})l(x_{s-1}, X_2),$$

quindi, paragonando le espressioni di $\varphi'(X_1)$ e $\varphi(X_1)$, ed osservando che $l(x_{r-1}, X_1)\leqq l(x_{r-1}, x_r)$, si ha

$$\varphi'(X_1)\leqq\varphi(X_1);$$

analogamente, paragonando $\varphi'(X_2)$ e $\varphi(X_2)$, e osservando che

$$(X_1-x_{r-1})l(x_{r-1},X_1)+(x_r-X_1)l(X_1, x_r)\leqq(x_r-x_{r-1})l(x_{r-1}, x_r)$$

e

$$l(x_{s-1}, X_2)\leqq l(x_{s-1}, x_s),$$

si deduce

$$\varphi'(X_2) \leqq \varphi(X_2).$$

D'altra parte si ha

$$\varphi'(X_2) - \varphi'(X_1) = (x_r - X_1) l(X_1, x_r) + \ldots + (X_2 - x_{s-1}) l(x_{s-1}, X_2),$$

e sostituendo a $l(X_1, x_r) \ldots l(x_{s-1}, X_2)$ rispettivamente $l(X_1, X_2)$ e $\lambda(X_1, X_2)$, entro cui esse sono comprese, si ha

$$(X_2 - X_1) l(X_1, X_2) \geqq \varphi'(X_2) - \varphi'(X_1) \geqq (X_2 - X_1) \lambda X_1, X_2);$$

e questa diseguaglianza si decompone nelle due

$$\varphi'(X_2) \leqq \varphi'(X_1) + (X_2 - X_1) l(X_1, X_2) \qquad (a)$$

e

$$\varphi'(X_2) \geqq \varphi'(X_1) + (X_2 - X_1) \lambda(X_1, X_2). \qquad (b)$$

Ora $F(X_2)$ è il limite inferiore dei valori di $\varphi(X_2)$, e quindi anche di $\varphi'(X_2)$, onde $\varphi'(X_2) \geqq F(X_2)$; e siccome si è trovato $\varphi'(X_1) \leqq \varphi(X_1)$, dalla diseguaglianza (a) si ricava

$$F(X_2) \leqq \varphi(X_1) + (X_2 - X_1) l(X_1, X_2),$$

e questa, che è soddisfatta da tutti i valori di $\varphi(X_1)$ sarà ancora verificata dal loro limite inferiore $F(X_1)$, onde

$$F(X_2) \leqq F(X_1) + (X_2 - X_1) l(X_1, X_2),$$

e quindi

$$\frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} \leqq l(X_1, X_2). \qquad (a')$$

In modo analogo, dalla diseguaglianza (b), osservando che $\varphi(X_2) \geqq \varphi'(X_2)$, e $\varphi'(X_1) \geqq F(X_1)$, si ricava

$$\varphi(X_2) \geqq F(X_1) + (X_2 - X_1) \lambda(X_1, X_2),$$

quindi anche $F(X_2)$, che è il limite inferiore di $\varphi(X_2)$, sarà $\geqq$ della quantità di destra:

$$F(X_2) \geqq F(X_1) + (X_2 - X_1)\lambda(X_1, X_2),$$

onde

$$\frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} \geqq \lambda(X_1, X_2). \qquad (b')$$

Le (a') e (b') riunite dànno

$$l(X_1, X_2) \geq \frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} \geq \lambda(X_1, X_2).$$

Questa formula è dimostrata per $X_2 > X_1$, ma in essa X_1 e X_2 compaiono simmetricamente, quindi questa condizione si può togliere. Facciasi in questa diseguaglianza $X_1 = x$, $X_2 = x + h$; si avrà:

$$l(x, x+h) \geqq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geqq \lambda(x, x+h),$$

e facendo tendere h a zero, siccome, per la continuità di $f(x)$,

$$\lim l(x, x+h) = \lim \lambda(x, x+h) = f(x),$$

si deduce

$$\lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x),$$

ossia la funzione $F(x)$ ha appunto per derivata $f(x)$.

Risulta così trovata una funzione $F(x)$ che per $x = a$ assume un valore arbitrario A, e la cui derivata è $f(x)$, il che volevasi fare.

Regole d'integrazione.

163. — Dalle formule che dànno i differenziali di funzioni si ricavano facilmente altre formule che dànno gli integrali di quei differenziali.

Così ad esempio dalla formula

$$d\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n\,dx \qquad (n \gtrless -1)$$

si ricava

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad [1]$$

la quale serve qualunque sia n purchè non eguale a -1.

Supposto $x > 0$ si ha

$$d \log x = \frac{dx}{x}\,,$$

onde si ricava

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C\,.$$

Se $x < 0$, e quindi $-x$ positivo, si avrà

$$d \log(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}\,,$$

onde per x negativo si avrà

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x) + C\,;$$

del resto questa nuova formula coincide colla precedente, perchè introdotti i logaritmi immaginarii, $\log x$ e $\log -x$ non differiscono fra loro che per un multiplo dispari di πi, ossia per una costante. Quindi si avrà:

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C = \log(-x) + C = \frac{1}{2}\log x^2 + C, \qquad [2]$$

dove le varie costanti non hanno necessariamente lo stesso valore.

L' $\int \frac{dx}{x}$ si può anche dedurre dall' $\int x^n\,dx$ facendo tendere n verso -1. Per riconoscere questa verità si consideri fra gli infiniti valori di $\int x^n\,dx$ quello che si annulla per $x = 1$; esso sarà

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1} - 1}{n+1};$$

facendo tendere n verso -1, il limite del membro di destra, che si determina derivando numeratore e denominatore rispetto n, è appunto $\log x$, cioè quell' $\int \frac{dx}{x}$ che si annulla per $x = 1$.

164. — Analogamente dalla formula

$$d \operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1 + x^2}$$

si ricava

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C. \qquad [3]$$

Dalle formule

$$d \operatorname{arc\,sen} x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{e} \quad d \operatorname{arc\,cos} x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

si ha

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C = -\operatorname{arc\,cos} x + C \qquad [4]$$

dove le costanti non sono eguali fra loro. Ma queste due espressioni si possono facilmente ridurre l'una all'altra, perchè

$$\text{arc sen}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2}\,,$$

e quindi $\text{arc sen}\, x$ e $-\text{arc cos}\, x$ non differiscono che per una costante.

Menzioneremo ancora i seguenti integrali

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \qquad [5]$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\, \text{sen}\, ax + C\,, \int \text{sen}\, ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C. \qquad [6]$$

165. — La somma

$$\int \varphi(x)\, dx + \int \psi(x)\, dx - \int \chi(x)\, dx$$

ha per derivata

$$\varphi(x) + \psi(x) - \chi(x)\,,$$

onde

$$\int [\varphi(x) + \psi(x) - \chi(x)]\, dx = \int \varphi(x)\, dx + \int \psi(x)\, dx - \int \chi(x)\, dx \qquad [7]$$

ossia *l'integrale d'una somma algebrica è eguale alla somma degli integrali.*

Il prodotto $a \int f(x)\, dx$ ha per derivata $a f(x)$, onde

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx \qquad [8]$$

ossia *l'integrale del prodotto d'una costante per una funzione è eguale alla costante moltiplicata per l'integrale della funzione.*

Le formule [1], [2], [7], [8] permettono d'eseguire l'integrale d'ogni funzione della forma

$$ax^m + bx^n + cx^p + \dots,$$

ove $a, b, c, \dots$ e $m, n, p, \dots$ sono costanti qualunque e queste non eguali a -1, e si ha

$$\int (ax^m + bx^n + cx^p + \dots)\, dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{p+1}}{p+1} + \dots$$

Ogni funzione intera si può ridurre alla forma precedente, in cui $m, n, p, \dots$ sono interi e positivi; onde si deduce:

L'integrale d'una funzione intera è pure funzione intera.

166. — Se in $\int f(x)\, dx$ si pone $x = \varphi(t)$, questo integrale diventa una funzione di t, ed il suo differenziale sarà ancora $f(x)\, dx$, ove $x = \varphi(t)$ e $dx = \varphi'(t)\, dt$; onde si deduce che

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt,$$

e così si è trasformato l'integrale cercato in un altro mediante un *cambiamento di variabile*. Se si sa eseguire il secondo integrale, basterà sostituire a t la sua espressione in x per avere il primo.

Esempio. — Vogliasi $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$. Pongasi $x - a = t$; onde $dx = dt$; si ricava

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{dt}{t^m} = \int t^{-m}\, dt = \frac{t^{-m+1}}{-m+1} + C = -\frac{1}{(m-1)\, t^{m-1}} + C$$

e sostituendo a t il suo valore

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C.$$

Questa formula serve per $m \gtrless 1$. Nel caso di $m = 1$ si ha

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \log(x-a) + C,$$

ovvero

$$= \log(a-x) + C,$$

ovvero

$$= \frac{1}{2} \log(x-a)^2 + C.$$

167. — Dalla formula

$$d\,uv = u\,dv + v\,du$$

ove u e v sono funzioni di x si deduce

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

e quindi

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

In questa formula consiste il procedimento detto d'*integrazione per parti*. Per applicarlo si decomponga il differenziale ad integrarsi in due fattori, l'uno finito u, e l'altro dv che sia il differenziale d'una funzione v facile a determinarsi; l'integrale cercato resta decomposto in due parti, l'una integrata, e l'altra affetta dal segno integrale; e se questo nuovo integrale è più semplice del precedente, si avrà fatta un' utile applicazione di questo procedimento.

Es. Vogliasi l' $\int x^m \log x\,dx$. Pongasi

$$u = \log x, \quad dv = x^m\,dx,$$

onde

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

si avrà

$$\int x^m \log x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \int \frac{x^m\,dx}{m+1},$$

ossia

$$\int x^m \log x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C.$$

Integrazione delle funzioni razionali.

168. — Ogni funzione razionale fratta di x si può mettere sotto la forma

$$\frac{F(x)}{f(x)},$$

ove $F(x)$ ed $f(x)$ sono funzioni intere di x.

Se il grado del numeratore è maggiore o eguale a quello del denominatore, si divida $F(x)$ per $f(x)$; sia Q il quoziente ed R il resto; si avrà

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q + \frac{R}{f(x)},$$

ed integrando, siccome l'$\int Q\,dx$ si sa fare, siamo ridotti ad integrare una frazione in cui il numeratore è di grado inferiore a quello del denominatore. Per fare questa integrazione ci occorre la teoria algebrica della decomposizione delle funzioni fratte in frazioni della forma

$$\frac{A}{(x-a)^m}$$

dette *frazioni semplici.*

169. — Sia adunque il grado di $F(x)$ minore di quello di $f(x)$. Sia a una radice dell'equazione $f(x)=0$, ed α il suo ordine di multiplicità. Pongasi

$$f(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x)$$

ove $\varphi(x)$ è un polinomio intero non divisibile per $x-a$, e quindi $\varphi(a) \gtrless 0$.

Dall'identità, qualunque sia A,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)} - \frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$$

si ricava

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{F(x) - A\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)}.$$

Si determini la costante A in modo che il numeratore della seconda frazione sia divisibile per $x-a$; perciò è necessario e sufficiente che esso si annulli per $x=a$, e si ha l'equazione

$$F(a) - A\varphi(a) = 0,$$

onde A risulta determinato

$$A = \frac{F(a)}{\varphi(a)}$$

ed il suo valore è finito, perchè $\varphi(a)$ non è nullo. Così determinato A, la seconda frazione si può semplificare, e posto

$$F(x) - A\varphi(x) = (x-a)F_1(x)$$

si ha

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)},$$

ed il grado di $F_1(x)$ sarà minore del grado del denominatore, perchè il grado di $F(x) - A\varphi(x)$ è minore di quello di $(x-a)^{\alpha}\varphi(x)$.

Se $\alpha > 1$, si operi sulla seconda frazione del membro di destra come si è fatto sulla data, e si avrà

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi(x)},$$

e così continuando, si avrà

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{G(x)}{\varphi(x)},$$

ove $G(x)$ è un polinomio intero di grado minore di quello di $\varphi(x)$. In questa nuova frazione al denominatore non comparisce più la radice a; se b è una radice multipla β volte di $f(x)=0$, e quindi anche di $\varphi(x)=0$, si potrà decomporre in modo analogo $\frac{G(x)}{\varphi(x)}$, e così continuando, se $a, b, \ldots l$ sono le radici dell'equazione $f(x)=0$, ed $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ il loro ordine di multiplicità, si avrà

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)}=&\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\&+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{L}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l},\end{aligned}$$

e così resta decomposta la frazione data in frazioni semplici.

170. — Se le radici $a, b, \ldots l$ di $f(x)=0$ sono semplici, si avrà

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}.$$

I numeratori costanti si ottengono col procedimento indicato; così posto

$$f(x)=(x-a)\,\varphi(x)$$

si ha

$$A=\frac{F(a)}{\varphi(a)}.$$

Ma derivando l'equazione precedente si ha

$$f'(x)=(x-a)\,\varphi'(x)+\varphi(x),$$

e ponendo $x = a$

$$f'(a) = \varphi(a),$$

onde

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)}.$$

Analogamente si ha

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \ldots L = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

e queste nuove formule sono spesso più comode pel calcolo, perchè riesce spesso più facile calcolare la derivata di $f(x)$ che i suoi quozienti per $x - a$, $x - b, \ldots$

Se

$$f(x) = (x - a)(x - b) \ldots (x - l),$$

si avrà

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x - a} = (x - b)(x - c) \ldots (x - l),$$

onde

$$\varphi(a) = (a - b)(a - c) \ldots (a - l)$$

e

$$A = \frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F(a)}{(a - b)(a - c) \ldots (a - l)}.$$

Analogamente

$$B = \frac{F(b)}{(b - a)(b - c) \ldots (b - l)}, \ldots L = \frac{F(l)}{(l - a)(l - b) \ldots\ldots}.$$

Sostituendo questi valori nella prima formula, e moltiplicando per $f(x)$ si ricava

$$F(x) = \frac{(x - b) \ldots (x - l)}{(a - b) \ldots (x - l)} F(a) + \frac{(x - a)(x - c) \ldots (x - l)}{(b - a)(b - c) \ldots (b - l)} F(b) + \ldots$$
$$+ \frac{(x - a)(x - b) \ldots\ldots}{(l - a)(l - b) \ldots\ldots} F(l),$$

che esprime un polinomio intero $F(x)$ in funzione dei valori che esso assume pei valori $a, b, \ldots l$ della variabile, il cui numero è maggiore del grado di $F(x)$. Questa formula è conosciuta sotto il nome di formula d'interpolazione di Lagrange.

171. — Il calcolo differenziale somministra dei procedimenti utili per determinare i numeratori delle frazioni semplici, anche nel caso delle radici multiple.

Conservando le notazioni precedenti, se si moltiplica per $(x-a)^\alpha$ l'equazione

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{G(x)}{\varphi(x)}$$

ove $f(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x)$, si avrà:

$$\frac{(x-a)^\alpha F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{\varphi(x)}$$

$$= A + A_1(x-a) + \ldots + A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^\alpha \frac{G(x)}{\varphi(x)}.$$

Se in questa si fa $x = a$ il terzo membro si riduce ad A, il secondo ad $\frac{F(a)}{\varphi(a)}$, ed il primo si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ma se ne può determinare il limite coi procedimenti noti. Se invece la si deriva, poi si fa $x = a$, l'ultimo membro si riduce ad A_1, e si hanno così due espressioni di A_1, e così di seguito.

Si può pure osservare che l'ultima formula dà lo sviluppo di $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ in un polinomio ordinato secondo le potenze discendenti di $x-a$, completato col resto $(x-a)^\alpha \frac{G(x)}{\varphi(x)}$, ed esso si può ottenere colla formula di Taylor, ovvero colla divisione algebrica.

172. — Ottenuta la decomposizione in frazioni semplici di $\frac{F(x)}{f(x)}$, si avrà il suo integrale ricorrendo alle formule

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^{\alpha}} = -\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + C \qquad \text{se} \qquad \alpha > 1$$

e

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \log(x-a) + C = A \log(a-x) + C$$

$$= \frac{1}{2} A \log(x-a)^2 + C,$$

e se ne deduce che

Ogni funzione algebrica razionale è integrabile con funzioni algebriche razionali e logaritmi, supposte note tutte le radici del denominatore.

Ciò che precede sussiste sia che siano reali o immaginarii i coefficienti di F ed f. Ma se i coefficienti sono reali, ed è pure reale x, se $f(x)$ ha radici immaginarie, l'integrale risulta complicato di immaginarii, ed è conveniente il farli sparire. A questo scopo si osservi che se a è una radice complessa multipla α volte di $f(x)=0$, anche la sua coniugata, che diremo b, sarà multipla lo stesso numero di volte; onde i termini

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{e} \quad \frac{B}{(x-b)^k}$$

sono coniugati, ed i loro integrali, per $k > 1$,

$$-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \quad \text{e} \quad -\frac{B}{(k-1)(x-b)^{k-1}}$$

sono pure immaginarii coniugati, e la loro somma è reale.

Se l'esponente vale 1, la somma

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

ha per integrale

$$A \log (x - a) + B \log (x - b),$$

ossia, posto

$$a = p + iq \qquad b = p - iq$$
$$A = h + ik, \qquad B = h - ik,$$

l'integrale diventa

$$(h + ik) \log (x - p - iq) + (h - ik) \log (x - p + iq),$$

ovvero per formule note

$$(h + ik) \left[\log \sqrt{(x-p)^2 + q^2} - i \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p} \right]$$
$$+ (h - ik) \left[\log \sqrt{(x-p)^2 + q^2} + i \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p} \right],$$

e semplificando esso diventa

$$h \log \left[(x-p)^2 + q^2 \right] + 2k \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p},$$

e così scomparvero gli immaginarii.

Del resto questo integrale si può ottenere senza passare per gli immaginarii, perchè, riducendo allo stesso denominatore si ha

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = 2 \frac{h(x-p) - kq}{(x-p)^2 + q^2},$$

ed il suo integrale vale la somma dei due integrali

$$\int \frac{2h(x-p)\,dx}{(x-p)^2 + q^2} = h \int \frac{d\left[(x-p)^2 + q^2\right]}{(x-p)^2 + q^2} = h \log \left[(x-p)^2 + q^2 \right]$$

e

$$-2k \int \frac{q\,dx}{(x-p)^2 + q^2} = -2k \int \frac{d\,\frac{x-p}{q}}{\left(\frac{x-p}{q}\right)^2 + 1} = -2k \operatorname{arc\,tang} \frac{x-p}{q},$$

ovvero anche

$$+2k \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p},$$

perchè $-\operatorname{arc\,tang} z$ e $+\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{z}$ non differiscono fra loro che per una costante.

173. — *Esempi.*

1° $$\int \frac{dx}{1-x^2}.$$

Servendoci delle notazioni precedenti si ha

$$F(x)=1, \quad f(x)=1-x^2, \quad a=1, \quad b=-1;$$

$$f'(x)=-2x, \quad A=\frac{F(a)}{f'(a)}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}, \quad B=\frac{F(b)}{f'(b)}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right],$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}[\log(x+1)-\log(x-1)]+C=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}+C.$$

2° $\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}$, che si può scrivere $\int \frac{a\,dx}{(ax+b)^2+(ac-b^2)}$.

Se $ac-b^2>0$, posto $ax+b=\sqrt{ac-b^2}\,z$, si ha

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc\,tang} z+C,$$

ed infine

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}+C.$$

Se invece $ac-b^2<0$, pongasi

$$ax+b=\sqrt{b^2-ac}\,z,$$

si avrà

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-ac}} \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \log \frac{z-1}{z+1} + C,$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \log \frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}} + C.$$

3° $$\int \frac{px+q}{ax^2+2bx+c}\, dx.$$

Esso si decompone nella somma dei due integrali

$$\frac{p}{2a} \int \frac{2ax+2b}{ax^2+2bx+c}\, dx = \frac{p}{2a} \log (ax^2+2bx+c)$$

e

$$\int \frac{q-\frac{bp}{a}}{ax^2+2bx+c}\, dx = \frac{aq-bp}{a} \int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}$$

precedentemente ottenuto.

4° — Più generalmente l'integrale

$$\int \frac{p_0 x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n}\, dx$$

in cui il numeratore è di grado minore d'una unità a quello del denominatore si può decomporre nella somma dei due integrali

$$\frac{p_0}{nq_0} \int \frac{nq_0 x^{n-1} + (n-1) q_1 x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n}\, dx =$$

$$= \frac{p_0}{nq_0} \log (q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n)$$

e

$$\frac{1}{nq_0} \int \frac{[nq_0 p_1 - (n-1) q_1 p_0] x^{n-2} + \ldots\ldots}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n}\, dx,$$

in cui il grado del numeratore è minore di due unità almeno a quello del denominatore.

5° $$\int \frac{f(x)}{(x-a)^n}\,dx\,,$$

ove $f(x)$ è una funzione intera di grado minore di n.

Ricorrendo alla formula di Taylor si ha

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a).$$

Di qui si ricava

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{f(a)}{(x-a)^n}+\frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}}+\frac{f''(a)}{2!\,(x-a)^{n-2}}+\ldots+\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!\,(x-a)},$$

e quindi

$$\int\frac{f(x)}{(x-a)^n}\,dx=-\frac{f(a)}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}}-\frac{f'(a)}{(n-2)\,(x-a)^{n-2}}-\ldots$$
$$+\frac{f^{(n-1)}a}{(n-1)!}\log(x-a)+C.$$

174. — La decomposizione d'una frazione in frazioni semplici si può pure ottenere col seguente

Teorema. — *La frazione* $\dfrac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}$, *ove*

$$\varphi(x)=p_0\,x^m+p_1\,x^{m-1}+\ldots\ldots+p_m$$

e

$$\psi(x)=q_0\,x^n+q_1\,x^{n-1}+\ldots\ldots+q_n$$

sono funzioni intere di gradi m *ed* n *prime fra loro, ed*

$$F(x)=a_0\,x^{m+n-1}+a_1\,x^{m+n-2}+\ldots\ldots a_{m+n-1}$$

è una funzione di grado minore di quello del prodotto $\varphi(x)\psi(x)$, *si può decomporre nella somma di due frazioni*

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)} = \frac{P}{\varphi(x)} + \frac{Q}{\psi(x)},$$

ove P *e* Q *sono funzioni intere di grado minore di quelli dei denominatori corrispondenti.*

Invero, se fra le $m+n+1$ equazioni

$$\begin{aligned}
F(x) &= a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} + \ldots\ldots + a_{m+n-1} \\
x^{n-1}\varphi(x) &= p_0 x^{m+n-1} + p_1 x^{m+n-2} + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi(x) &= \qquad\qquad\qquad p_0 x^m + \ldots\ldots + p_m \\
x^{m-1}\psi(x) &= q_0 x^{m+n-1} + q_1 x^{m+n-2} + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi(x) &= \qquad\qquad\qquad q_0 x^n + \ldots\ldots + q_n
\end{aligned}$$

si eliminano le $m+n$ quantità

$$x^{m+n-1}, \quad x^{m+n-2}, \ldots\ldots x^0$$

che vi compaiono linearmente, si ha

$$\begin{vmatrix}
F(x) & a_0 & a_1 \ldots\ldots\ldots a_{m+n-1} \\
x^{n-1}\varphi(x) & p_0 & p_1 \ldots\ldots\ldots 0 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi(x) & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots p_m \\
x^{m-1}\psi(x) & q_0 & q_1 \ldots\ldots\ldots 0 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi(x) & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots q_n
\end{vmatrix} = 0,$$

e sviluppando questo determinante secondo la prima verticale, si ha

$$AF(x) + (A_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + A_n)\varphi(x) + (A_{n+1} x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m+n})\psi(x) = 0.$$

Il coefficiente A, che è il suddeterminante di $F(x)$ non è nullo, perchè è il risultante calcolato col metodo dialitico di Sylvester delle due funzioni $\varphi(x)$

e $\psi(x)$ che sono prime fra loro; onde risolvendo l'ultima equazione rispetto $F(x)$ si ha

$$F(x) = Q\,\varphi(x) + P\,\psi(x),$$

ove Q e P sono polinomii dei gradi $n-1$ ed $m-1$ in x; e quindi

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)} = \frac{P}{\varphi(x)} + \frac{Q}{\psi(x)}, \qquad \text{c. v. d.}$$

Applicando più volte questo teorema si deduce che se in $\frac{F(x)}{f(x)}$ si può decomporre il denominatore nel prodotto di più funzioni intere prime fra loro

$$f(x) = \chi_1\,\chi_2 \cdots \chi_n,$$

si avrà

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P_1}{\chi_1} + \frac{P_2}{\chi_2} + \ldots + \frac{P_n}{\chi_n},$$

ove $P_1, P_2, \ldots P_n$ sono polinomii interi di grado minore del grado del denominatore corrispondente. Quindi si avrà

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{P_1}{\chi_1}\,dx + \int \frac{P_2}{\chi_2}\,dx + \ldots + \int \frac{P_n}{\chi_n}\,dx.$$

Come caso particolare, se si conoscono le radici di $f(x) = 0$, ossia se:

$$f(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}\,(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n},$$

si avrà

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{P_1}{(x - a_1)^{\alpha_1}}\,dx + \int \frac{P_2}{(x - a_2)^{\alpha_2}}\,dx + \ldots\ldots$$

e gli integrali del membro di destra si sanno fare sotto forma finita (N. 173, 5°).

Se in $\frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}$ il grado del numeratore è minore di due unità del grado del denominatore (N. 173, 4°), e φ e ψ sono prime fra loro, posto

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} \varphi'(x) & \varphi(x) \\ \psi'(x) & \psi(x) \end{vmatrix},$$

sarà conveniente decomporre

$$F(x) = AH + Q\varphi(x) + P\psi(x),$$

onde

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)} = A\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right) + \frac{P}{\varphi(x)} + \frac{Q}{\psi(x)},$$

ove A è una costante, e P e Q sono polinomii interi il cui grado è minore anch'esso di due unità del grado del denominatore corrispondente. Quindi integrando si ha

$$\int \frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}\,dx = A\log\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \int\frac{P}{\varphi(x)}\,dx + \int\frac{Q}{\psi(x)}\,dx. \quad (*)$$

Così ad esempio, per decomporre l'integrale $\int \frac{A}{BC}\,dx$, ove

$$\begin{aligned} A &= a_0x^2 + 2a_1x + a_2, \\ B &= b_0x^2 + 2b_1x + b_2, \\ C &= c_0x^2 + 2c_1x + c_2, \end{aligned}$$

posto

$$H = \begin{vmatrix} b_0x + b_1 & b_1x + b_2 \\ c_0x + c_1 & c_1x + c_2 \end{vmatrix} = h_0x^2 + 2h_1x + h_2,$$

si ricorrerà all'identità, che si ottiene dalle equazioni precedenti eliminando x^2, x^1, x^0:

$$\begin{vmatrix} A & a_0 & a_1 & a_2 \\ H & h_0 & h_1 & h_2 \\ B & b_0 & b_1 & b_2 \\ C & c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

onde si ricava

$$A(hbc) - H(abc) + B(ahc) - C(ahb) = 0,$$

rappresentando coi simboli (hbc), (abc),... i determinanti di terzo ordine complementari di A, H,... Quindi si deduce

$$\int \frac{A}{BC}\,dx = \frac{(abc)}{(hbc)}\tfrac{1}{2}\log\frac{B}{C} + \frac{(ahb)}{(hbc)}\int\frac{dx}{B} - \frac{(ahc)}{(hbc)}\int\frac{dx}{C}.$$

Se il lettore conosce la teoria delle formazioni invariantive, riconosce nella formula (*) che godono appunto di proprietà invariantiva i tre integrali, e che A, P, Q sono formazioni invariantive (invarianti e convarianti) di F, φ e ψ.

Come si disse, non si sa eseguire l'integrale $\int \frac{F(x)}{f(x)} dx$ ove non si conoscano le radici del denominatore. Però, se $f(x)$ ha radici multiple, si può decomporre l'integrale nella parte algebrica, e in uno o più integrali di funzioni fratte, in cui il denominatore ha tutte le radici semplici. Invero l'algebra insegna come, con successive divisioni, si possano ottenere i polinomi $\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_m$ tali che

$$f(x) = \chi_1 \cdot \chi_2^2 \cdot \chi_3^3 \cdots \chi^m{}_m,$$

dove $\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_m$ sono polinomii primi fra loro, ed ognuno ha sole radici semplici; quindi si avrà:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P_1}{\chi_1} + \frac{P_2}{\chi_2^2} + \frac{P_3}{\chi_3^3} + \cdots + \frac{P_m}{\chi_m^m},$$

e l'integrale cercato sarà ridotto alla somma di più integrali della forma

$$\int \frac{P}{\chi^n} dx.$$

Sia χ' la derivata di χ; si determinino due polinomii U e V tali che

$$P = U\chi + V\chi',$$

il che è possibile in infiniti modi, ove non si faccia alcuna ipotesi sui gradi di U e V. Invero essendo χ ed χ' primi fra loro, perchè χ ha sole radici semplici, si potranno calcolare, in virtù del teorema dimostrato, due polinomii M ed N in modo che

$$1 = M\chi + N\chi';$$

moltiplicando quest'equazione per P:

$$P = PM\chi + PN\chi',$$

ed aggiungendovi l'identità

$$0 = W\chi'\chi - W\chi\chi'$$

ove W è un polinomio qualunque, si avrà:

$$P = (PM + W\chi')\chi + (PN - W\chi)\chi',$$

ossia

$$P = U\chi + V\chi',$$

e, a causa dell'arbitrarietà di W, questo si può fare in infiniti modi.

Quindi si ha

$$\frac{P}{\chi^n} = \frac{U\chi + V\chi'}{\chi^n} = \frac{U}{\chi^{n-1}} + \frac{V\chi'}{\chi^n},$$

e

$$\int \frac{P}{\chi^n}\, dx = \int \frac{U}{\chi^{n-1}}\, dx + \int \frac{V\chi'}{\chi^n}\, dx.$$

Ma integrando per parti il secondo integrale, si deduce

$$\int \frac{V\chi'}{\chi^n}\, dx = -\frac{V}{(n-1)\chi^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{V'}{\chi^{n-1}}\, dx,$$

onde

$$\int \frac{P}{\chi^n}\, dx = -\frac{V}{(n-1)\chi^{n-1}} + \int \frac{U + \frac{1}{n-1}V'}{\chi^{n-1}},$$

e così l'integrale proposto è espresso mediante una funzione algebrica ed un nuovo integrale, della stessa forma del dato, in cui l'esponente n è diminuito di un' unità. Ripetendo la stessa operazione sul nuovo integrale, si avrà infine

$$\int \frac{P}{\chi^n}\, dx = \text{funzione razionale di } x + \int \frac{Q}{\chi}\, dx.$$

Eseguendo la stessa operazione su tutti gli integrali in cui si è decomposto $\frac{F(x)}{f(x)}$ si avrà:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\, dx = \text{funzione razionale} + \int \frac{Q_1}{\chi_1}\, dx + \int \frac{Q_2}{\chi_2}\, dx + \dots + \int \frac{Q_n}{\chi_n}\, dx,$$

dove $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ sono polinomii interi.

Integrazione di funzioni irrazionali.

175. — Se la funzione da integrarsi non contiene che irrazionali monomii, cioè potenze fratte della variabile x, si potrà rendere razionale il differenziale ponendo

$$x = z^n, \quad \text{onde} \quad dx = nz^{n-1}dz,$$

e scegliendo l'esponente n in modo da far sparire gli irrazionali; e basterà a questo scopo prendere per n un multiplo comune dei denominatori degli esponenti frazionarii. Così ad es., posto $x = z^6$, si avrà

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+z^2}{1-z^3}\,6z^5dz,$$

e la funzione ad integrarsi è razionale.

In modo analogo si rende razionale un differenziale non contenente altra irrazionalità che potenze fratte del binomio $a+bx$, ovvero della funzione $\frac{a+bx}{c+dx}$, ponendo rispettivamente

$$a+bx = z^n, \quad \text{ovvero} \quad \frac{a+bx}{c+dx} = z^n,$$

e scegliendo l'esponente n in modo da far sparire gli irrazionali.

176. — Un differenziale della forma

$$f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx,$$

ove f rappresenta una funzione razionale di due variabili, si può pure rendere razionale con acconcie trasformazioni.

Pongasi

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a}+xz\,. \tag{1}$$

Elevando a quadrato, si ha

$$a+bx+cx^2=a+2\sqrt{a}\,xz+x^2z^2;$$

sottraendo da ambo i membri a e dividendo per x

$$b+cx=2\sqrt{a}z+xz^2\,,$$

ove x comparisce a primo grado; risolvendola rispetto x si ha:

$$x=\frac{2\sqrt{a}z-b}{c-z^2}\,,$$

onde

$$dx=2\,\frac{c\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}z^2}{(c-z^2)^2}\,dz\,,$$

e sostituendo nella (1)

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{c\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}z^2}{c-z^2}\,;$$

quindi l'integrale cercato

$$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx=$$

$$\int f\left(\frac{2\sqrt{a}z-b}{c-z^2},\ \frac{c\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}z^2}{c-z^2}\right)2\,\frac{c\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}z^2}{(c-z^2)^2}\,dz\,,$$

diventa l'integrale d'una funzione razionale.

Se tutte le quantità che compaiono nel differenziale sono reali, questa sostituzione introduce degli immaginarii se a è negativo. Con una piccola modificazione ci possiamo liberare da questo inconveniente.

Il trinomio $a+bx+cx^2$ deve essere positivo per qualche valore di x, se la sua radice quadrata è reale per alcuni valori di x. Sia adunque x_0 tale che

$$a+bx_0+cx_0^2 \geqq 0.$$

Si ha dalla formula di Taylor

$$a+bx+cx^2=a+bx_0+cx_0^2+(b+2cx_0)(x-x_0)+c(x-x_0)^2.$$

Facciasi la sostituzione

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a+bx_0+cx_0^2}+(x-x_0)z \qquad (2)$$

Elevando a quadrato e riducendo si ha

$$(b+2cx_0)+c(x-x_0)=2\sqrt{a+bx_0+cx_0^2}\,.\,z+(x-x_0)z^2,$$

equazione di primo grado in x, onde si ricava x funzione razionale di z; e $\frac{dx}{dz}$ risulta pure funzione razionale di z, e sostituendo nella (2) anche il radicale diventa funzione razionale di z, ed il differenziale dato diventa razionale.

Se si suppone $x_0=0$ si ha la sostituzione precedente. Se x_0 è tale che $a+bx_0+cx_0^2=0$, ossia, se, posto

$$a+bx+cx^2=c(x-\alpha)(x-\beta),$$

si fa $x_0=\alpha$, si avrà la sostituzione

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)z \qquad (3)$$

ossia, elevando a quadrato e riducendo

$$c(x-\beta)=(x-\alpha)z^2$$

equazione di primo grado in x.

È a notarsi che se $a<0$, e quindi non è applicabile la trasformazione (1), si può applicare la (3), perchè il trinomio $a+bx+cx^2$ che è negativo per $x=0$, ed è positivo per alcuni valori di x si deve annullare, ed avere radici reali.

Si può pure fare

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{c}\,x-z \tag{4}$$

onde si ricava

$$a+bx=z^2-2\sqrt{c}\,xz$$

equazione di primo grado in x, da cui si ricava x, $\frac{dx}{dz}$, ed il radicale funzioni razionali di z.

177. — *Esempi.*

1°
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Pongasi $\sqrt{x^2+\alpha}=z-x$; si ricava

$$\alpha=-2xz+z^2,$$

onde

$$x=\frac{z^2-\alpha}{2z},\quad \sqrt{x^2+\alpha}=\frac{\alpha+z^2}{2z},$$

$$dx=\frac{z^2+\alpha}{2z^2}\,dz,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\int\frac{dz}{z}=\log z+C,$$

ed infine, sostituendo a z il suo valore

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\log\left[x+\sqrt{x^2+\alpha}\right]+C.$$

2° $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Esso si può rendere razionale coi procedimenti indicati; ma più semplicemente, dalla formula

$$d \operatorname{arc\,sen} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

si deduce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C.$$

L'integrale più generale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C.$$

3° $$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

Esso si può ridurre ai precedenti mediante la sostituzione

$$Ax + B = z,$$

onde si ricava

$$A\,dx = dz, \quad Ax^2+2Bx+C = \frac{1}{A}\left[z^2+AC-B^2\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \int \frac{dz}{\sqrt{A(z^2+AC-B^2)}}.$$

Quindi, se A è positivo, portando fuori dell'integrale $\frac{1}{\sqrt{A}}$ si ha per l'esempio 1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left[z+\sqrt{z^2+AC-B^2}\right] + \text{costante},$$

e sostituendo a z il suo valore

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \log\left[Ax+B+\sqrt{A(Ax^2+2Bx+C)}\right] + \text{costante}.$$

Se invece A è negativo, in questa formula compaiono immaginarii. Ma possiamo ottenere lo stesso integrale portando fuori del segno integrale il fattore $\frac{1}{\sqrt{-A}}$, e si avrà:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A(z^2+AC-B^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dz}{\sqrt{(B^2-AC)-z^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-A}} \text{ arc sen } \frac{z}{\sqrt{B^2-AC}} + \text{costante},$$

ossia

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \text{ arc sen } \frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}} + \text{costante},$$

e si deve osservare che $B^2 - AC > 0$, poichè essendo A negativo, ed il trinomio $Ax^2+2Bx+C$ positivo per qualche valore di x, le sue radici sono reali.

4° — L'integrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

si può ridurre al precedente ponendo $x-a=\frac{1}{z}$; ma si può ridurre ai primi studiati mediante la sostituzione

$$z = \frac{Aax+B(a+x)+C}{x-a},$$

da cui si ricava

$$x = \frac{az+(Ba+C)}{z-(Aa+B)}$$

$$x-a = \frac{Aa^2+2Ba+C}{z-(Aa+B)}, \quad dx = -\frac{Aa^2+2Ba+C}{[z-(Aa+B)]^2}dz,$$

$$Ax^2+2Bx+C = \frac{(Aa^2+2Ba+C)[z^2+AC-B^2]}{[z-(Aa+B)]^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{(Aa^2+2Ba+C)(z^2+AC-B^2)}},$$

e quindi, se $Aa^2+2Ba+C>0$, il secondo integrale vale

$$\frac{1}{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}}\log\left[z+\sqrt{z^2+AC-B^2}\right]+\text{costante},$$

ovvero sostituendo

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}}\log\frac{Aax+B(a+x)+C+\sqrt{Aa^2+2Ba+C}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-a}.$$

Differenziali binomii.

178. — Un differenziale della forma

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

ove a e b sono costanti, e gli esponenti m, n, e p sono numeri commensurabili, dicesi *differenziale binomio*.

Con un cambiamento di variabili si può trasformare il differenziale dato in un altro della stessa forma in cui gli esponenti che tengono le veci di m ed n siano interi. Invero, posto

$$x=z^\alpha$$

si ha

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx=\alpha z^{m\alpha+\alpha-1}(a+bz^{n\alpha})^p\,dz,$$

che è ancora un differenziale binomio, e gli esponenti di z fuori e dentro parentesi saranno interi se si sceglie α in modo che siano interi $m\alpha$ ed $n\alpha$.

Inoltre l'identità

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx$$

trasforma il differenziale proposto in un altro della stessa forma in cui l'esponente in parentesi si cambia da n in $-n$, quindi in uno dei due differenziali l'esponente della variabile in parentesi è positivo. Perciò potremo supporre, senza ledere alla generalità, gli esponenti m ed n interi, ed n positivo.

179. — Il differenziale proposto è integrabile quando p è un intero, perchè in tal caso è funzione razionale di x.

Se si fa

$$a+bx^n = y$$

si ricava

$$x = \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy$$

e

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{nb}\,y^p\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dy\,,$$

ossia il differenziale proposto si trasforma in un altro dello stesso tipo; e questo, e quindi anche il dato sarà integrabile, se l'esponente $\frac{m+1}{n}-1$ è intero, ossia se

$$\frac{m+1}{n} = \text{intero.}$$

Ed applicando questo stesso criterio a

$$x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx\,,$$

che è una trasformazione del dato, si ricava che esso si saprà pure integrare quando $\frac{m+np+1}{n}$ è intero, ossia

$$\frac{m+1}{n}+p = \text{intero.}$$

Si hanno così tre casi nei quali si sa eseguire l'integrale sotto forma finita, e sono quelli in cui è intero uno dei tre numeri

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n}+p.$$

180. — Si possono stabilire delle formule che legano l'integrale d'un differenziale binomio con altri dello stesso tipo, in cui però variano gli esponenti m e p.

Si integri per parti

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx$$

prendendo per fattore da integrarsi $x^m \, dx$, e per fattore da differenziarsi $(a+bx^n)^p$. Posto, per semplicità di scrittura

$$a+bx^n = y,$$

si avrà:

$$\int x^m y^p \, dx = \frac{x^{m+1} y^p}{m+1} - \frac{bnp}{m+1} \int x^{m+n} y^{p-1} \, dx, \qquad (1)$$

supposto però $m+1$ diverso da zero. Questa formula esprime l'integrale cercato mediante un altro in cui invece di m e p leggesi rispettivamente $m+n$ e $p-1$, e se questi numeri sono più semplici dei precedenti, sarà utile l'applicazione della formula.

Se invece si integra per parti il differenziale dato, prendendo per fattore da integrarsi $y^p x^{n-1} \, dx$, il cui integrale è $\frac{y^{p+1}}{(p+1)nb}$, si avrà:

$$\int x^m y^p \, dx = \frac{y^{p+1} x^{m-n+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n+1}{(p+1)nb} \int x^{m-n} y^{p+1} \, dx, \qquad (2)$$

la quale formula riduce l'integrale proposto ad un altro in cui si è diminuito l'esponente m di n unità, e si è aumentato p di 1.

Si troverebbe questa stessa formula risolvendo la (1) rispetto al-

l'integrale del membro di destra, e scambiando $m+n$ e $p-1$ in m e p.

Le formule (1) e (2) esprimono l'integrale d'un differenziale binomio in funzione d'un altro dello stesso tipo, in cui si sono alterati ambo gli esponenti m e p. Possiamo però da queste dedurre altre formule in cui si alteri un solo esponente.

Se nella (2) nel membro di destra, invece di y^{p+1} si legge $y^p(a+bx^n)$, e quindi

$$\int x^{m-n} y^{p+1} dx = a \int x^{m-n} y^p dx + b \int x^m y^p dx,$$

e si risolve l'equazione rispetto a $\int x^m y^p dx$, che comparisce in ambo i membri, si ha

$$\int x^m y^p dx = \frac{y^{m-n+1} y^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)} \int x^{m-n} y^p dx. \qquad (3)$$

Se si risolve questa equazione rispetto all'integrale di destra, e dovunque c'è m si legge $m+n$, si avrà:

$$\int x^m y^p dx = \frac{x^{m+1} y^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)} \int x^{m+n} y^p dx. \qquad (4)$$

Paragonando fra loro le formule (1) e (4) si ha una relazione fra gli integrali

$$\int x^{m+n} y^{p-1} dx \quad \text{e} \quad \int x^{m+n} y^p dx.$$

Se si risolve l'equazione rispetto al secondo integrale, e invece di m si legge $m-n$, si ha la formula

$$\int x^m y^p dx = \frac{x^{m+1} y^p}{m \quad 1+np} + \frac{npa}{m+1+np} \int x^m y^{p-1} dx. \qquad (5)$$

Se infine si risolve quest'equazione rispetto al secondo integrale, e a p si sostituisce $p+1$, si avrà

$$\int x^m y^p \, dx = -\frac{x^{m+1} y^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+1+np+n}{n(p+1)a} \int x^m y^{p+1} \, dx. \quad (6)$$

Le formule (3) e (4) permettono di aumentare o diminuire l'esponente m di n unità; e quindi, applicate più volte, trasformano l'integrale dato in un altro in cui invece di m si trova $m \pm kn$, k essendo un intero qualunque. Le formule (5) e (6) permettono di aumentare o diminuire l'esponente p di n unità alla volta, e quindi, più volte applicate riducono l'integrale dato ad un altro in cui invece di p leggesi $p \pm k'$, k' essendo un intero qualunque.

Le formule (1)...(6) diventano illusorie quando il rispettivo denominatore è nullo; il che avviene quando

$$m+1=0, \quad \text{ovvero} \quad p+1=0, \quad \text{ovvero} \quad m+1+np=0;$$

ma allora si ha rispettivamente

$$\frac{m+1}{n}=0, \quad p=-1, \quad \frac{m+1}{n}+p=0,$$

e quindi siamo nei casi d'integrabilità già riconosciuti.

181. — *Esempi.* Abbiasi l'$\int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. In questo caso particolare la formula (3) diventa

$$\int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se quindi m è intero e positivo, togliendovi due unità alla volta, ci ridurremo infine, se m è impari all'$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, cui applicando la

stessa formula di riduzione, si ha

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\,,$$

e l'integrale nel membro di destra sparisce. Se m è pari, saremo infine ridotti a $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\, x$.

Abbiasi

$$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Applicando la formula (4), ovvero la (6) si ha immediatamente:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\,.$$

Un differenziale della forma

$$x^q\,(a\,x^r + b\,x^s)^p\,dx$$

si può ridurre al tipo dei differenziali binomii trattati scrivendolo così

$$x^{q+pr}\,(a + bx^{s-r})^p\,dx.$$

Integrali di funzioni trascendenti.

182. — Alcune funzioni trascendenti si integrano immediatamente ricorrendo alle formule (N. 40 e 42):

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}\,,\quad \int \cos x\,dx = \text{sen}\, x\,,\quad \int \text{sen}\, x\,dx = -\cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang}\, x\,,\quad \text{ecc.}$$

Altri differenziali trascendenti si riducono a differenziali razionali con acconci cambiamenti di variabili. Così, se l'integrale dato si può mettere sotto la forma

$$\int f(u)\, u'\, dx,$$

ove f è una funzione razionale, u una funzione trascendente, u' la sua derivata, esso si ridurrà, prendendo per variabile u, a

$$\int f(u)\, du,$$

che è l'integrale d'una funzione razionale.

183. — L'integrale

$$\int f(e^{ax})\, dx,$$

ove la funzione f è razionale, si può trasformare nell'integrale d'una funzione razionale ponendo

$$e^{ax} = z,$$

da cui

$$x = \frac{1}{a} \log z, \quad dx = \frac{dz}{az},$$

e

$$\int f(e^{ax})\, dx = \int f(z) \frac{dz}{az}.$$

Sia p. e. l' $\int \frac{dx}{1+e^x}$; posto $e^x = z$, esso diventa

$$\int \frac{dz}{z(1+z)} = \log z - \log(1+z),$$

ossia

$$= x - \log(1+e^x).$$

184. — L'integrale

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx,$$

ove f è funzione razionale, si può ridurre al caso precedente, ricorrendo alle espressioni di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ mediante esponenziali immaginarii; ed il differenziale dato diventa funzione razionale di e^{ix}.

Ma esso si può pure rendere razionale, senza ricorrere ad immaginarii, ponendo

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x = z,$$

da cui si ricava

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x \cos \tfrac{1}{2} x = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x \cos^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x} = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},$$

onde

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \frac{2\,dz}{1+z^2},$$

ed il differenziale del membro di destra è razionale.

In casi speciali si può ricorrere a trasformazioni più semplici. Se l'integrale dato si può mettere sotto la forma

$$\int f(\operatorname{tang} x)\, dx,$$

basta porre $\operatorname{tang} x = z$, onde $x = \operatorname{arc\,tang} z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$, e

$$\int f(\operatorname{tang} x)\, dx = \int \frac{f(z)}{1+z^2}\, dz.$$

Questo avverrà sempre quando nel differenziale compaiono sole potenze pari di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, perchè

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tang}^2 x}{1 + \operatorname{tang}^2 x}, \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 x}.$$

Se l'integrale dato si può mettere sotto la forma

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos^2 x) \cos x \, dx,$$

f essendo funzione razionale, basterà porre $\operatorname{sen} x = z$, e l'integrale diventa

$$\int f(z, 1 - z^2) \, dz;$$

se si può mettere sotto la forma

$$\int f(\operatorname{sen}^2 x, \cos x) \operatorname{sen} x \, dx,$$

posto $\cos x = z$, esso diventa

$$-\int f(1 - z^2, z) \, dz.$$

185. — Abbiasi

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n dx.$$

Se m ed n sono interi, il differenziale è funzione razionale del seno e del coseno, e quindi si sa calcolare sotto forma finita coi metodi del numero precedente. Se si pone $\operatorname{sen} x = z$, si ha

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dz,$$

e nel membro di destra si ha un differenziale binomio, che si potrà integrare se uno dei numeri

$$\frac{n-1}{2}, \quad \frac{m+1}{2}, \quad \frac{m+n}{2}$$

è intero, il che avviene certamente quando m ed n sono interi.

Però, in tutti i casi è utile l'abbassare il valore assoluto degli esponenti m ed n, il che si ottiene mediante formule di riduzione.

Decompongasi il differenziale a integrarsi in

$$\operatorname{sen}^m x \cos x \, dx \times \cos^{n-1} x,$$

e si integri per parti prendendo il primo fattore come fattore a integrarsi. Si avrà:

$$(1)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} \cos^{n-2} x\, dx.$$

Oppure, integrando per parti, dopo aver decomposto il differenziale nel prodotto

$$\operatorname{sen}^{m-1} x \times \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx,$$

si ha

$$(2)\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx.$$

Se nella formula (1) si tien conto dell'identità

$$\int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\, dx - \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx,$$

e si risolve l'equazione rispetto all'integrale proposto che comparisce in ambo i membri, si ha:

$$(3)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\, dx,$$

ed in modo analogo dalla formula (2) si ricava

$$(4)\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x\, dx.$$

Se si risolve l'equazione (3) rispetto all'integrale di destra, e si aumenta n di due unità si ha:

$$(5)\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n+2} x\, dx,$$

ed in modo analogo, dalla (4) si ricava

$$(6)\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \operatorname{sen}^{n+2} x \cos^n x\, dx.$$

Le formule precedenti si potrebbero pure ricavare in varii altri modi. P. e. scambiando x in $\frac{\pi}{2} - x$ si scambiano fra loro le formule (1) e (2), (3) e (4), (5) e (6). Le ultime quattro permettono di aumentare, o diminuire uno dei due esponenti m ed n di due unità, senza alterare l'altro. Le formule (3) e (4) sono illusorie quando $m+n=0$; in questo caso si applicheranno le (1) e (2); e così riducendo di due unità alla volta gli esponenti m ed n, essi finiranno se sono interi, per assumere i valori 1, o 0, o -1; e saremo così ridotti ai seguenti nove integrali, che calcoleremo direttamente:

$$\int dx = x,$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x,$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x,$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x,$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen} x} = \log \operatorname{sen} x,$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos x} = -\log \cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tang} x} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = \log \operatorname{tang} x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \int \frac{d \frac{1}{2} x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

186. — Alcuni altri differenziali, che si possono rendere razionali colle sostituzioni del N. 184, si possono pure integrare direttamente con opportuni artifizii.

1° — Abbiasi

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \operatorname{sen} x}.$$

Determinate due quantità r e α tali che

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \operatorname{sen} \alpha$$

si avrà

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = r (\cos x \cos \alpha + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha) = r \cos (x - \alpha),$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \operatorname{sen} x} = \frac{1}{r} \int \frac{d(x-\alpha)}{\cos (x - \alpha)} = \frac{1}{r} \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x - \alpha}{2} \right) + C.$$

2° — Abbiasi

$$\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \operatorname{sen}^2 x}.$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2 x$, esso diventa

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a + b \operatorname{tang}^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{a + b \operatorname{tang}^2 x},$$

e quest'ultimo differenziale è razionale se si prende $\operatorname{tang} x$ per variabile indipendente.

3° — Si consideri

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x};$$

osservando che

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x, \quad \text{e} \quad 1 = \cos^2 \tfrac{1}{2} x + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x,$$

si ha

$$\int \frac{dx}{a\,(\cos^2 \frac{1}{2} x + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x) + b\,(\cos^2 \frac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x)} =$$

$$= 2 \int \frac{d \frac{1}{2} x}{(a+b) \cos^2 \frac{1}{2} x + (a-b) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x},$$

e siamo così ridotti all'integrale precedente.

4° — Sia

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \operatorname{sen} x}.$$

Posto ancora $b = r \cos \alpha$, $c = r \operatorname{sen} \alpha$, l'integrale proposto diventa

$$\int \frac{dx}{a + r \cos (x - \alpha)} = \int \frac{d\,(x - \alpha)}{a + r \cos (x - \alpha)},$$

e quindi è ridotto all'integrale che precede.

187. — L'integrale

$$\int e^{ax} x^n \, dx$$

si può semplificare mediante l'integrazione per parti. Prendendo per fattore ad integrarsi $e^{ax}\, dx$ si deduce

$$\int e^{ax} x^n \, dx = \frac{e^{ax}}{a} x^n - \frac{n}{a} \int e^{ax} x^{n-1} \, dx,$$

e l'integrale proposto risulta ridotto ad un altro in cui l'esponente

n è diminuito di 1. Se n è intero e positivo, applicando più volte questo procedimento, ci ridurremo infine a

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

e così risulta determinato l'integrale proposto.

Fatto, per semplicità, $a = -1$, si trova

$$\int e^{-x}\,x^n\,dx = n!\,e^x\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right].$$

Se invece n è negativo, si potrà risolvere la formula di riduzione rispetto all'integrale di destra; ovvero, integrando per parti, e decomponendo il differenziale dato nel prodotto

$$e^{ax}\,.\,x^n\,dx,$$

si ha

$$\int e^{ax}\,x^n\,dx = \frac{e^{ax}\,x^{n+1}}{n+1} - \frac{a}{n+1}\int e^{ax}\,x^{n+1}\,dx \qquad (n \gtrless -1),$$

e quindi si potranno aggiungere tante unità quante si vogliano ad n. Se n è intero e negativo, aggiungendovi più unità, si ridurrà a valere -1; e siamo ridotti all'integrale

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx,$$

cui non è più applicabile la formula precedente. Questo integrale non si sa esprimere sotto forma finita.

188. — Se in $\int e^{ax}\,x^n\,dx$ si fa

$$e^x = z, \qquad x = \log z, \qquad dx = \frac{dz}{z},$$

si ottiene

$$\int e^{ax}\,x^n\,dx = \int z^{a-1}\,(\log z)^n\,dz,$$

e questo secondo integrale si saprà calcolare quando si sappia calcolare il primo, ossia quando n è intero e positivo.

La funzione $\int \frac{e^{ax}}{x} dx$, ponendo $ax = z$ si trasforma in

$$\int \frac{dz}{\log z},$$

ed a questa funzione si dà il nome di logaritmo integrale, od iperlogaritmo. Essa si può scrivere

$$\int \frac{dz}{\int \frac{dz}{z}} = \int \frac{dz}{\int \frac{dz}{\int dz}}$$

Se nello stesso integrale si suppone a complesso $= g + ih$, sarà $e^{ax} = e^{gx} (\cos hx + i \operatorname{sen} hx)$, e

$$\int e^{ax} x^n dx = \int e^{gx} x^n \cos hx \, dx + i \int e^{gx} x^n \operatorname{sen} hx \, dx ;$$

quindi se n è intero è positivo, si saprà calcolare il membro di sinistra, e si avranno calcolati i due integrali

$$\int e^{gx} x^n \cos hx \, dx, \quad \text{e} \quad \int e^{gx} x^n \operatorname{sen} hx \, dx.$$

Come caso particolare, fatto $n = 1$, si avrà

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

e posto $a = g + ih$,

$$\int e^{gx} \cos hx \, dx + i \int e^{gx} \operatorname{sen} hx \, dx = \frac{e^{gx} (\cos hx + i \operatorname{sen} hx)}{g + ih}$$

$$= \frac{e^{gx} [g \cos hx + h \operatorname{sen} hx + i (g \operatorname{sen} hx - h \cos hx)]}{g^2 + h^2},$$

onde

$$\int e^{gx} \cos hx\, dx = \frac{e^{gx}}{g^2 + h^2} (g \cos hx + h \operatorname{sen} hx)$$

$$\int e^{gx} \operatorname{sen} hx\, dx = \frac{e^{gx}}{g^2 + h^2} (g \operatorname{sen} hx - h \cos hx),$$

cui basta aggiungere le costanti arbitrarie per avere gli integrali generali.

Del resto questi integrali si possono ottenere direttamente mediante l'integrazione per parti. Invero, messi i differenziali sotto le forme

$$e^{gx}\, dx \,.\, \cos hx \qquad \text{e} \qquad e^{gx}\, dx \,.\, \operatorname{sen} hx\,,$$

si ha

$$\int e^{gx} \cos hx\, dx = \frac{1}{g}\, e^{gx} \cos hx + \frac{h}{g} \int e^{gx} \operatorname{sen} hx\, dx\,,$$

e

$$\int e^{gx} \operatorname{sen} hx\, dx = \frac{1}{g}\, e^{gx} \operatorname{sen} hx - \frac{h}{g} \int e^{gx} \cos hx\, dx\,,$$

e si hanno due equazioni lineari fra gli integrali cercati.

Altro caso particolare degli integrali precedenti sono

$$\int x^n \cos x\, dx\,, \quad \text{e} \quad \int x^n \operatorname{sen} x\, dx\,,$$

che si ottengono facendo $g = 0$, $h = 1$. Le formule di riduzione si possono però ottenere direttamente mediante l'integrazione per parti. Si ha invero

$$\int x^n \cos x\, dx = + x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = - x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx\,,$$

e così la coppia di integrali proposti si riduce ad un'altra dello

stesso tipo, in cui invece di n si legge $n-1$. Quindi, se n è intero e positivo, applicando più volte lo stesso procedimento, si arriverà agli integrali noti

$$\int \cos x\, dx\,, \qquad \int \operatorname{sen} x\, dx.$$

Se si fa $\operatorname{sen} x = z$, si ha

$$\int x^n \cos x\, dx = \int (\operatorname{arc\,sen} z)^n\, dz\,,$$

e se si fa $\cos x = z$, si ha

$$\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = -\int (\operatorname{arc\,cos} z)^n\, dz\,,$$

e quindi anche questi integrali si sapranno eseguire se n è intero e positivo.

189. — Si possono calcolare gli integrali della forma

$$\int f(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots e^{kx})\, dx\,,$$

essendo f una funzione intera. Invero, la funzione f si decompone nella somma di più termini, ciascheduno dei quali è il prodotto d'una costante numerica per una potenza di x, e per alcune potenze di $e^{ax}, e^{bx}, \ldots$; raggruppando insieme gli esponenziali, saremo ridotti ad eseguire alcuni integrali del tipo

$$\int x^m e^{px}\, dx\,,$$

ove m è intero e positivo, e questi integrali si sanno fare (N. 187).

L'integrazione d'una funzione intera di x, di esponenziali $e^{ax}, e^{bx}, \ldots$ e di seni e coseni di funzioni lineari di x si può ridurre al caso precedente, sostituendo ai seni e coseni le loro espressioni mediante esponenziali.

L'integrale

$$\int f(x)\, e^{ax}\, dx,$$

ove $f(x)$ è funzione razionale di x, decomponendo $f(x)$ in un polinomio intero e nelle sue frazioni semplici, si esprime mediante alcuni integrali della forma

$$\int x^m e^{ax}\, dx, \quad \text{e} \quad \int \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^n}\, dx,$$

ove m ed n sono interi e positivi. In virtù delle formule del N. 187 il primo si può calcolare; il secondo, posto $x-\alpha=z$, diventa $e^{a\alpha}\int z^{-n} e^{az}\, dz$, che si può esprimere mediante funzioni note, e il logaritmo integrale.

Gli integrali

$$\int f(x) \operatorname{sen} ax\, dx, \quad \int f(x) \cos ax\, dx$$

si possono ridurre al precedente esprimendo le funzioni trigonometriche mediante esponenziali.